http://bhxb.buaa.edu.cn jbuaa@buaa.edu.cn
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2016.0414

# 基于 PCH 模型的航天器姿态无源控制

王青[1,*], 龚立纲[1], 董朝阳[2]
(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083; 2. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

**摘 要**: 针对存在干扰力矩的航天器姿态控制问题,从能量角度提出一种基于端口受控哈密顿(PCH)系统模型的无源控制方法。通过将姿态控制系统表示为 PCH 形式,并增加与姿态误差积分有关的状态,利用互联和阻尼分配无源控制(IDA-PBC)方法进行控制器设计,使得闭环系统具有期望的内部互连结构关系和能量耗散特性,所提出的控制方案能保证系统的输入-状态稳定性。进一步,考虑执行器的动态特性,利用反步法对控制指令进行补偿设计,结合指令滤波技术避免对虚拟控制量高阶导数的计算,并从理论上证明了闭环系统一致最终有界。仿真结果验证了本文所提控制方法相比于单独基于无源性控制方法的性能优势。

**关 键 词**: 航天器; 姿态控制; 哈密顿系统; 无源性; 阻尼分配
**中图分类号**: TP249; V448.22
**文献标识码**: A **文章编号**: 1001-5965(2017)06-1061-11

姿态控制是航天器完成对地观测、深空探测等空间任务的重要基础环节,一直以来都受到研究人员的广泛关注[1-3]。针对航天器姿态动力学模型的控制系统设计,国内外学者主要采用反步法[4-5]、滑模控制[6-7]、反馈线性化控制[8-9]等实现,并取得了许多成果。

上述方法均基于 Lyapunov 稳定性理论。在此基础上,文献[10-11]考虑系统无源性的特点,从能量角度出发设计姿态控制律,但无源性本身只能保证系统不存在干扰时的稳定性,而航天器在轨运动会受到空间中干扰力矩的作用,同时自身的转动惯量存在非对角元素等不确定性[2,7,12],从而使得基于无源性设计的控制律难以直接应用。

由 Ortega 等[13-14]提出的互连和阻尼分配无源控制(Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control, IDA-PBC)方法结合了端口受控哈密顿(Port-Controlled Hamiltonian, PCH)系统和无源特性。由于具有物理意义直观和全局收敛特性等优点,IDA-PBC 方法在机械系统[15]、电机系统[16]、船舶定位系统[17]、功率变换系统[18]等领域得到了广泛应用,是目前控制理论领域的研究热点[19-21],但 IDA-PBC 方法在航天器姿态领域的应用还比较少见。

IDA-PBC 方法的基本思想是:将控制系统模型表示为 PCH 系统形式,利用 PCH 的互连结构矩阵和阻尼矩阵揭示出系统的内部能量交换和耗散关系,通过求解一组偏微分方程来使得闭环系统具有期望能量平衡关系的控制输入。与基于 Lyapunov 理论的设计方法相比,IDA-PBC 方法的物理含义更加直观,与期望闭环系统对应的哈密顿函数可直接作为稳定性分析的 Lyapunov 函数,在这一点上两者是等同的;与单独基于无源性的控制方法相比,IDA-PBC 通过设计阻尼矩阵,利用耗散能量的方式保证系统存在干扰时的输入-状态稳定性[22],这一点是前者难以做到的。航天器

**收稿日期**: 2016-05-18; **录用日期**: 2016-08-25; **网络出版时间**: 2016-10-17 08:45
**网络出版地址**: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20161017.0845.004.html
**基金项目**: 国家自然科学基金 (61374012)
* **通讯作者**: E-mail: bhwangqing@126.com

**引用格式**: 王青, 龚立纲, 董朝阳. 基于PCH模型的航天器姿态无源控制[J]. 北京航空航天大学学报, 2017, 43(6): 1061-1071.
WANG Q, GONG L G, DONG C Y. Spacecraft attitude passivity control based on PCH model [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2017, 43(6): 1061-1071 (in Chinese).

的姿态运动属于一类运动系统,本质上也遵循能量的物理定律,因此控制律设计同样可从能量的角度进行。

本文将 IDA-PBC 方法引入航天器的姿态控制,一方面,在 IDA-PBC 的框架下,将姿态控制模型表示为 PCH 形式,通过增加与姿态误差积分有关的状态来保证闭环系统的输入-状态稳定性;另一方面,考虑到执行器具有动态特性[23-24],利用反步法对控制指令进行补偿设计,结合指令滤波技术[25]避免了虚拟控制量高阶导数的计算,并从理论上证明了闭环系统一致最终有界。仿真结果表明,在不考虑执行器动态特性时,本文所提方法实现了存在干扰时的航天器姿态控制系统的输入-状态稳定性;在考虑执行器动态特性时,本文所提方法依旧能够保证姿态误差的收敛性,且控制性能要优于单独基于无源性的控制方法。

## 1 姿态控制模型建立

以四元数表示时,航天器的姿态运动方程可写为[3]

$$\dot{\boldsymbol{q}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{\omega}^{\times}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{\tau} \tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{q}=[q_0,q_1,q_2,q_3]^{\mathrm{T}}$ 为表示姿态的四元数;$\boldsymbol{E}$ 为由 $\boldsymbol{q}$ 组成的 $4\times3$ 矩阵;$\boldsymbol{\omega}=[\omega_x,\omega_y,\omega_z]^{\mathrm{T}}$ 为体坐标系下的角速度;$\boldsymbol{J}$ 为只包含对角元素的转动惯量阵;$\boldsymbol{\omega}^{\times}$ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 组成的反对称阵;$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 为作用在航天器上的力矩,$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$ 为执行器产生的控制力矩,$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 为由转动惯量阵非对角元素、外部干扰等引起的等效干扰力矩[3,7]。

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})$的具体组成为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}-q_1 & -q_2 & -q_3\\ q_0 & -q_3 & q_2\\ q_3 & q_0 & -q_1\\ -q_2 & q_1 & q_0\end{bmatrix} \tag{3}$$

$\boldsymbol{\omega}^{\times}$的具体组成为

$$\boldsymbol{\omega}^{\times}=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix} \tag{4}$$

取状态变量 $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega}$,$\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{q}$,哈密顿函数取为 $H(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1/2$,则式(1)和式(2)可写为如下 PCH 形式:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^{\times} & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)/2\\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)/2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\frac{\partial H(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{\tau} \tag{5}$$

式中:$\boldsymbol{x}_1^{\times}$ 为 $\boldsymbol{x}_1$ 组成的反对称阵;$\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 分别为适当维数的单位矩阵和零矩阵。

控制的目的是使系统式(5)在平衡点 $\boldsymbol{x}_0=[\boldsymbol{x}_{1,0}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_{2,0}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 处稳定,$\boldsymbol{x}_{1,0}=[0,0,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}_{2,0}$为目标姿态四元数。

给出如下合理假设。

**假设 1** $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 是连续有界的,即存在未知常数 $\Delta_{\mathrm{d}}>0$,使得$\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|\leqslant\Delta_{\mathrm{d}}$。

进一步,在推导控制器之前,给出以下定义和引理。

**定义 1**[26] 对于系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$,如果存在一个$\mathcal{KL}$类函数 $\beta$ 和一个$\mathcal{K}$类函数 $\gamma$,使得对于任何初始状态 $\boldsymbol{x}(t_0)$和有界输入 $\boldsymbol{u}(t)$,都有

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\beta(\|\boldsymbol{x}(t_0)\|,t-t_0)+\gamma\left(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|\boldsymbol{u}(s)\|\right)$$

那么系统是输入-状态稳定的。

**引理 1**[26] 对于系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$,设 $V$ 是连续可微函数,满足:

$$\alpha_1(\|\boldsymbol{x}\|)\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\alpha_2(\|\boldsymbol{x}\|)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\leqslant-W_3(\boldsymbol{x})\qquad\forall\|\boldsymbol{x}\|\geqslant\rho(\|\boldsymbol{u}\|)>0$$

