http://bhxb.buaa.edu.cn jbuaa@buaa.edu.cn
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2017.0150

# 多星对合作目标的分布式协同导航滤波算法

李兆铭[1], 杨文革[2,*], 丁丹[2], 廖育荣[2]
(1. 装备学院 研究生院, 北京 101416; 2. 装备学院 光电装备系, 北京 101416)

**摘 要**: 针对多颗在轨卫星对空间合作目标的协同导航问题,提出了一种适用于协同导航的分布式球面单形-径向容积求积分卡尔曼滤波(DSSRCQKF)算法。为了计算非线性滤波中的高斯加权积分,分别使用球面单形准则和二阶高斯-拉盖尔求积分准则计算球面积分和径向积分,提出了一种新的球面单形-径向容积求积分准则。将该准则嵌入分布式卡尔曼滤波框架中,结合协同导航的非线性数学模型,给出适用于协同导航的 DSSRCQKF 算法,该算法要求每颗导航星仅与其邻居星进行通信,通过数据的分布式融合实现对目标星轨道状态的一致估计,从而避免了传统集中式处理中较高的通信和计算压力。仿真实验结果表明,与分布式卡尔曼滤波相比,本文算法将对合作目标的实时定位精度提高了 11 m,定速精度提高了 0.02 m/s,从而验证了本文算法的有效性。

**关 键 词**: 分布式协同导航; 容积卡尔曼滤波; 球面单形; 高斯-拉盖尔求积分; 非线性系统
**中图分类号**: V249.3
**文献标识码**: A **文章编号**: 1001-5965(2018)03-0462-08

随着小卫星功能模块化、一箭多星和应急发射等技术的发展,在轨卫星的数量急剧增加。而传统地面测控站受布站位置的约束,无法提供连续的测控能力。一旦小卫星的导航星座信号受到干扰,而自身又不具备自主导航功能,则需要利用天基测量信息为其提供一种应急导航能力。因此,有必要研究利用多星测距对空间合作目标提供协同导航的方法[1-2]。

本文研究的协同导航方法在本质上属于多源信息融合滤波问题,主要有集中式和分布式2种。集中式滤波要求融合中心汇集所有节点的测量信息,进行集中式数据处理,一般会对融合中心造成较高的通信和计算压力,而且一旦该中心出现故障,则容易导致系统崩溃。为了分散通信和计算压力,降低节点故障对系统的影响,分布式滤波逐渐成为研究的热点问题[3]。Olfati-Saber[4]建立了一种分布式卡尔曼滤波(Distributed Kalman Filter,DKF)计算框架,但该方法在实际工程应用中容易受到系统非线性因素的限制。进而,Battistelli 和 Chisci[5]提出了适用于非线性系统的分布式扩展卡尔曼滤波(Distributed Extended Kalman Filter,DEKF)。然而,DEKF 对非线性系统的一阶线性化近似精度较低,并且需要计算系统的雅可比矩阵。为了提高非线性系统滤波精度,学者们相继提出了无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter,UKF)[6]和容积卡尔曼滤波(Cubature Kalman Filter,CKF)[7]。其中,CKF 将非线性高斯加权积分分解为球面积分和径向积分,并采用一组等权值的容积点计算非线性高斯加权积分,具有比 EKF 和 UKF 更高的滤波精度和数值计算稳定

**收稿日期**: 2017-03-14; **录用日期**: 2017-06-16; **网络出版时间**: 2017-07-14 19:12
**网络出版地址**: kns.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20170714.1912.003.html
**基金项目**: 国家"863"计划 (2015AA7026085)
* **通信作者**. E-mail: wengeyang_3@163.com

**引用格式**: *李兆铭, 杨文革, 丁丹, 等. 多星对合作目标的分布式协同导航滤波算法[J]. 北京航空航天大学学报, 2018, 44(3): 462-469. LI Z M, YANG W G, DING D, et al. Distributed coordinated navigation filtering algorithm for cooperative target by multi-satellite[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2018, 44(3): 462-469 (in Chinese).*

http://bhxb.buaa.edu.cn

性[8],已在工程中取得广泛的应用[9-10]。Wang 等[11]采用正则单形变换群计算球面积分,提出了球面单形-径向容积卡尔曼滤波(Spherical Simplex-Radial Cubature Kalman Filter, SSRCKF),并且指出球面单形准则具有比 CKF 中的球面准则更高的精度。然而,CKF 和 SSRCKF 2 种方法均采用矩匹配法计算径向积分,而该方法无法保证径向积分计算的最优性。为了提高径向积分精度,Shovan 和 Swati[12]提出一种容积求积分卡尔曼滤波(Cubature Quadrature Kalman Filter, CQKF),其采用高阶高斯-拉盖尔求积分准则计算径向积分,具有比矩匹配法更高的精度。然而,上述非线性滤波需要向分布式滤波中推广。

