第 22 卷 第 4 期　北京航空航天大学学报(社会科学版)　Vol.22　No.4
2009 年 12 月　Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics(Social Sciences Edition)　December，2009

基于互反和互补的区间偏好信息集结方法研究

杜俊慧，魏法杰
(北京航空航天大学 经济管理学院，北京 100191)

摘　要：主要研究区间数互反和互补判断矩阵的集结排序方法。在区间数互反和互补判断矩阵概念的基础上，给出了区间数互反和互补判断矩阵的一致性定义。根据一致性的定义，提出了基于线性规划模型的区间数互反和互补判断矩阵集结方法，并通过实例说明了方法的可行性和有效性。

关键词：互反判断矩阵；互补判断矩阵；集结；线性规划
中图分类号：C94　**文献标识码：**A　**文章编号：**1008-2204(2009)04-0022-03

Aggregation Approach of Two Kinds of Interval Preference Information

DU Jun-hui，*WEI Fa-jie*
(School of Economics and Management，Beijing University of Aeronautics and Astronautics，Beijing 100191，China)

Abstract：The group aggregation approach of interval number reciprocal comparison matrix and interval number complementary comparison matrix are studied in this paper. First，some new concepts such as interval number reciprocal comparison matrix，interval number complementary comparison matrix，consistent interval reciprocal comparison matrix and consistent interval complementary comparison matrix are defined. Then，according to the consistency of comparison matrix，some simple and practical linear programming models for aggregating interval number reciprocal comparison matrix and interval number complementary comparison matrix are established. Finally，a numerical example is provided to illustrate the developed models.

Key words：reciprocal comparison matrix；complementary comparison matrix；aggregation；linear programming

一、引言

在现代大型决策中，为了体现决策的民主性和合理性，往往需要多个决策者的共同参与(即群决策)，决策者常常需要对决策方案进行两两比较构造判断矩阵。目前判断矩阵的形式有两种：互反判断矩阵和互补判断矩阵。在实际的决策过程中，由于决策问题的复杂性及人们思维能力、知识结构和知识水平的局限性，单一准则下，决策者对方案进行两两比较的重要性强度常常不能做出确定、一致的判断，在这种情况下，决策者的思维判断用区间数来反映更合理。

自从 Satty 和 Vargas 提出不确定区间数判断矩阵偏好信息[1]以来，有很多学者[2][3][4][5]对此进行了研究。薛定宇，陈阳泉等学者研究区间数互反判断矩阵的权重时，通过建立模糊规划，求解权重。[6][7]徐泽水提出了行和归一法。[8]吴江根据误差传递理论以及 OWA 算子，对区间互补判断矩阵进行排序。[9]以上文献仅局限于单一形式判断矩阵的处理。朱建军研究两类不确定判断矩阵的集结，采用 UOWA 算子将群偏好集结为区间数互反和互补形式，进而提出基于模糊规划的二阶段集结模型。[10]但方法比较复杂，没有考虑到每种形式判断矩阵的一致性问题。为此，笔者提出了基于区间互反和互补判断矩阵一致性的线性规划方法，用来集结区间互反和互补判断矩阵。算例分析表明算法合理有效。

收稿日期：2008－09－22
作者简介：杜俊慧(1976－)，女，山西太谷人，讲师，博士研究生，研究方向为多目标决策、综合评价理论方法.

二、基本概念

定义 1：称 $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互反判断矩阵。其中：$\widetilde{a}_{ij}=[a_{ij}^-,a_{ij}^+]$；$\widetilde{a}_{ji}=[a_{ji}^-,a_{ji}^+]$；$a_{ij}^-a_{ji}^+=a_{ij}^+a_{ji}^-=1$；$a_{ij}^+\geqslant a_{ij}^->0$；$a_{ii}^+a_{ii}^-=1$。

定义 2：称区间数互反判断矩阵具有完全一致性，若 $a_{ij}^-\leqslant\omega_i/\omega_j\leqslant a_{ij}^+$，$i,j=1,2,\cdots,n$，其中：$\omega_i$ 为判断矩阵的权重，$\omega_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$。