式中:$\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 为$\mathcal{K}_\infty$类函数;$\rho$ 为$\mathcal{K}$类函数;$W_3(\boldsymbol{x})$为连续正定函数。则系统是输入-状态稳定的。

假设 1、定义 1 和引理 1 中的范数可以是任何一种范数,在本文后续的分析中统一取为 2-范数,即范数的表示符号为$\|\cdot\|_2$。

## 2 IDA-PBC 姿态控制器设计

由于干扰力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 的存在,在利用 IDA-PBC 设计控制器时,将 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$ 拆分成两部分,即 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$,$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}$为调节控制器,保证在 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 为零时系统的渐近稳定;$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$为积分控制器,保证存在干扰时系统的输入-状态稳定性。

### 2.1 调节控制器设计

在 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}$作用下,定义期望的闭环系统如下:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^{\times} & -\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)/2\\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)/2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right\}\cdot\frac{\partial H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}) \tag{6}$$

式中:$\boldsymbol{D}_1$ 为选取的正定矩阵,表示注入的阻尼项;$H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})$为期望的哈密顿函数。为保证系统在 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 为零时渐近稳定,$H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})$应在 $\boldsymbol{x}_0$ 处取极小值。选取 $H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})=[\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})]/2$,$\boldsymbol{M}$ 为正定矩阵,则匹配方程为

http://bhxb.buaa.edu.cn

$$\boldsymbol{x}_1^{\times}\frac{\partial H(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1}-(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)/2)\frac{\partial H(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_2}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}=(\boldsymbol{x}_1^{\times}-\boldsymbol{D}_1)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1}-(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)/2)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_2} \tag{7}$$

$$(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)/2)\frac{\partial H(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1}=(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)/2)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \tag{8}$$

对于所选择的 $H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})$,式(8)恒成立,由式(7)可解得

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}=-\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})/2 \tag{9}$$

当 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 为零时,取 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$ 为零,系统式(6)的 Lyapunov 函数为 $V_1=H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})$,则有

$$\dot{V}_1=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}[\boldsymbol{x}_1^{\times}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})/2]+(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}[\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1/2]=-\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1\leqslant 0 \tag{10}$$

根据 LaSalle 不变原理,由 $\dot{V}_1=0\Rightarrow\boldsymbol{x}_1\equiv 0$,因此 $\dot{\boldsymbol{x}}_1\equiv 0\Rightarrow\boldsymbol{x}_2\equiv\boldsymbol{x}_{2,0}$,闭环系统渐近稳定到平衡点 $\boldsymbol{x}_0$ 处。

由上面的设计可以看出,由于只在角速度上增加了阻尼项,因此当干扰不为零时系统渐近稳定的结论不再成立。

### 2.2　积分控制器设计

在获得 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}$ 的表达式后,进一步考虑干扰力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 的作用来设计 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$,并在系统式(6)的基础上增加与姿态误差积分有关的状态。

取误差状态变量为 $\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0}$,$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 为待设计的误差状态,其表达式在后面给出,期望的闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{e}}=\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\times} & -\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)/2 & -\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\\ \bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)/2 & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{F}_1 & \boldsymbol{F}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_3\end{bmatrix}\right\}\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \tag{11}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{x}_{2,0})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)$;$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 为待设计的适当维数矩阵;$\boldsymbol{D}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_3$ 为选取的对称正定矩阵;$H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})=(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3)/2$ 为期望的哈密顿函数,$\boldsymbol{N}$ 为正定矩阵,$H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})$ 在原点处取极小值。

由 $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0}$,结合式(11)可得

$$\dot{\boldsymbol{e}}_2=\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_1}-\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_3}-\boldsymbol{D}_2\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_2} \tag{12}$$

由式(6)可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \tag{13}$$

结合式(12)和式(13)可得

$$\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1/2-\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1/2 \tag{14}$$

考虑到 $\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)=\boldsymbol{I}$,取 $\boldsymbol{F}_2=\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)$,则由式(14)可得

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})+2\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3 \tag{15}$$

进一步,由式(11)可得

$$\dot{\boldsymbol{e}}_3=\boldsymbol{F}_1\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_1}+\boldsymbol{F}_2\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_2}-\boldsymbol{D}_3\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_3}=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3 \tag{16}$$

将式(15)代入式(16)并取 $\boldsymbol{F}_1=\boldsymbol{D}_3/2$,可得

$$\dot{\boldsymbol{e}}_3=\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1/2+(\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0}) \tag{17}$$

因此有

$$\boldsymbol{e}_3=\int_0^t\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1+(\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})\right]\mathrm{d}t+\boldsymbol{e}_3(t_0) \tag{18}$$

式中:$\boldsymbol{e}_3(t_0)$ 为 $\boldsymbol{e}_3$ 的初值。

对式(15)求导可得

$$\dot{\boldsymbol{e}}_1=\dot{\boldsymbol{x}}_1+2\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})+2\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}_2+2\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{e}}_3 \tag{19}$$

由式(11)有

$$\dot{\boldsymbol{e}}_1=(\boldsymbol{e}_1^{\times}-\boldsymbol{D}_1)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_1}-(\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)/2)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_2}-\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}_3}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} \tag{20}$$

此外,由式(6)有

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1=(\boldsymbol{x}_1^{\times}-\boldsymbol{D}_1)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1}-\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_2}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} \tag{21}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)\frac{\partial H_{\mathrm{d}}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_1} \tag{22}$$

将式(17)、式(21)和式(22)代入式(19),可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}_1=&(\boldsymbol{x}_1^{\times}-\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1-(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)/2)\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}+2\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})+\\&\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1+2\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}[\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1/2+(\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2))\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})]=\\&(\boldsymbol{x}_1^{\times}-\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_3)\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1+[2\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2-(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)/2)+\\&2\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2+\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2))]\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})+\end{aligned}$$

http://bhxb.buaa.edu.cn

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} \tag{23}$$

由式(20)和式(23)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}=&(\boldsymbol{e}_1^{\times}-\boldsymbol{D}_1)\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3/2-(\boldsymbol{x}_1^{\times}-\boldsymbol{D}_1+\\&\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_3)\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{x}_1-\\&[2\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2+2\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2+\\&\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2))]\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0})\end{aligned} \tag{24}$$

### 2.3 稳定性分析

对所设计的控制器 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$,有如下定理。

**定理 1** 在 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$ 作用下,闭环系统式(11)是输入-状态稳定的;进一步,定义误差变量 $\tilde{\boldsymbol{x}}=[\tilde{\boldsymbol{x}}_1^{\mathrm{T}},\tilde{\boldsymbol{x}}_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\tilde{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_{1,0}=\boldsymbol{x}_1,\tilde{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0}$,则 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 系统也是输入-状态稳定的。

**证明** 根据2.1节和2.2节中的分析,$\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_3$ 的表达式分别为式(15)和式(18),$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_{2,0}$,则在 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$ 作用下,$\boldsymbol{e}$ 系统的状态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}}=&\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\times}&-\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)/2&-\boldsymbol{D}_3/2\\\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)/2&\boldsymbol{0}&-\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)\\\boldsymbol{D}_3/2&\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}-\right.\\&\left.\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}_2&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}_3\end{bmatrix}\right\}\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{e})}{\partial\boldsymbol{e}}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\\\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{25}$$

取 Lyapunov 函数为 $V_e=(\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3)/2$,则有

$$\begin{aligned}\dot{V}_e=&[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\quad\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}]\cdot\\&\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1^{\times}&-\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)/2&-\boldsymbol{D}_3/2\\\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)/2&\boldsymbol{0}&-\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)\\\boldsymbol{D}_3/2&\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}-\right.\\&\left.\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}_2&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{D}_3\end{bmatrix}\right\}\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{e})}{\partial\boldsymbol{e}}+\\&[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\quad\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\quad\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\\\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\\&-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2-\\&\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\end{aligned} \tag{26}$$