本文将球面单形准则与高斯-拉盖尔求积分准则相结合,提出了一种新的球面单形-径向容积求积分准则,将该准则嵌入 DKF 框架,得到了一种适用于非线性系统的分布式球面单形-径向容积求积分卡尔曼滤波(Distributed Spherical Simplex-Radial Cubature Quadrature Kalman Filter, DSSRCQKF)算法,并将该算法应用于解决多颗卫星对空间合作目标的协同导航问题,仿真实验结果验证了本文算法的有效性。

## 1　分布式协同导航数学模型

用导航星表示自身具备自主导航能力的卫星,用目标星表示空间合作目标,协同导航示意图如图 1 所示。$s$ 个导航星处在一个分布式通信网络中,使用无向图 $G=(V,E)$ 对该通信网络进行建模[13]。其中,$V=\{1,2,\cdots,s\}$ 为导航星集合,$E=\{(d,q)\mid d,q\in V\}$ 为通信链路集合。当导航星 $d$ 和 $q$ 之间可以通信时,$(d,q)\in E$,此时称导航星 $d$ 和 $q$ 互为邻居星。导航星 $d$ 的邻居星集合用 $N_d$ 表示,同时记 $J_d=N_d\cup(d)$ 为邻居星集与自身的并集。假设每个导航星均具备对目标星的测距能力,通过与其邻居星的分布式数据融合实现对目标星的协同一致定轨。

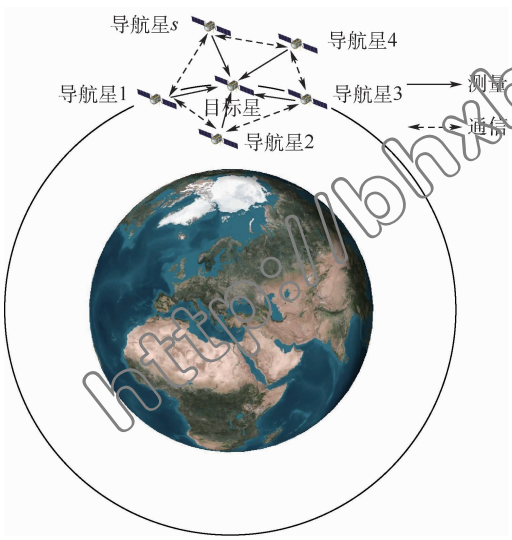



图 1　分布式协同导航示意图

Fig. 1　Schematic of distributed coordinated navigation

### 1.1　协同导航状态方程

地球 $J_2$ 项非球形摄动是卫星所受到的最主要的摄动力。在 J2000 地心惯性坐标系中,考虑 $J_2$ 项摄动影响,卫星的轨道动力学模型为[14]

$$\begin{cases}\dot{x}=v_x\\ \dot{y}=v_y\\ \dot{z}=v_z\\ \dot{v}_x=\dfrac{\mu x}{\rho^3}\left[J_2\left(\dfrac{R_e}{\rho}\right)^2\left(7.5\dfrac{z^2}{\rho^2}-1.5\right)-1\right]+f_x\\ \dot{v}_y=\dfrac{\mu y}{\rho^3}\left[J_2\left(\dfrac{R_e}{\rho}\right)^2\left(7.5\dfrac{z^2}{\rho^2}-1.5\right)-1\right]+f_y\\ \dot{v}_z=\dfrac{\mu z}{\rho^3}\left[J_2\left(\dfrac{R_e}{\rho}\right)^2\left(7.5\dfrac{z^2}{\rho^2}-4.5\right)-1\right]+f_z\\ \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\end{cases}\tag{1}$$

式中:$\boldsymbol{X}=(x\quad y\quad z\quad v_x\quad v_y\quad v_z)^{\mathrm{T}}$ 为卫星的轨道状态;$J_2$ 为带谐项系数;$\mu$ 为地球引力常数;$R_e$ 为地球半径;$(f_x\quad f_y\quad f_z)^{\mathrm{T}}$ 为地球高阶非球形摄动、三体引力摄动和太阳光压摄动等摄动之和在 3 个坐标轴上的分量,在研究中可以等效成零均值的高斯白噪声。

用四阶龙格库塔法可以将式(1)写成如下离散状态方程的形式:

$$\boldsymbol{X}_k=f(\boldsymbol{X}_{k-1})+\boldsymbol{w}_{k-1}\tag{2}$$

式中:$\boldsymbol{X}_k=(x_k\quad y_k\quad z_k\quad v_{x,k}\quad v_{y,k}\quad v_{z,k})^{\mathrm{T}}$ 为 $k$ 时刻的轨道状态;$\boldsymbol{w}_k$ 为系统噪声。