定义 3：称判断矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{R}}=(\widetilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互补判断矩阵。其中：$\widetilde{r}_{ij}=[r_{ij}^-,r_{ij}^+]$；$r_{ij}^+\geqslant r_{ij}^->0$；$\widetilde{r}_{ji}=[1-r_{ij}^+,1-r_{ij}^-]$；$r_{ii}^+r_{ii}^-=0.5$。

定义 4：称区间数互补判断矩阵具有完全一致性，若 $r_{ij}^-\leqslant\dfrac{\omega_i}{\omega_i+\omega_j}\leqslant r_{ij}^+$，$i,j=1,2,\cdots,n$，其中：$\omega_i$ 为判断矩阵的权重，$\omega_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$。

三、集结方法

假设决策者以两类不确定判断矩阵来表达其偏好信息，即区间数互反判断矩阵 $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 和区间数互补判断矩阵 $\widetilde{R}=(\widetilde{r}_{ij})_{n\times n}$。下面讨论这两类结构不同的偏好信息集结方法。

设决策者采用区间数互反判断矩阵 $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 表达其偏好信息，ω_i 为判断矩阵 $\widetilde{A}$ 的权重，当 $\widetilde{A}$ 具有一致性时，由定义 2 得

$$a_{ij}^-\leqslant\omega_i/\omega_j\leqslant a_{ij}^+\tag{1}$$

若决策者采用区间数互补判断矩阵 $\widetilde{R}=(\widetilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 表达其偏好信息，ω_i 为判断矩阵 $\widetilde{A}$ 的权重，当 $\widetilde{R}$ 具有一致性时，根据定义 4，有

$$r_{ij}^-\leqslant\frac{\omega_i}{\omega_i+\omega_j}\leqslant r_{ij}^+\tag{2}$$

当区间数互反判断矩阵 $\widetilde{A}=(\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 和区间数互补判断矩阵 $\widetilde{R}=(\widetilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 集结时，为了区间数互反和互补判断矩阵同时都满足一致性，就要求判断矩阵的权重 ω_i：

$$\begin{gathered}a_{ij}^-\omega_j\leqslant\omega_i\leqslant a_{ij}^+\omega_j\\ r_{ij}^-(\omega_i+\omega_j)\leqslant\omega_i\leqslant r_{ij}^+(\omega_i+\omega_j)\end{gathered}\tag{3}$$

由于 ω_i 是一个区间数，基于式(1)～式(3)，可建立两个线性规划模型：

$$\begin{aligned}&\omega_i^-=\min\omega_i\\ \text{s.t.}:&\omega_i\geqslant a_{ij}^-\omega_j,\omega_i\leqslant a_{ij}^+\omega_j,\\ &i=1,2,\cdots,n-1;j=i+1,\cdots,n,\\ &\omega_i\geqslant r_{ij}^-(\omega_i+\omega_j),\omega_i\leqslant r_{ij}^+(\omega_i+\omega_j)\\ &i=1,2,\cdots,n-1;\ j=i+1,\cdots,n,\\ &\omega_i>0,i=1,2,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\omega_i^+=\max\omega_i\\ \text{s.t.}:&\omega_i\geqslant a_{ij}^-\omega_j,\omega_i\leqslant a_{ij}^+\omega_j,\\ &i=1,2,\cdots,n-1;j=i+1,\cdots,n,\\ &\omega_i\geqslant r_{ij}^-(\omega_i+\omega_j),\omega_i\leqslant r_{ij}^+(\omega_i+\omega_j)\\ &i=1,2,\cdots,n-1;\ j=i+1,\cdots,n,\\ &\omega_i>0,i=1,2,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1\end{aligned}\tag{5}$$

当决策者给出的区间互反和互补数互反判断矩阵不一定同时满足一致性，即式(1)和式(2)不一定成立，需要加入偏离度，从而有：

$$\begin{gathered}a_{ij}^-\omega_j-s_{ij}^-\leqslant\omega_i\leqslant a_{ij}^+\omega_j+s_{ij}^+\\ r_{ij}^-(\omega_i+\omega_j)-t_{ij}^-\leqslant\omega_i\leqslant r_{ij}^+(\omega_i+\omega_j)+t_{ij}^+\end{gathered}\tag{6}$$

