http://bhxb.buaa.edu.cn jbuaa@buaa.edu.cn
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2015.0181

基于降维算法和 Edgeworth 级数的结构可靠性分析

孟广伟, 冯昕宇, 李锋*, 周立明

(吉林大学 机械科学与工程学院, 长春 130025)

摘 要: 针对工程实际中存在功能函数为隐式或高维非线性的复杂结构,本文提出了一种基于降维算法和 Edgeworth 级数的可靠性分析方法。利用降维算法将 n 维函数展开为 n 个一维函数,经变量转换后变量都相互独立且服从均值为0、方差为0.5的正态分布,再结合 Gauss-Hermite 积分方法计算出一维函数的原点矩,从而得到结构功能函数的中心矩,将所得的矩信息应用到 Edgeworth 级数展开式中,给出功能函数的累积分布函数表达式,计算得到结构的失效概率。该方法避免了功能函数对变量梯度的要求,仅需少量的确定性重分析计算。数值算例结果表明了本方法的有效性和正确性。

关 键 词: 结构可靠性; 降维算法; Gauss-Hermite 数值积分; Edgeworth 级数; 矩方法
中图分类号: TB114.3
文献标识码: A **文章编号**: 1001-5965(2016)03-0421-05

结构可靠性[1-3]是工程领域内研究的重点内容之一。结构中的几何参数、材料属性、强度和载荷等都可视为结构的基本随机变量。失效概率 P_f 是结构可靠性分析的重要指标之一。现今已有很多方法用于求解失效概率,例如传统的一次二阶矩方法(First-Order Reliability Method, FORM)[4]和二次二阶矩方法(Second-Order Reliability Method, SORM)[5]、蒙特卡罗模拟(Monte Carlo Simulation, MCS)方法[6]以及响应面方法(Response Surface Method, RSM)[7]等。在利用上述方法计算时,MCS 法简单易行、精度高,对求解没限制,但计算量相当大,耗时过长;FORM 和 SORM 存在迭代收敛慢甚至不收敛,对功能函数为隐式的问题计算困难,难于求解变量的导数;RSM 法对于非线性程度较高的工程实际问题则需要进行多次迭代,而且固定的函数形式也会影响其逼近精度。

Rahman[8]和 Cho[9]等提出的降维算法(Dimension Reduction Method, DRM)避免了对功能函数梯度与矩阵的逆以及迭代最可能失效点(Most Probable failure Point, MPP)的求解,大大降低了计算工作量;Youn 等[10]指出在基于矩的积分法时,随积分点的增多,导致线性方程组的系数矩阵出现奇异性、条件数和数值结果不稳定等。

因此,本文结合单变量降维算法和 Edgeworth 级数展开法[11]进行结构的可靠性分析。采用降维算法,将功能函数分解为 n 个一维函数叠加的形式,再利用变量转换和 Gauss-Hermite 数值积分得到各一维函数的原点矩,由所得各原点矩信息获得功能函数的中心矩,再将其前四阶中心矩应用到 Edgeworth 级数展开式中,该级数无需通过参数的分布类型进行拟合,仅需通过矩信息就可拟合累积分布函数计算。

1 降维算法

假设由 n 维向量 $\boldsymbol{X}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ 来

收稿日期: 2015-03-30; **录用日期**: 2015-06-26; **网络出版时间**: 2015-09-17 16:50
网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20150917.1650.007.html
基金项目: 吉林省科技厅基金(201205001,201215048); 国家重大科学仪器设备开发专项(2012YQ030075)
* **通讯作者**: Tel.: 0431-85095843 E-mail: fengli@jlu.edu.cn

引用格式: 孟广伟, 冯昕宇, 李锋, 等. 基于降维算法和Edgeworth级数的结构可靠性分析[J]. 北京航空航天大学学报, 2016, 42(3): 421-425. MENG G W, FENG X Y, LI F, et al. Structural reliability analysis based on dimensionality reduction and Edgeworth series[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2016, 42(3): 421-425 (in Chinese).