令 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 分别表示矩阵的最小和最大特征值,并设 $\lambda_1^m=\lambda_{\min}(\boldsymbol{D}_1)$,则有

$$-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1\leqslant-\lambda_1^m\|\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1\|_2^2 \tag{27}$$

根据 Young 不等式[26],有

$$\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\leqslant\frac{\lambda_1^m}{2}\|\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1\|_2^2+\frac{1}{2\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2 \tag{28}$$

由式(27)和式(28)可得

$$-\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\leqslant-\frac{\lambda_1^m}{2}\|\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1\|_2^2+\frac{1}{2\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2 \tag{29}$$

设 $\lambda_2^m=\lambda_{\min}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M})$,$\lambda_3^m=\lambda_{\min}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{N})$,则有

$$-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2\leqslant-\lambda_2^m\|\boldsymbol{e}_2\|_2^2 \tag{30}$$

$$-\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3\leqslant-\lambda_3^m\|\boldsymbol{e}_3\|_2^2 \tag{31}$$

由于 $\|\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1\|_2^2=\|\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}^{-1})^2\boldsymbol{e}_1\|_2\geqslant\lambda_4^m\|\boldsymbol{e}_1\|_2^2$,$\lambda_4^m=\lambda_{\min}[(\boldsymbol{J}^{-1})^2]$,因此

$$\begin{aligned}\dot{V}_e\leqslant&-\frac{\lambda_1^m\lambda_4^m}{2}\|\boldsymbol{e}_1\|_2^2-\lambda_2^m\|\boldsymbol{e}_2\|_2^2-\lambda_3^m\|\boldsymbol{e}_3\|_2^2+\\&\frac{1}{2\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2\leqslant-\lambda^m\|\boldsymbol{e}\|_2^2+\frac{1}{2\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2\end{aligned} \tag{32}$$

式中:$\lambda^m=\min\{\lambda_1^m\lambda_4^m/2,\lambda_2^m,\lambda_3^m\}$。则对 $\forall\boldsymbol{e},\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 和 $0<\theta<1$,当 $\|\boldsymbol{e}\|_2\geqslant\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2/\sqrt{2\theta\lambda^m\lambda_1^m}$ 时,有

$$\begin{aligned}\dot{V}_e\leqslant&-(1-\theta)\lambda^m\|\boldsymbol{e}\|_2^2-\theta\lambda^m\|\boldsymbol{e}\|_2^2+\frac{1}{2\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2\leqslant\\&-(1-\theta)\lambda^m\|\boldsymbol{e}\|_2^2<0\end{aligned} \tag{33}$$

由于 $V_e$ 正定且径向无界,根据引理1,系统式(11)是输入-状态稳定的,即存在$\mathcal{KL}$类函数 $\beta_1$ 和$\mathcal{K}$类函数 $\gamma_1$,使得

$$\|\boldsymbol{e}\|_2\leqslant\beta_1(\|\boldsymbol{e}(t_0)\|_2,t-t_0)+\gamma_1(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}(s)\|_2) \tag{34}$$

下面进一步证明在 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$ 作用下 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 系统的输入-状态稳定性,首先有

$$\begin{aligned}\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|_2=&\|\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3\|_2\leqslant\\&\|\boldsymbol{e}_1\|_2+\|2\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2\|_2+\\&2\|\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3\|_2\|\boldsymbol{e}_3\|_2\end{aligned} \tag{35}$$

由式(3)中 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)$ 的具体组成可得

$$\|\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2))}=1$$

因此有

$$\|2\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2\|_2\leqslant2\|\boldsymbol{J}\|_2\|\boldsymbol{D}_2\|_2\|\boldsymbol{M}\|_2\|\boldsymbol{e}_2\|_2 \tag{36}$$

定义 $\sigma=\max\{1,2\|\boldsymbol{J}\|_2\|\boldsymbol{D}_2\|_2\|\boldsymbol{M}\|_2,2\|\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\|_2\}$,则由式(35)和式(36)可得

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|_2\leqslant\sigma(\|\boldsymbol{e}_1\|_2+\|\boldsymbol{e}_2\|_2+\|\boldsymbol{e}_3\|_2)\leqslant3\sigma\|\boldsymbol{e}\|_2 \tag{37}$$

进一步,有

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2\leqslant\|\tilde{\boldsymbol{x}}_1\|_2+\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2\|_2\leqslant(1+3\sigma)\|\boldsymbol{e}\|_2 \tag{38}$$

结合式(34)和式(38)可得

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2\leqslant\kappa_1[\beta_1(\|\boldsymbol{e}(t_0)\|_2,t-t_0)+\gamma_1(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}(s)\|_2)] \tag{39}$$

式中:$\kappa_1=1+3\sigma$。

在式(18)中,取 $\boldsymbol{e}_3(t_0)=\boldsymbol{0}$,则有

$$\|\boldsymbol{e}(t_0)\|_2\leqslant\|\boldsymbol{e}_1(t_0)\|_2+\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t_0)\|_2 \tag{40}$$

http://bhxb.buaa.edu.cn

$$\|\boldsymbol{e}_1(t_0)\|_2 = \left\|\boldsymbol{x}_1(t_0) + 2\boldsymbol{J}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2(t_0) + 2\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3(t_0)\right\|_2 \leqslant \|\tilde{\boldsymbol{x}}_1(t_0)\|_2 + 2\|\boldsymbol{J}\|_2\|\boldsymbol{D}_2\|_2\|\boldsymbol{M}\|_2\|\tilde{\boldsymbol{x}}_2(t_0)\|_2 \leqslant 2\sigma\|\boldsymbol{x}(t_0)\|_2 \tag{41}$$

结合式(40)和式(41)可得

$$\|\boldsymbol{e}(t_0)\|_2 \leqslant \kappa_2\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)\|_2 \tag{42}$$

式中:$\kappa_2 = 1 + 2\sigma$。

根据$\mathcal{KL}$类函数的性质[26],有

$$\beta_1(\|\boldsymbol{e}(t_0)\|_2, t - t_0) \leqslant \beta_1(\kappa_2\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)\|_2, t - t_0) \tag{43}$$

进一步,定义$\mathcal{KL}$类函数 $\beta_2$ 和$\mathcal{K}$类函数 $\gamma_2$ 如下:

$$\beta_2(\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)\|_2, t - t_0) = \kappa_1\beta_1(\kappa_2\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)\|_2, t - t_0) \tag{44}$$

$$\gamma_2(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2) = \kappa_1(\sigma)\gamma_1(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}(s)\|_2) \tag{45}$$

结合式(39)、式(43)~式(45)可得

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2 \leqslant \beta_2(\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)\|_2, t - t_0) + \gamma_2(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}(s)\|_2) \tag{46}$$

从而由定义 1 可知在 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$ 作用下,$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 系统也是输入-状态稳定的。　　证毕

由定理 1 的证明过程可以看出,由 $\boldsymbol{e}$ 系统的稳定性可推出 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 系统的稳定性,因此在后续的分析中主要分析 $\boldsymbol{e}$ 系统的稳定性。

## 3　考虑执行器动态特性的控制设计

航天器的姿态控制是通过喷管、动量轮等执行器实现的,当执行器的运动并不是足够快时,忽略执行器的动态特性可能会降低姿态控制的性能,甚至使得系统不稳定[23-24]。本节在考虑执行器动态特性的前提下,重新设计控制指令。

设航天器的执行器具有如下二阶动态特性[23]:

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{v}} \tag{47}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{v}}\dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{v}} + \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{v}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}} \tag{48}$$