其中：$s_{ij}^-\geqslant0$；$s_{ij}^+\geqslant0$；$t_{ij}^-\geqslant0$；$t_{ij}^+\geqslant0$。如果 $s_{ij}^-=s_{ij}^+=0$，$t_{ij}^-=t_{ij}^+=0$，式(6)就等于式(3)。

显然，偏离度 $s_{ij}^-,s_{ij}^+,t_{ij}^-,t_{ij}^+$，越小，区间数判断矩阵越接近一致，所以可构造线性规划模型：

$$\begin{aligned}&J=\min\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(s_{ij}^-+s_{ij}^++t_{ij}^-+t_{ij}^+)\\ \text{s.t.}:&\omega_i\geqslant a_{ij}^-\omega_j-s_{ij}^-,\omega_i\leqslant a_{ij}^+\omega_j+s_{ij}^+,\\ &i=1,2,\cdots,n-1;\ j=i+1,\cdots,n,\\ &\omega_i\geqslant r_{ij}^-(\omega_i+\omega_j)-t_{ij}^-,\omega_i\leqslant r_{ij}^+(\omega_i+\omega_j)+t_{ij}^+,\\ &i=1,2,\cdots,n-1;\ j=i+1,\cdots,n,\\ &\omega_i>0,i=1,2,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i=1\end{aligned}\tag{7}$$

基于模型的优化偏离度 s_{ij}^{-*}，s_{ij}^{+*}，t_{ij}^{-*}，t_{ij}^{+*}，可以建立以下模型：

$$\begin{aligned}&\omega_i^-=\min\omega_i\\ \text{s.t.}:&\omega_i\geqslant a_{ij}^-\omega_j-s_{ij}^{-*},\omega_i\leqslant a_{ij}^+\omega_j+s_{ij}^{+*},\\ &i=1,2,\cdots,n-1;\ j=i+1,\cdots,n,\\ &\omega_i\geqslant r_{ij}^-(\omega_i+\omega_j)-t_{ij}^{-*},\omega_i\leqslant r_{ij}^+(\omega_i+\omega_j)+t_{ij}^{+*},\\ &i=1,2,\cdots,n-1;\ j=i+1,\cdots,n,\end{aligned}$$

$$\omega_i > 0, i = 1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \qquad (8)$$

$$\omega_i^+ = \max \omega_i$$

$$\text{s.t.}: \omega_i \geqslant a_{ij}^- \omega_j - s_{ij}^{-*}, \omega_i \leqslant a_{ij}^+ \omega_j + s_{ij}^{+*},$$
$$i = 1,2,\cdots,n-1;\ j = i+1,\cdots,n,$$
$$\omega_i \geqslant r_{ij}^-(\omega_i + \omega_j) - t_{ij}^{-*}, \omega_i \leqslant r_{ij}^+(\omega_i + \omega_j) + t_{ij}^{+*},$$
$$i = 1,2,\cdots,n-1;\ j = i+1,\cdots,n,$$
$$\omega_i > 0, i = 1,2,\cdots,n, \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \qquad (9)$$

由式(8)和式(9)组成的模型是为了集结区间数互反和互补判断矩阵所建立的线性规划模型,通过求解该模型,可以得到各个方案的排序向量 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}, \omega_i \in [\omega_i^-, \omega_i^+]$,根据大小,可以进行相应的方案排序。

四、算例

假设 $m(m > 2)$ 个决策者对方案集 $X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ 分别给出区间数互反判断矩阵和区间数互补判断矩阵两种形式的判断,根据 UOWA 进行集结,将 m 个区间数判断矩阵集结为两个判断矩阵①,得

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{4\times4} = \begin{bmatrix} 1 & [1,3] & [1/3,1] & [1/3,1] \\ [1/3,1] & 1 & [1/4,1/2] & [1/5,1/3] \\ [1,3] & [2,4] & 1 & [1/2,1] \\ [1,3] & [3,5] & [1,2] & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{4\times4} = \begin{bmatrix} 0.5 & [0.4,0.6] & [0.4,0.5] & [0.3,0.5] \\ [0.4,0.6] & 0.5 & [0.3,0.5] & [0.3,0.4] \\ [0.5,0.6] & [0.5,0.7] & 0.5 & [0.3,0.5] \\ [0.5,0.7] & [0.6,0.7] & [0.5,0.7] & 0.5 \end{bmatrix}$$