http://bhxb.buaa.edu.cn

表达任意一个连续、可微的实值响应函数 $g(\boldsymbol{X})$，n 维函数 $g(\boldsymbol{X})$ 的降维表达式[12]为

$$g(\boldsymbol{X}) = g_0 + \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) + \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant n} g_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \cdots + \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} g_{i_1 i_2\cdots i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}) + \cdots + g_{12\cdots n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1}$$

式中：g_0 为常数；函数 $g_i(x_i)$ 为变量 x_i 单独对响应的一阶表达式；函数 $g_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ 为变量 x_{i_1} 和 x_{i_2} 对函数 $g(\boldsymbol{X})$ 的共同影响的二阶表达式；$g_{i_1 i_2\cdots i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k})$ 则体现着前 k 阶项共同对 $g(\boldsymbol{X})$ 的影响；最后一项 $g_{12\cdots n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 包含了所有变量共同对响应函数的影响。

选取随机变量空间中的任意一个参考点 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$，若只考虑式(1)中的一阶项，由式(1)可得到下列分量函数的关系式：

$$g_0 = g(\boldsymbol{c}) \tag{2}$$

$$g_i(x_i) = g_i - g_0 \tag{3}$$

式中：$g_i = g(c_1, c_2, \cdots, c_{i-1}, x_i, c_{i+1}, c_{i+2}, \cdots, c_n)$。文献[12]研究表明参考点 $\boldsymbol{c}$ 的最佳选择为变量的均值，因此令 $\boldsymbol{c} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$，则单变量降维表达式可写为

$$g(\boldsymbol{X}) \approx \sum_{i=1}^{n} g_i - (n-1) g_0 \tag{4}$$

由二项式展开定理和统计矩定义知，n 维函数 $g(\boldsymbol{X})$ 的 k 阶原点矩公式[13]为

$$m_g^{(k)} = E\{[g(\boldsymbol{X})]^k\} \approx \sum_{l=0}^{k} C_k^l E\left\{\left[\sum_{i=1}^{n} g_i - (n-1) g_0\right]^k\right\} = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \sum_{i_1=1}^{l} C_l^{i_1} m_{g_1}^{i_1} \sum_{i_2=2}^{i_1} C_{i_1}^{i_2} m_{g_2}^{i_2} \cdots \sum_{i_j=j}^{i_{j-1}} C_{i_{j-1}}^{i_j} m_{g_j}^{i_j} \cdots \times \sum_{i_n=n}^{i_{n-1}} C_{i_{n-1}}^{i_n} m_{g_n}^{i_{n-1}-i_n} \times [-(n-1) g_0]^{k-l} \tag{5}$$

式中：$C_k^l = \dfrac{k!}{l!\ (k-l)!}$ 为式(5)的二项式展开系数；$m_{g_i}^q = E\{[g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \cdots, \mu_n)]^q\}$，$E\{\cdot\}$ 为期望算子，q 为原点矩的阶数。

当随机变量 x_i 的概率密度函数为 $f(x_i)$ 时，一维函数 $g_i(\boldsymbol{X})$ 的原点矩可以表示为

$$m_{g_i}^{(k)} = E\{[g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \cdots, \mu_n)]^k\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \cdots, \mu_n)]^k f(x_i)\, \mathrm{d}x_i \tag{6}$$

2 变量转换

由于直接用积分计算式(6)会导致较大误差且为提高其计算精度，一维函数的积分表达式，通常可以运用传统的数值积分公式进行计算求解，但积分结果有误差。本文中将各变量均转换为服从 $N(0, 0.5)$（均值为 0，方差为 0.5）的正态分布的变量。基于等概率变换原理，将一组任意分布类型且相互独立的向量 $\boldsymbol{X} = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^{\mathrm{T}}$ 转换成一组服从正态分布的向量 $\boldsymbol{U} = [u_1\ u_2\ \cdots\ u_n]^{\mathrm{T}}$。经转换后可得

$$u_i = t(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i)] \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