式中:$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{a}}$ 为航天器实际产生的力矩;$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{v}}$ 为中间变量;$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}}$ 为控制器解算的指令力矩;$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}$ 和 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{v}}$ 为正定矩阵,其对角元素和执行器时间常数有关。

取状态变量 $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{a}}, \boldsymbol{x}_5 = \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{a}}$,则有

$$\dot{\boldsymbol{x}}_4 = \boldsymbol{x}_5 \tag{49}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_5 = -\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_5 + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}} - \boldsymbol{x}_5) \tag{50}$$

式中:$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{v}})^{-1}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{v}})$;$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{v}})^{-1}$。

由式(9)和式(24)可获得使系统式(11)输入-状态稳定所需要的控制力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$,由于执行器的二阶动态特性,为使得实际产生的力矩能够达到 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$,需要进一步根据执行器的动态特性对指令力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}}$ 进行设计。

取误差变量 $\boldsymbol{\eta}_4 = \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$,则有

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_4 = \dot{\boldsymbol{x}}_4 - \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{F}} = \boldsymbol{x}_5 - \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{F}} \tag{51}$$

将 $\boldsymbol{x}_5$ 看作虚拟控制输入,设计 $\boldsymbol{x}_5$ 的指令为 $\boldsymbol{x}_{5\mathrm{d}} = \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{F}} - \boldsymbol{K}_4\boldsymbol{\eta}_4 - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{K}_4$ 为正定矩阵。取误差变量 $\boldsymbol{\eta}_5 = \boldsymbol{x}_5 - \boldsymbol{x}_{5\mathrm{d}}$,则有

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_4 = \boldsymbol{x}_{5\mathrm{d}} - \dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{F}} + \boldsymbol{x}_5 - \boldsymbol{x}_{5\mathrm{d}} = -\boldsymbol{K}_4\boldsymbol{\eta}_4 + \boldsymbol{\eta}_5 - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1 \tag{52}$$

设计指令力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}}$ 为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{K}_4\dot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{F}} + \ddot{\boldsymbol{\tau}}_{\mathrm{F}} - \boldsymbol{K}_5\boldsymbol{\eta}_5 - \boldsymbol{\eta}_4 - \boldsymbol{J}^{-1}\dot{\boldsymbol{e}}_1 - (\boldsymbol{K}_4 - \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_5] \tag{53}$$

式中:$\boldsymbol{K}_5$ 为正定矩阵。

对式(53)所设计的指令力矩,有以下定理。

**定理 2**　对于系统式(11),当执行器具有式(47)和式(48)的二阶动态特性时,在指令力矩输入式(53)作用下,闭环系统是输入-状态稳定的。

**证明**　采用式(53)中的指令力矩作为输入时,整个$(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\eta}_4, \boldsymbol{\eta}_5)$系统的动态方程为

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\times} & -\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2)/2 & -\boldsymbol{D}_3/2 \\ \bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2)/2 & \boldsymbol{0} & -\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2) \\ \boldsymbol{D}_3/2 & \bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2) & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_3 \end{bmatrix}\right\}\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_4 \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_4 = -\boldsymbol{K}_4\boldsymbol{\eta}_4 + \boldsymbol{\eta}_5 - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1 \tag{55}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_5 = -\boldsymbol{K}_5\boldsymbol{\eta}_5 - \boldsymbol{\eta}_4 \tag{56}$$

对于系统式(54)~式(56),取 Lyapunov 函数为 $V_2 = V_e + (\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_4 + \boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_5)/2$,则有

$$\dot{V}_2 = -\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} - \boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_4\boldsymbol{\eta}_4 - \boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_5\boldsymbol{\eta}_5 \tag{57}$$

设 $\lambda_5^m = \lambda_{\min}(\boldsymbol{K}_4)$,$\lambda_6^m = \lambda_{\min}(\boldsymbol{K}_5)$,则有

$$\dot{V}_2 \leqslant -\lambda_1^m\|\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1\|_2^2 - \lambda_2^m\|\boldsymbol{e}_2\|_2^2 - \lambda_3^m\|\boldsymbol{e}_3\|_2^2 - \lambda_5^m\|\boldsymbol{\eta}_4\|_2^2 - \lambda_6^m\|\boldsymbol{\eta}_5\|_2^2 + \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} \tag{58}$$

类似于定理 1 中的分析,有

$$\dot{V}_2 \leqslant -\frac{\lambda_1^m\lambda_4^m}{2}\|\boldsymbol{e}_1\|_2^2 - \lambda_2^m\|\boldsymbol{e}_2\|_2^2 - \lambda_3^m\|\boldsymbol{e}_3\|_2^2 - \lambda_5^m\|\boldsymbol{\eta}_4\|_2^2 - \lambda_6^m\|\boldsymbol{\eta}_5\|_2^2 + \frac{1}{2\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2 \leqslant -\lambda_7^m\|[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\|_2^2 + \frac{1}{2\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2 \tag{59}$$

式中:$\lambda_7^m = \min\{\lambda_1^m\lambda_4^m/2, \lambda_2^m, \lambda_3^m, \lambda_5^m, \lambda_6^m\}$。则对

http://bhxb.buaa.edu.cn

$\forall [\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$ 和 $0<\theta<1$,当 $\|[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\|_2 \geqslant \|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2/\sqrt{2\theta\lambda_7^m\lambda_1^m}$ 时,有

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 \leqslant & -(1-\theta)\lambda_7^m\|[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\|_2^2 - \\ & \theta\lambda_7^m\|[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\|_2^2 + \frac{1}{2\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2 \leqslant \\ & -(1-\theta)\lambda_7^m\|[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_4^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_5^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\|_2^2 < 0 \end{aligned} \tag{60}$$

由于 $V_2$ 正定且径向无界,根据引理 1,系统式(54)~式(56)是输入-状态稳定的。 **证毕**

由定理 2 可知,采用式(53)设计指令力矩时,可以保证系统的输入-状态稳定性,但是需要计算 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$ 的一阶和二阶导数,这会造成指令力矩表达式上的繁琐;同时 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$ 导数中的高频分量可能会激发执行器的未建模动态特性[23];此外,$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$ 表达式中包含误差项导数 $\dot{\boldsymbol{e}}_1$,而 $\dot{\boldsymbol{e}}_1$ 表达式中有未知项 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}$,因此式(53)中的指令力矩无法直接使用。

为此,进一步考虑对 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$ 进行如下形式的指令滤波[25]:

$$\dot{\boldsymbol{z}}_{4,1} = \boldsymbol{z}_{4,2} \tag{61}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}_{4,2} = -\boldsymbol{A}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{z}_{4,2} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}} - \boldsymbol{z}_{4,1}) \tag{62}$$

式中:$\boldsymbol{z}_{4,1}$ 和 $\boldsymbol{z}_{4,2}$ 为滤波器状态;$\boldsymbol{A}_{\mathrm{f}}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{f}}$ 为滤波器参数,具体表达式为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{f}} = \begin{bmatrix} 2\zeta_{f_1}\omega_{nf_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_{f_2}\omega_{nf_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\zeta_{f_3}\omega_{nf_3} \end{bmatrix} \tag{63}$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{f}} = \begin{bmatrix} \omega_{nf_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{nf_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{nf_3}^2 \end{bmatrix} \tag{64}$$

式中:$\zeta_{f_i}(i=1,2,3)>0$ 为阻尼比;$\omega_{nf_i}(i=1,2,3)>0$ 为自然频率。

滤波器式(61)和式(62)的初始状态满足 $\boldsymbol{z}_{4,1}(t_0)=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}(t_0)$,$\boldsymbol{z}_{4,2}(t_0)=[0,0,0]^{\mathrm{T}}$。

取误差变量 $\bar{\boldsymbol{\eta}}_4 = \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{z}_{4,1}$,则有