步骤 1. 首先利用模型(7)进行一致性检验得 $J^* = 0.026\,9$,优化的偏离度:

$$s_{ij}^{-*} = s_{ij}^{+*} = 0, i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,3,4,$$
$$t_{12}^{-*} = t_{12}^{+*} = 0, t_{13}^{-*} = t_{13}^{+*} = 0,$$
$$t_{14}^{-*} = t_{14}^{+*} = 0, t_{23}^{-*} = t_{23}^{+*} = 0,$$
$$t_{24}^{-*} = 0.026\,9, t_{24}^{+*} = 0, t_{34}^{-*} = t_{34}^{+*} = 0,$$

步骤 2. 基于优化偏离度 $s_{ij}^{-*}, s_{ij}^{+*}, t_{ij}^{-*}, t_{ij}^{+*}$,代入模型(8)和(9)得:

$$\tilde{\omega}_1 = [0.171\,4, 0.272\,7], \tilde{\omega}_2 = [0.128\,5, 0.128\,7],$$
$$\tilde{\omega}_3 = [0.288\,5, 0.289\,2], \tilde{\omega}_4 = [0.389\,5, 0.389\,9],$$

步骤 3. 基于可能度,比较区间权重的大小,根据文献[11]的方法得到相应的方案排序即群体决策的结果为 $X_4 \overset{1}{\succ} X_3 \overset{1}{\succ} X_1 \overset{1}{\succ} X_2$。

五、结束语

在多人参与的决策过程中,由于客观事物的复杂性及人们思维能力、知识结构和知识水平的局限性,决策者对方案进行两两比较的重要性常常不能作出确定的判断,需要采用区间互反或者互补判断矩阵的形式。因此,迫切需要研究基于多种不同结构的区间偏好信息集结方法。对此,笔者提出了基于一致性的线性规划集结方法。该方法能处理区间数互反判断矩阵和区间数互补判断矩阵两种形式,应用简单,有较大的实用价值。

注释:

① 具体过程参见朱建军。群决策中两类不确定偏好信息的集结方法研究。控制与决策,2006 年第 8 期,第 879 到 882 页。

参考文献:

[1] Satty T L, Vargas L. Uncertainty and Rank Order in the Analytic Hierarchy Process[J]. European Journal of Operational Research, 1987,(32): 107-117.

[2] Arbel A. Approximate Articulation of Preference and Priority Derivation[J]. EuropeanJournal of Operational Research,1989,(43): 317-326.

[3] Arbel A, VargasL G. Preference Simulation and Preference Programming: Robustness Issues in Priority Derivation[J]. European Journal of Operational Research, 1993,(69): 200-209.

[4] Islam R, Biswal M P, Alam S S. Preference Programming and Inconsistent Interval Judgements[J]. EuropeanJournal of Operational Research, 1997,(97): 53-62.

[5] Wang Y M, Yang J B, Xu D L. A Two-stage Logarithmic Goal Programming Methodfor Generating Weightsfrom Interval Comparison Matrices[J]. Fuzzy Set and Systems,2005,(152): 475-498.

[6] 薛定宇, 陈阳泉. 系统仿真技术与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002. 192-309.

[7] Azizur Rahman M, Mahinda Vilathgamuwa D, Nasir Uddin M, et al. Nonlinear Control of Interior Permanentmagnet Synchronous Motor[J]. IEEE Trans on Industry Applications, 2003, 39(2): 408-416.

[8] 徐泽水. 区间数互补判断矩阵排序的一种实用性方法[J]. 运筹与管理, 2001,10(1): 16-19.

[9] 吴江. 群组区间数互补判断矩阵偏好信息的一种集结方法[J]. 系统工程理论方法应用, 2004, 13(6): 500-503.

[10] 朱建军. 群决策中两类不确定偏好信息的集结方法研究[J]. 控制与决策,2006,21(8):879-882.

[11] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. 105-107.