式中：$\Phi^{-1}[\cdot]$ 为标准正态分布的累积分布函数；$F_{x_i}(x_i)$ 为随机变量 x_i 的累积分布函数。转换后的概率密度函数 $f_{U_i}(u_i)$ 和累积分布函数 $F_{U_i}(u_i)$ 的公式分别为

$$f_{U_i}(u_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u_i^2} \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

$$F_{U_i}(u_i) = \Phi(\sqrt{2} u_i) \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

将式(7)和式(8)代入到式(6)中，利用 Gauss-Hermite 数值积分，则一维函数 $g_i(x_i) = g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \cdots, \mu_n)$ 的原点矩表达式可表示为

$$m_{g_i}^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \{[g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \cdots, \mu_n)]^k\} f(x_i)\, \mathrm{d}x_i = \int_{-\infty}^{\infty} \{[g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, x_i, \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \cdots, \mu_n)]^k\} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x_i^2} \mathrm{d}x_i \approx \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n \sum_{i=1}^{k_i} \omega_i [g(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{i-1}, t^{-1}(u_i), \mu_{i+1}, \mu_{i+2}, \cdots, \mu_n)]^k \tag{10}$$

式中：ω_i 为高斯权重。由式(6)得到一维函数的各阶原点矩，再将其代入式(5)，可计算出 n 维函数 $g(\boldsymbol{X})$ 的各阶原点矩。

3 Edgeworth 级数

式(5)得到功能函数的统计矩后，可根据矩信息拟合功能函数的累积分布函数。相应的方法有：Pearson 系统[14]，鞍点近似法[15]，增广 β 和 λ 分布等。由于 Pearson 系统在拟合过程中因分布类型的区别在区域边界取值不同，导致数值解不稳定；鞍点近似法计算在数值过程中存在奇异性；增广 β 和 λ 分布仅适用于中低度可靠性水平的单峰概率密度函数的近似，且不能准确估计失效概率小于 0.01 的情况在鞍点近似的数值过程中

http://bhxb.buaa.edu.cn

存在奇异性等[12]。因而本文采用 Edgeworth 级数,其仅通过功能函数的矩信息,便可拟合其分布函数。

由 Edgeworth 级数展开法知,功能函数的累积分布函数 $F(g)$ 可表示为

$$F(g)=\Phi(\bar{g})-\frac{1}{3!}\cdot\frac{\mu_g^3}{(\sqrt{\mu_g^2})^3}\Phi^{(3)}(\bar{g})+\cdots+\frac{1}{4!}\left[\frac{\mu_g^4}{(\sqrt{\mu_g^2})^4}-3\right]\Phi^{(4)}(\bar{g})+\cdots+\frac{10}{6!}\left[\frac{\mu_g^3}{(\sqrt{\mu_g^2})^3}\right]^2\Phi^{(6)}(\bar{g})-\cdots \tag{11}$$

式中:$\bar{g}$ 为已标准化的功能函数;$\Phi(\bar{g})$ 和 $\Phi^{(i)}(\bar{g})$ 分别为标准正态分布函数及其 i 阶偏导函数;μ_g^2、μ_g^3 和 μ_g^4 分别为 n 维函数 $g(\boldsymbol{X})$ 的第 2、第 3 和第 4 阶中心矩:

$$\begin{cases}\mu_g^2=m_g^2\\ \mu_g^3=\dfrac{m_g^3-3m_g^2m_g^1+2(m_g^3)^3}{[m_g^2-(m_g^1)^2]^{\frac{3}{2}}}\\ \mu_g^4=\dfrac{m_g^4-4m_g^3m_g^1+6m_g^2(m_g^1)^2-3(m_g^1)^4}{[m_g^2-(m_g^1)^2]^2}\end{cases} \tag{12}$$