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}}_4 = \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}_{5\mathrm{d}} - \boldsymbol{z}_{4,2} + (\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}} - \bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}) + \bar{\boldsymbol{\eta}}_5 \tag{65}$$

式中:$\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}$ 为虚拟控制指令,设计为 $\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}} = -\boldsymbol{K}_4\bar{\boldsymbol{\eta}}_4 + \boldsymbol{z}_{4,2} - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1$;$\bar{\boldsymbol{\eta}}_5 = \boldsymbol{x}_5 - \boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}}$;$\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}}$ 为 $\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}$ 通过指令滤波器后的状态,即令 $\boldsymbol{z}_{5,1}=\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}}$,$\boldsymbol{z}_{5,2}=\dot{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{c}}$,则有

$$\dot{\boldsymbol{z}}_{5,1} = \boldsymbol{z}_{5,2} \tag{66}$$

$$\dot{\boldsymbol{z}}_{5,2} = -\boldsymbol{A}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{z}_{5,2} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{f}}(\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}} - \boldsymbol{z}_{5,1}) \tag{67}$$

式中:$\boldsymbol{z}_{5,1}(t_0)=\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}(t_0)$;$\boldsymbol{z}_{5,2}(t_0)=[0,0,0]^{\mathrm{T}}$。

设计指令力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}}$ 为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{B}^{-1}[(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_5 + \dot{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{c}} - \boldsymbol{K}_5\bar{\boldsymbol{\eta}}_5 - \bar{\boldsymbol{\eta}}_4] \tag{68}$$

对式(68)所设计的指令力矩,有以下定理。

**定理 3** 对于系统式(11),当执行器具有式(47)和式(48)的二阶动态特性时,在指令力矩输入式(68)作用下,闭环系统是一致最终有界的,且最终的上界可以通过控制参数进行调节。

**证明** 采用式(68)中的指令力矩作为输入时,整个 $(\boldsymbol{e},\bar{\boldsymbol{\eta}}_4,\bar{\boldsymbol{\eta}}_5)$ 系统的动态方程为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{e}} = & \left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1^{\times} & -\frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2) & -\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_3 \\ \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2) & \boldsymbol{0} & -\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{e}_2) \\ \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_3 & \bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_2) & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} - \right. \\ & \left.\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_0 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_3 \end{bmatrix}\right\}\frac{\partial H_{\mathrm{d}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{e})}{\partial \boldsymbol{e}} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\eta}}_4 \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{4,1} - \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{69}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}}_4 = -\boldsymbol{K}_4\bar{\boldsymbol{\eta}}_4 + (\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}} - \bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}) + \bar{\boldsymbol{\eta}}_5 - \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1 \tag{70}$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}}_5 = -\boldsymbol{K}_5\bar{\boldsymbol{\eta}}_5 - \bar{\boldsymbol{\eta}}_4 \tag{71}$$

根据指令滤波器的性质[25],$\|\boldsymbol{z}_{4,1}-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}\|_2$ 和 $\|\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}}-\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}\|_2$ 始终有界,且对给定的 $\zeta_{f_i}(i=1,2,3)>0$,$T>0$,$\varepsilon_1>0$ 和 $\varepsilon_2>0$,存在 $\omega_{nf_i}(i=1,2,3)>0$,使得当 $t>T$ 时有

$$\|\boldsymbol{z}_{4,1}-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}\|_2 < \varepsilon_1 \tag{72}$$

$$\|\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}}-\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}\|_2 < \varepsilon_2 \tag{73}$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V_3 = V_e + (\bar{\boldsymbol{\eta}}_4^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\eta}}_4 + \bar{\boldsymbol{\eta}}_5^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\eta}}_5)/2$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{V}_3 = & -\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{M}\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_3\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_3 - \\ & \bar{\boldsymbol{\eta}}_4^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_4\bar{\boldsymbol{\eta}}_4 - \bar{\boldsymbol{\eta}}_5^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_5\bar{\boldsymbol{\eta}}_5 + \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}(\boldsymbol{z}_{4,1}-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}) + \\ & \boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} + \bar{\boldsymbol{\eta}}_4^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}}-\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}) \leqslant -\frac{\lambda_1^m\lambda_4^m}{2}\|\boldsymbol{e}_1\|_2^2 - \\ & \lambda_2^m\|\boldsymbol{e}_2\|_2^2 - \lambda_3^m\|\boldsymbol{e}_3\|_2^2 - \frac{\lambda_5^m}{2}\|\bar{\boldsymbol{\eta}}_4\|_2^2 - \lambda_6^m\|\bar{\boldsymbol{\eta}}_5\|_2^2 + \\ & \frac{1}{\lambda_1^m}\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^m}\|\boldsymbol{z}_{4,1}-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}\|_2^2 + \frac{1}{2\lambda_5^m}\|\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}}-\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}\|_2^2 \end{aligned} \tag{74}$$

由假设 1,$\|\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}\|_2$ 有界,结合 $\|\boldsymbol{z}_{4,1}-\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}\|_2$ 和 $\|\boldsymbol{x}_{5\mathrm{c}}-\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}\|_2$ 的有界性可知,当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时 $V_3$ 有界,从而 $\|\bar{\boldsymbol{e}}\|_2$ 有界,$\bar{\boldsymbol{e}}=[\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}},\bar{\boldsymbol{\eta}}_4^{\mathrm{T}},\bar{\boldsymbol{\eta}}_5^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$;当 $t>T$ 时,由式(74)有

$$\dot{V}_3 \leqslant -\lambda_8^m\|\bar{\boldsymbol{e}}\|_2^2 + \Delta_e \tag{75}$$

式中:$\lambda_8^m = \min\{\lambda_1^m\lambda_4^m/2,\lambda_2^m,\lambda_3^m,\lambda_5^m/2,\lambda_6^m\}$;$\Delta_e = \Delta_{\mathrm{d}}/\lambda_1^m + \varepsilon_1/\lambda_1^m + \varepsilon_2/(2\lambda_5^m)$。

又由于 $\alpha_3\|\bar{\boldsymbol{e}}\|_2^2 \leqslant V_3 \leqslant \alpha_4\|\bar{\boldsymbol{e}}\|_2^2$,$\alpha_3 = \min\{\lambda_{\min}(\boldsymbol{J}^{-1}),\lambda_{\min}(\boldsymbol{M}),\lambda_{\min}(\boldsymbol{N}),1/2\}$,$\alpha_4 =$

http://bhxb.buaa.edu.cn

$\max\{\lambda_{\max}(\boldsymbol{J}^{-1}),\lambda_{\max}(\boldsymbol{M}),\lambda_{\max}(\boldsymbol{N}),1/2\}$,因此,系统式(67)、式(71)和式(72)一致最终有界,且当 $t>T$ 时有

$$\|\bar{\boldsymbol{e}}\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha_3}\left(V_3(T)-\frac{\alpha_4\Delta_e}{\lambda_8^m}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda_8^m}{\alpha_4}(t-T)}+\frac{\alpha_4\Delta_e}{\alpha_3\lambda_8^m}\right.} \tag{76}$$

由式(76)可知,通过选择合适的矩阵 $\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{D}_3$ 和 $\boldsymbol{K}_4$,可使得 $\lambda_8^m$ 足够大,从而使得 $\|\bar{\boldsymbol{e}}\|_2$ 的上界足够小,即保证姿态控制误差足够小。 **证毕**

**注 1**　在第 3 节的指令力矩设计过程中使用了 2 个指令滤波器,作用分别是对 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}$ 的导数和虚拟控制量 $\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}$ 的导数进行近似。指令滤波器本质上是一个二阶线性系统,目的是使输出尽可能好地跟踪输入,从系统阶跃响应的角度看,指令滤波器的参数,即阻尼比 $\zeta_{f_i}(i=1,2,3)>0$ 和自然频率 $\omega_{nf_i}(i=1,2,3)>0$ 的选取需要在超调量、调节时间、稳态误差等指标之间取一个折中。阻尼比通常可取为 0.707[27-29],即工程上认为的最佳阻尼比。