式中:m_g^2、m_g^3 和 m_g^4 分别为功能函数的第 2、第 3 和第 4 阶原点矩,g 为功能函数。

将式(12)代入式(11)便可通过计算得到结构的失效概率。其算法流程如图 1 所示。

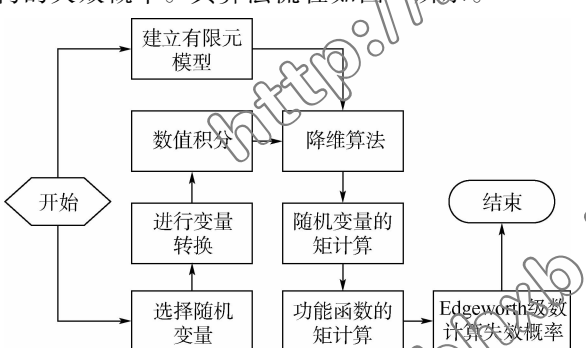


图 1　结构失效概率计算流程图

Fig. 1　Calculation flowchart of structural failure probability

4　数值算例

4.1　算例 1

已知非线性极限状态方程 $g=567fr-0.5H^2$,f 和 r 服从正态分布,$f\sim N(0.6,0.0786^2)$,$r\sim N(2.18,0.285\,58^2)$,随机变量 H 服从对数正态分布,其均值为 32.8,变异系数为0.03,计算极限状态方程的失效概率。

表 1 为算例 1 的失效概率计算结果。由表 1 可知,应用本文方法计算的结果与 MCS 方法吻合较好,具有较高的计算精度。功能函数无需对随机变量进行梯度求解,本文方法的相对误差为 7.3%,体现了本文方法的正确性和高效性。

表 1　算例 1 的失效概率计算结果

Table 1　Calculation results of failure probability for Example 1

方法	失效概率	相对误差/%	样本数
MCS	0.028 0		10^7
FORM	0.023 0	20.1	39
SORM	0.025 2	12.5	15
本文方法	0.026 7	7.3	9

4.2　算例 2

平面十杆桁架结构如图 2 所示。泊松比 $\mu=0.3$;弹性模量 $E=2.1\times10^{11}$ Pa;材料密度 $\rho=7.8\times10^3$ kg/m^3;许用应力 $[\sigma]=160$ MPa;$P_1=750$ kN,$P_2=950$ kN,$P_3=950$ kN,杆①~杆⑥各杆件长度均为 3.6 m,面积均为 $A_1=0.03$ m^2;杆⑦~杆⑩面积均为 $A_2=0.02$ m^2。节点 5 和节点 6 处施加平面约束,在节点 4 处施加竖直向下载荷 P_1,节点 2 处同时施加竖直方向载荷 P_2 和水平方向载荷 P_3,参数统计特征列于表 2。节点 2 处的垂直位移 $\Delta\leqslant0.008$ m,可得到功能函数为

$$g=0.008-\Delta \tag{13}$$

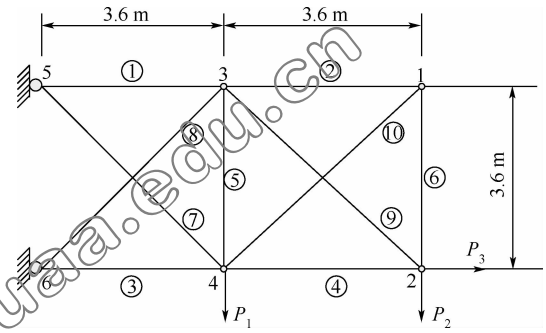


图 2　平面十杆桁架结构

Fig. 2　Structure of ten plane truss

表 2　十杆桁架参数统计特征

Table 2　Parametric statistical characteristics of ten truss

随机变量	参数统计特征				
	分布类型	均值/kN	变异系数	偏态系数	峰度系数
P_1	对数正态	750	0.10	0.301 4	3.163 1
P_2	对数正态	950	0.12	0.362 5	3.235 1
P_3	正态	950	0.11	0	3