**注 2**　从能量的角度看,Lyapunov 函数可以看作是系统的广义能量,$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 2 个矩阵的最小特征值越大,则表示系统的能量越大,而稳定本质上是需要衰减系统的能量到极小值,因此需要的控制增益越大;$\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{D}_3$ 3 个矩阵的最小特征值越大,表示期望衰减系统能量的速率越大,则需要的控制增益也越大。因此,$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$ 2 个矩阵决定了系统能量的大小,$\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{D}_3$ 3 个矩阵决定了能量衰减的速率。

**注 3**　指令力矩 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}}$ 包含了 $\boldsymbol{K}_4$ 和 $\boldsymbol{K}_5$ 2 个增益矩阵,$\boldsymbol{K}_4$ 决定了虚拟控制指令 $\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}$ 的大小,而第 2 个滤波器的输出 $\boldsymbol{z}_{5,1}$ 需要跟踪 $\bar{\boldsymbol{x}}_{5\mathrm{d}}$,因此 $\boldsymbol{K}_4$ 的最小特征值越大,则滤波器跟踪的难度也越大,需要的自然频率也越大;$\boldsymbol{K}_5$ 包含在反步法最后一步设计的误差项中,与 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{c}}$ 线性相关。结合注 1 和注 2 来看,控制器增益和滤波器参数需要根据系统响应综合选取。

## 4　仿真验证

为验证本文控制器设计的效果,分别在不考虑和考虑执行器动态特性的前提下进行 2 组对比仿真。采用文献[10]中的模型和控制目标参数,并以文献[10]作为参照,在考虑干扰力矩的前提下对航天器姿态进行控制。

按照偏航—俯仰—滚转的旋转顺序,航天器初始姿态为:滚转角 15°,俯仰角 30°,偏航角 −30°,对应的四元数为[0.812 5,0.237 5,0.159 2,−0.508 1]$^{\mathrm{T}}$,初始角速度为[0.002,−0.002,0.002]$^{\mathrm{T}}$rad/s;目标姿态为:滚转角 −15°,俯仰角 0°,偏航角 0°,对应的四元数为[0.991 4,−0.130 5,0,0]$^{\mathrm{T}}$。

航天器的转动惯量阵为 $\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}\{14,13.5,0.75\}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$,干扰力矩设为

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}1+\cos(0.01t)+2\cos(0.02t)\\2+2\sin(0.01t)-2\cos(0.02t)\\-2+2\sin(0.01t)+1.5\cos(0.02t)\end{bmatrix}\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot m}$$

### 4.1　不考虑执行器动态特性

不考虑执行器的动态特性,希望系统能量衰减部分没有振荡,即阻尼矩阵的特征值虚部为 0,因此阻尼矩阵取为对角阵形式,设计阻尼阵为 $\boldsymbol{D}_1=0.5\boldsymbol{I},\boldsymbol{D}_2=0.5\boldsymbol{I},\boldsymbol{D}_3=0.2\boldsymbol{I}$,同时希望系统的能量组成尽量减少状态之间的耦合,则 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 也设计为对角阵形式,取 $\boldsymbol{M}=0.2\boldsymbol{I},\boldsymbol{N}=0.3\boldsymbol{I}$。采用控制力矩为 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{F}}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}+\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$,$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fr}}$和 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{Fi}}$表达式分别为式(91)和式(24),仿真时间设为 300 s,得到仿真结果如图 1 ~图 3 所示。

图 1 给出了姿态四元数的变化曲线。从四元数变化曲线上看,2 种方法均能克服干扰力矩,但与文献[10]方法相比,本文方法能够使得航天器的姿态更快地收敛到目标值。

图 2 给出了 3 个方向的角速度变化曲线。从对比曲线可以看出,本文方法能够使得航天器的角速度更快地收敛到原点。

图 3 给出了 3 个方向的姿态控制力矩的变化曲线。从变化曲线可以看出,2 种方法所需的控制力矩量级相差不大。因此,综合前面四元数和角速度的变化曲线来看,本文方法的控制性能要好于文献[10]方法。

### 4.2　考虑执行器动态特性

进一步考虑执行器的动态特性,根据文献[23],设定 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{a}}=5\boldsymbol{I},\boldsymbol{T}_{\mathrm{v}}=3\boldsymbol{I}$;$\boldsymbol{D}_1$、$\boldsymbol{D}_2$、$\boldsymbol{D}_3$、$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的取值与 4.1 节中相同;指令滤波器参数中,$\zeta_{f_i}=0.707$,$\omega_{nf_i}=5$,$i=1,2,3$;希望尽量减少控制器 3 个通道的耦合,因此 $\boldsymbol{K}_4$ 和 $\boldsymbol{K}_5$ 也设计为对角阵形式,取 $\boldsymbol{K}_4=2\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{K}_5=3\boldsymbol{I}$。采用指令力矩为式(68),仿真时间设为 100 s,得到仿真结果如图 4和图 5 所示。

从图 4 中四元数变化曲线和图 5 中角速度变化曲线可以看出,文献[10]方法由于未考虑执行器的动态特性,使得姿态出现不稳定的情况,无法收敛到目标值,而在本文方法的控制作用下,姿态能够收敛到目标值,且角速度收敛于原点。

http://bhxb.buaa.edu.cn

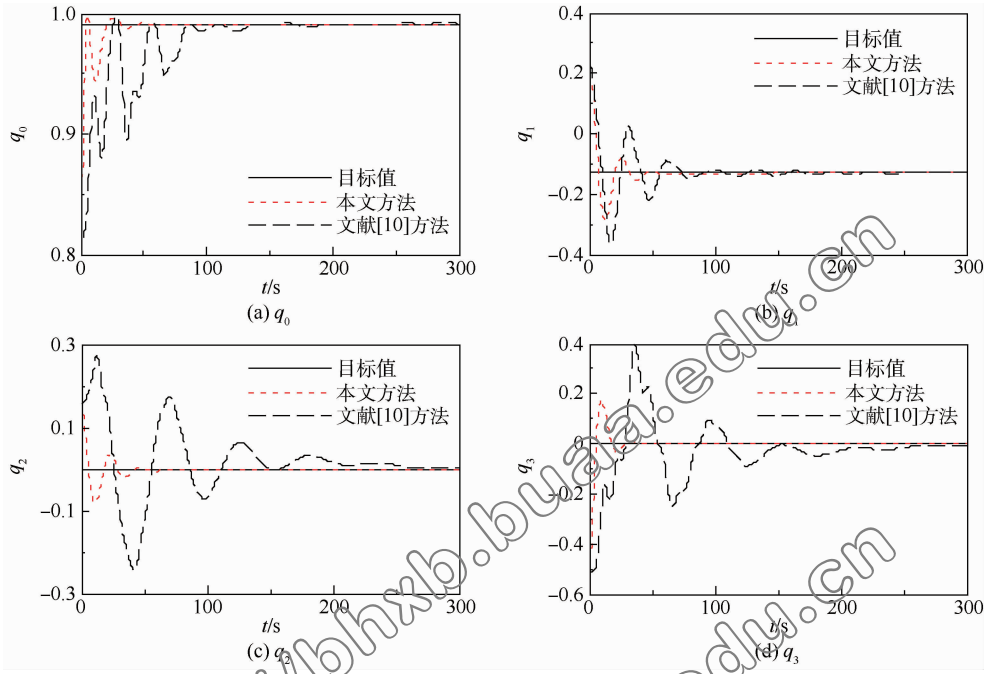



图1 四元数变化曲线(不考虑执行器动态特性)

Fig. 1 Variation curves of quaternion (without consideration of actuator dynamics)

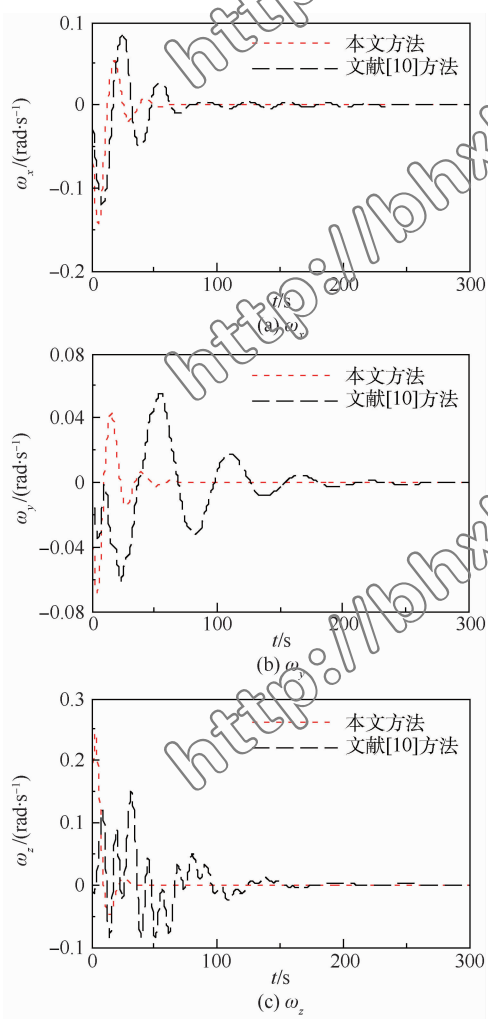



图2 角速度变化曲线(不考虑执行器动态特性)

Fig. 2 Variation curves of angular rate (without consideration of actuator dynamics)

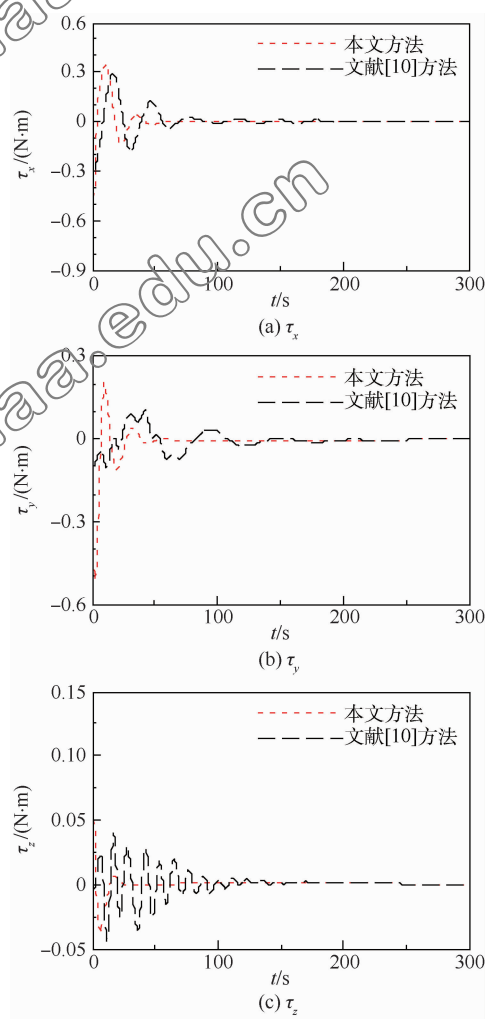



图3 姿态控制力矩变化曲线(不考虑执行器动态特性)

Fig. 3 Variation curves of attitude control torque (without consideration of actuator dynamics)

http://bhxb.buaa.edu.cn

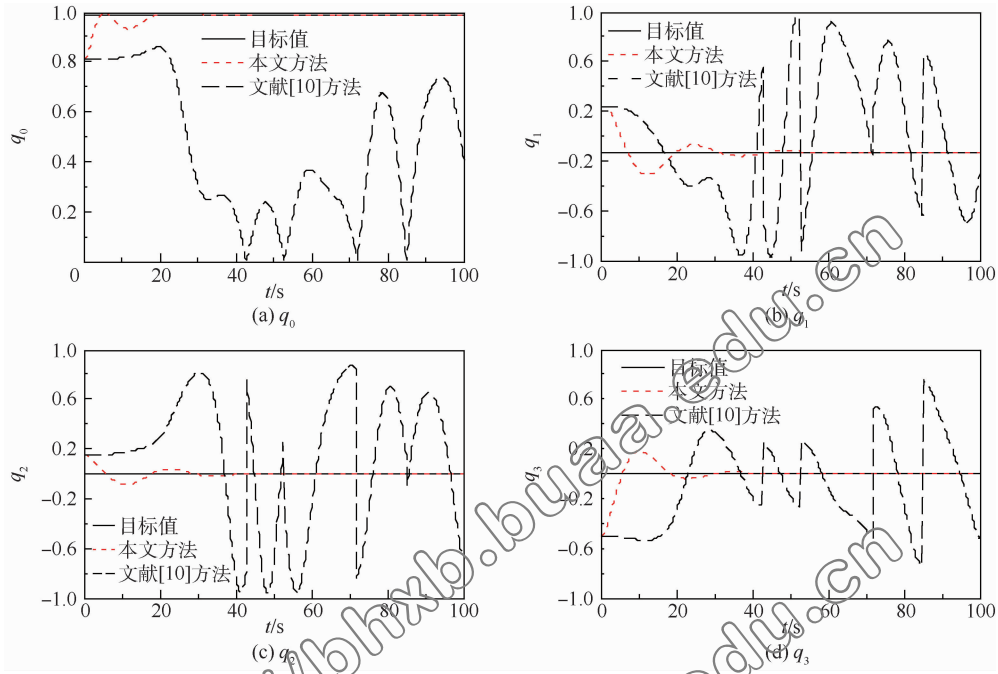



图 4　四元数变化曲线（考虑执行器动态特性）

Fig. 4　Variation curves of quaternion (with consideration of actuator dynamics)

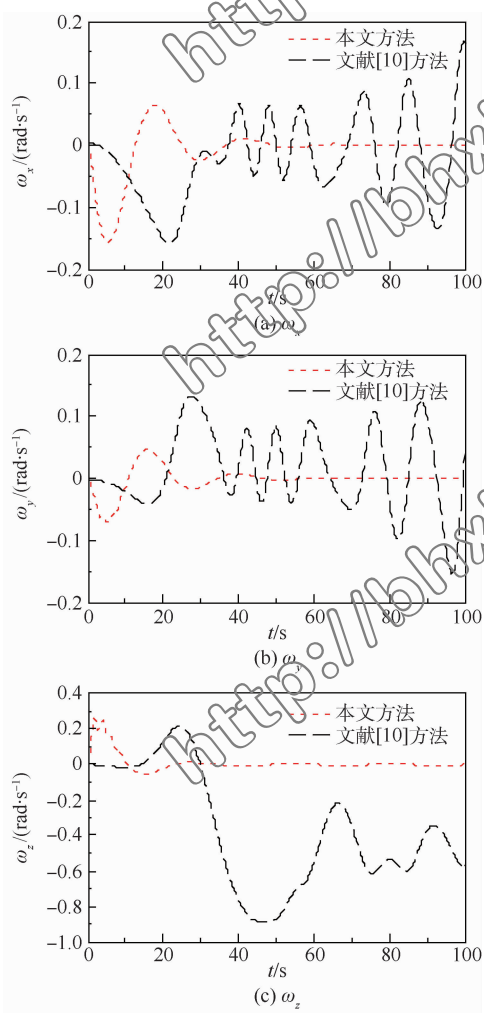



图 5　角速度变化曲线（考虑执行器动态特性）

Fig. 5　Variation curves of angular rate (with consideration of actuator dynamics)

综合 4.1 节和 4.2 节中的仿真结果来看，本文方法比单独基于无源性的控制方法具有更好的控制性能。

## 5　结　论

1）IDA-PBC 方法通过耗散能量来保证系统的稳定性，通过增加与姿态误差积分有关的状态，实现了闭环系统的输入-状态稳定性，期望的哈密顿函数可直接作为 Lyapunov 函数进行稳定性分析。

2）考虑执行器动态特性时，结合反步法和指令滤波技术对控制指令进行补偿设计，可以保证闭环系统一致最终有界，且最终的上界对控制器增益和指令滤波器的阻尼及自然频率选取提出了要求。

3）仿真结果表明，闭环系统能够实现对最终目标姿态的良好跟踪，且控制性能好于单独基于无源性的控制方法，验证了本文所提方法的有效性。

### 参考文献（References）

[1] LEE T. Global exponential attitude tracking controls on $SO_3$ [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(10): 2837-2842.