依据图 1 所示的算法流程,首先明确随机变量的分布类型,对其进行变量转换,选取高斯点的个数,该算例中 3 个随机变量,每个变量选用 3 个高斯点,再调用桁架结构的有限元程序,即获得节点 2 处垂直方向的最大位移的 9 个样本,利用样本计算出 3 个一维函数的原点矩,进而得到功能

http://bhxb.buaa.edu.cn

函数的前 4 阶原点矩,通过式(12)可得功能函数的前 4 阶中心矩,将中心矩作为系数代入式(11),可得节点 2 处垂直方向最大位移累积分布函数和最终的失效概率。该算例方法实现简单,仅通过 9 个样本来拟合隐式功能函数的累积分布函数(CDF),图 3 为本文方法与 MCS 法对比的累积分布函数图,体现该方法与 MCS 法吻合较好。

计算结果列于表 3,与 FORM 和 SORM 相比,本文样本数为 9,耗时仅用 2.891 358 s;本文方法的相对误差仅为 0.77%,明显低于 FORM 的 8.77% 与 SORM 的 12.99%。验证了模型的正确性和高效性。

表 3 算例 2 的失效概率计算结果

Table 3 Results of failure probability for Example 2

方法	失效概率 $P_f/10^{-4}$	相对误差/%	样本	耗时/s
MCS	6.000 0		10^5	310 440 000
FORM	6.526 2	8.77	15	6.338 395
SORM	6.779 9	12.99	15	4.697 708
本文方法	6.046 3	0.77	9	2.891 358

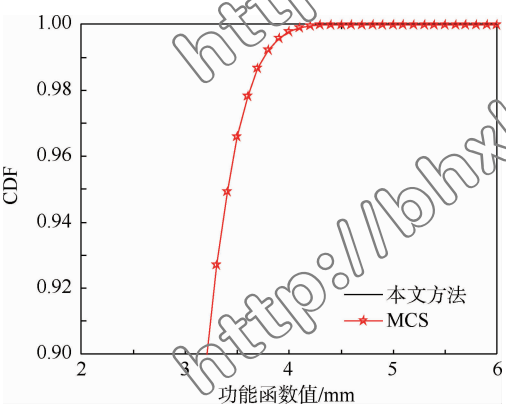


图 3 功能函数的累积分布

Fig. 3 Cumulative distribution of performance function

5 结 论

本文提出了一种结合降维算法和 Edgeworth 级数的结构可靠性分析方法。

1) 运用降维算法使得高维积分运算的工作量大大减少,利用 Edgeworth 级数方法拟合功能函数的累积分布函数。

2) 解决了功能函数为隐式或高维非线性的复杂结构失效概率的计算问题。

3) 高效且稳定地降低了计算成本,算法流程简单,易于编程。具有收敛速度快、计算次数少和可以处理复杂结构可靠性分析问题等优点。

参考文献 (References)

[1] 马小兵,任宏道,蔡义坤. 高温结构可靠性分析的时变响应面法[J]. 北京航空航天大学学报,2015,41(2):198-202.
MA X B,REN H D,CAI Y K. Time-varying response surface method for high-temperature structural reliability analysis[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2015,41(2):198-202(in Chinese).

[2] 许孟辉,邱志平. 结构模糊非概率混合可靠性分析方法[J]. 北京航空航天大学学报,2014,40(2):222-228.
XU M H,QIU Z P. Reliability analysis of structures with fuzzy and non-probabilistic hybrid variables[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2014,40(2):222-228(in Chinese).

[3] MOJSILOVIĆ N,STEWART M G. Probability and structural reliability assessment of mortar joint thickness in load-bearing masonry walls[J]. Structural Safety,2015,52:209-218.

[4] HUANG X Y,ALIABADI M H. A boundary element method for structural reliability[J]. Key Engineering Materials,2015,627:453-456.