[2] DE ANGELIS E L, GIULIETTI F, DE RUITER A H J, et al. Spacecraft attitude control using magnetic and mechanical actuation[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(3): 564-573.

http://bhxb.buaa.edu.cn

[3] RODRIQUEZ-VAZQUEZ A L, MARTIN-PRATS M A, BERNELLI-ZAZZERA F. Spacecraft magnetic attitude control using approximating sequence Riccati equations[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(4): 3374-3385.

[4] ALI I, RADICE G, KIM J. Backstepping control design with actuator torque bound for spacecraft attitude maneuver[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(1): 254-259.

[5] ZHANG H, FANG J. Robust backstepping control for agile satellite using double-gimbal variable-speed control moment gyroscope[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(5): 1356-1363.

[6] ZHU Z, XIA Y Q, FU M Y. Adaptive sliding mode control for attitude stabilization with actuator saturation[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2011, 58(10): 4898-4907.

[7] LU K F, XIA Y Q, ZHU Z, et al. Sliding mode attitude tracking of rigid spacecraft with disturbances[J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349(2): 413-440.

[8] WANG X K, YU C B. Unit dual quaternion-based feedback linearization tracking problem for attitude and position dynamics [J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(3): 225-233.

[9] BAJODAH A H. Asymptotic generalised dynamic inversion attitude control[J]. IET Control Theory & Applications, 2010, 4(5): 827-840.

[10] FORBES J R. Passivity-based attitude control on the special orthogonal group of rigid-body rotations[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(6): 1596-1605.

[11] WANG H L, XIE Y C. Passivity based attitude control of rigid bodies[J]. Asian Journal of Control, 2014, 16(3): 802-817.

[12] PARK Y. Robust and optimal attitude control of spacecraft with disturbances[J]. International Journal of Systems Science, 2015, 46(7): 1222-1233.

[13] ORTEGA R, VAN DER SCHAFT A, MASCHKE B, et al. Interconnection and damping assignment passivity-based control of port-controlled Hamiltonian systems[J]. Automatica, 2002, 38(4): 585-596.

[14] JELTSEMA D, ORTEGA R, SCHERPEN J M A. An energy-balancing perspective of interconnection and damping assignment control of nonlinear systems[J]. Automatica, 2004, 40(9): 1643-1646.

[15] ACOSTA J A, ORTEGA R, ASTOLFI A, et al. Interconnection and damping assignment passivity-based control of mechanical systems with underactuation degree one[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(12): 1936-1955.

[16] BATLLE C, DÒRIA-CEREZO A, ESPINOSA-PEREZ G, et al. Simultaneous interconnection and damping assignment passivity-based control: The induction machine case study[J]. International Journal of Control, 2009, 82(2): 241-255.

[17] DONAIRE A, PETER T. Dynamic positioning of marine craft using a port-Hamiltonian framework[J]. Automatica, 2012, 48(5): 851-856.

[18] ZENG J W, ZHANG Z, QIAO W. An interconnection and damping assignment passivity-based controller for a DC-DC boost converter with a constant power load[J]. IEEE Transactions on Industry Applications, 2014, 50(4): 2314-2322.

[19] CRASTA N, ORTEGA R, PILLAI H K. On the matching equations of energy shaping controllers for mechanical systems[J]. International Journal of Control, 2015, 88(9): 1757-1765.

[20] AOKI T, YAMASHITA Y, TSUBAKINO D. Vibration suppression for mass-spring-damper systems with a tuned mass damper using interconnection and damping assignment passivity-based control[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(2): 235-251.

[21] NUNNA K, SASSANO M, ASTOLFI A. Constructive interconnection and damping assignment for port-controlled Hamiltonian systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(9): 2350-2361.

[22] ROMERO J G, DONAIRE A, ORTEGA R. Robust energy shaping control of mechanical systems[J]. Systems & Control Letters, 2013, 62(9): 770-780.

[23] KRISTIANSEN R, HAGEN D. Modelling of actuator dynamics for spacecraft attitude control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(3): 1022-1025.

[24] HU Q L, XIAO B, WANG D W, et al. Attitude control of spacecraft with actuator uncertainty[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2013, 36(6): 1771-1776.

[25] DONG W, FARRELL J A, POLYCARPOU M M, et al. Command filtered adaptive backstepping[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(3): 566-580.

[26] KHALIL H K. 非线性系统[M]. 朱义胜, 董辉, 李作洲, 等译. 3 版. 北京: 电子工业出版社, 2011: 96-118.
KHALIL H K. Nonlinear systems[M]. ZHU Y S, DONG H, LI Z Z, et al, translated. 3rd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011: 96-118(in Chinese).

[27] ZOU Y, ZHENG Z. A robust adaptive RBFNN augmenting backstepping control approach for a model-scaled helicopter [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2015, 23(6): 2344-2352.

[28] SUN L, ZUO Z. Nonlinear adaptive trajectory tracking control for a quad-rotor with parametric uncertainty[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2015, 229(9): 1709-1721.

[29] ZHU B, WANG Q, HUO W. Longitudinal-lateral velocity control design and implementation for a model-scaled unmanned helicopter[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76(2): 1579-1589.

**作者简介:**

**王青** 女,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:航天器控制、飞行器制导控制一体化、故障检测。

**龚立纲** 男,博士研究生。主要研究方向:飞行器控制、非线性控制理论及应用。

**董朝阳** 男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:飞行器总体设计、电器系统综合。

http://bhxb.buaa.edu.cn

# Spacecraft attitude passivity control based on PCH model

WANG Qing[1,*], GONG Ligang[1], DONG Chaoyang[2]

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China;
2. School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract**: For the spacecraft attitude control problem in the presence of disturbance torques, a passivity control scheme based on port-controlled Hamiltonian (PCH) system model was proposed from the perspective of energy. By writing the attitude control system in a PCH form and adding the state related to integral of attitude error, the interconnection and damping assignment passivity-based control (IDA-PBC) method was then utilized to design the controller and provide the closed-loop system with desired internal interconnection structure and energy dissipativity properties. The proposed control scheme can guarantee input-to-state stability of closed-loop system. The actuator dynamics was then considered and backstepping control scheme was utilized to compensate for control command. Combined with command filtering technique, the computation of higher order derivatives of virtual control was avoided and uniform ultimate boundedness of the closed-loop system was proved theoretically. Simulation results validate the performance advantage of the proposed control scheme over that based on passivity alone.

**Keywords**: spacecraft; attitude control; Hamiltonian system; passivity; damping assignment

http://bhxb.buaa.edu.cn

**Received**: 2016-05-18; **Accepted**: 2016-08-25; **Published online**: 2016-10-17 08:45

**URL**: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20161017.0845.004.html

**Foundation item**: National Natural Science Foundation of China (61374012)

* **Corresponding author**. E-mail: bhwangqing@126.com