[5] LOW B K,PHOON K K. Reliability-based design and its complementary role to Eurocode 7 design approach[J]. Computers and Geotechnics,2015,65:30-44.

[6] CHOI M J,CHO H,CHOI K K,et al. Sampling-based RBDO of ship hull structures considering thermo-elasto-plastic residual deformation[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines,2015,43(2):183-208.

[7] SHI X,TEIXEIRA A P,ZHANG J,et al. Structural reliability analysis based on probabilistic response modelling using the maximum entropy method[J]. Engineering Structures,2014,70:106-116.

[8] RAHMAN S,XU H. A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics[J]. Probabilistic Engineering Mechanics,2004,19(4):393-408.

[9] CHO H,BAE S,CHOI K K,et al. An efficient variable screening method for effective surrogate models for reliability-based design optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization,2014:50(5):717-738.

[10] YOUN B D,XI Z,WANG P. Eigenvector dimension reduction (EDR) method for sensitivity-free probability analysis[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization,2008,37(1):13-28.

[11] KONG C,SUN Z,NIU X,et al. Moment methods for C/SiC woven composite components reliability and sensitivity analysis[J]. Science and Engineering of Composite Materials,2014,21(1):121-128.

[12] LI G,ZHANG K. A combined reliability analysis approach with dimension reduction method and maximum entropy method[J] Structural and Multidisciplinary Optimization,2011,43(1):121-143.

[13] ZHANG X F,PANDEY M D,ZHANG Y M. A numerical method for structural uncertainty response computation[J]. Science China Technological Sciences,2011,54(12):3347-3357.

[14] ANDREEV A,KANTOO A,MALO P. Computational examples of a new method for distribution selection in the Pearson system[J]. Journal of Applied Statistics,2007,34(4):487-506.

[15] SU G,YU B,XIAO Y,et al. Gaussian process machine-learning

http://bhxb.buaa.edu.cn

method for structural reliability analysis[J]. Advances in Structural Engineering,2014,17(9):1257-1270.

作者简介:

孟广伟　男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:疲劳与断裂,结构可靠性。
Tel.:0431-85095834
E-mail:mgw@jlu.edu.cn

冯昕宇　女,博士研究生。主要研究方向:结构可靠性。
Tel.:0431-85095834
E-mail:fxy120884766@163.com

李锋　男,博士,副教授。主要研究方向:疲劳与断裂。
Tel.:0431-85095834
E-mail:fengli@jlu.edu.cn

Structural reliability analysis based on dimensionality reduction and Edgeworth series

MENG Guangwei, FENG Xinyu, LI Feng*, ZHOU Liming

(School of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract: A reliability analysis method based on the dimension reduction algorithm and the Edgeworth series was proposed to treat the complicate structures with implicit and high dimensional nonlinear limit state functions in practical engineering. By utilizing the dimension reduction method, the n-dimensional function was expanded to n unidimensional functions and the random variable were made to subject to the independent normal distribution with mean value being zero and variance deviation being 0.5 by means of the variable transformation. The origin moments of the unidimensional functions were obtained after the Gauss-Hermite integration. In this case, the central moments of the limit state function of the structure were achieved successfully and applied to the Edgeworth series expanding expressions, from which the cumulative distribution function of the limit state function could be generated and finally the probability of failure could be obtained. Avoiding gradient computation, the proposed method requires less definite reanalysis and is proved to be effective and correct via numerical examples.

Key words: structural reliability; dimension reduction method; Gauss-Hermite numerical integration; Edgeworth series; moment method

http://bhxb.buaa.edu.cn

Received: 2015-03-30; **Accepted**: 2015-06-26; **Published online**: 2015-09-17 16:50

URL: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20150917.1650.007.html

Foundation items: Foundation of Jilin Provincial Science & Technology Department (201205001, 201215048); National Key Scientific Instrument and Equipment Development Projects of China (2012YQ030075)

* **Corresponding author**. Tel.: 0431-85095834　E-mail: fengli@jlu.edu.cn