### 1.2　协同导航量测方程

使用微波测距技术可以直接测量目标星与导航星 $d$ 之间的径向距离 $R_d$,设导航星 $d$ 的轨道位置为 $(x_d\quad y_d\quad z_d)^{\mathrm{T}}$,则测量值与轨道状态 $\boldsymbol{X}$ 有如下几何关系:

$$R_d=\sqrt{(x-x_d)^2+(y-y_d)^2+(z-z_d)^2}\tag{3}$$

将式(3)的几何关系写成如下离散量测方程的形式:

$$z_{d,k}=h(\boldsymbol{X}_k)+v_{d,k}\tag{4}$$

式中:$z_{d,k}$ 为 $k$ 时刻的量测值;$v_{d,k}$ 为量测噪声。

http://bhxb.buaa.edu.cn

## 2 分布式协同导航滤波算法

### 2.1 球面单形-径向容积求积分准则

考虑积分 $I(f)=\int_{\mathbf{R}^n} f(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，令 $\boldsymbol{x}=r\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}$ 满足 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1$ 为单位球体表面，$r\geqslant 0$ 为球体半径，则 $I(f)$ 可以分解为如下球面积分 $S(r)$ 和径向积分 $R$[7]：

$$S(r)=\int_{U_n} f(r\boldsymbol{y})\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{y}) \tag{5}$$

$$R=\int_0^{\infty} S(r)r^{n-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r \tag{6}$$

式中：$U_n$ 为单位球体表面；$\sigma(\boldsymbol{y})$ 为面积分元素。

一般难以得到积分 $S(r)$ 和 $R$ 的解析解，因此考虑采用数值积分的方法对其进行近似。由文献[11,15]可知，可以采用如下由 $2n+2$ 个积分点构成的三阶球面单形准则对球面积分进行近似：

$$S(r)=\frac{T_n}{2(n+1)}\sum_{l=1}^{n+1}\left(f(r\boldsymbol{a}_l)+f(-r\boldsymbol{a}_l)\right) \tag{7}$$

式中：$T_n=2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$ 为 $n$ 维单位球面的表面积，$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$ 为 Gamma 函数；$\boldsymbol{a}_l=[a_{l,1}\quad a_{l,2}\quad\cdots\quad a_{l,n}]^{\mathrm{T}}$，$l=1,2,\cdots,n+1$ 为 $n$ 维单形的顶点，其元素定义为

$$a_{l,m}=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{n+1}{n(n-m+2)(n-m+1)}} & m<l\\ 0 & m>l\\ \sqrt{\dfrac{(n+1)(n-l+1)}{n(n-l+2)}} & m=l\end{cases} \tag{8}$$

对径向积分 $R=\int_0^{\infty}S(r)r^{n-1}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r$，令 $r^2=t$，得到 $r=\sqrt{t}$，进而得 $R=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}S(\sqrt{t})t^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$，令 $g(t)=S(\sqrt{t})$，$\beta=\frac{n-2}{2}$，则 $R=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}g(t)t^{\beta}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$，采用如下高斯-拉盖尔求积分准则对 $R$ 中的积分项进行近似处理[12]：

$$\int_0^{\infty}g(t)t^{\beta}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\approx\sum_{j=1}^{p}A_j g(t_j) \tag{9}$$

式中：$t_j$ 为求积分点；$A_j$ 为对应的权值。求积分点可以由如下 $p$ 阶广比雪夫-拉盖尔多项式[12]的解求得：

$$L_p^{\beta}(t)=(-1)^p t^{-\beta}\mathrm{e}^{t}\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}t^p}(t^{\beta+p}\mathrm{e}^{-t})=0 \tag{10}$$

相应的权值可以由式(11)解得：

$$A_j=\frac{p!\Gamma(\beta+p+1)}{t_j(\dot{L}_p^{\beta}(t_j))^2} \tag{11}$$

该准则的近似精度取决于求积分点的个数，当 $p=2$ 时可以得到

$$R=\frac{1}{2}(A_1S(\sqrt{t_1})+A_2S(\sqrt{t_2})) \tag{12}$$

由式(10)、式(11)解得 $t_1$、$A_1$、$t_2$ 和 $A_2$ 的值为

$$\begin{cases}t_1=\dfrac{n}{2}+1+\sqrt{\dfrac{n}{2}+1}\\ A_1=\dfrac{n\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{2n+4+2\sqrt{2n+4}}\\ t_2=\dfrac{n}{2}+1-\sqrt{\dfrac{n}{2}+1}\\ A_2=\dfrac{n\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{2n+4-2\sqrt{2n+4}}\end{cases} \tag{13}$$

非线性卡尔曼滤波的核心是计算高斯加权积分 $I_N=\int_{\mathbf{R}^n}f(\boldsymbol{x})N(\boldsymbol{x};\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{P}_x)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$，$N(\cdot)$ 为高斯概率密度函数，且变量 $\boldsymbol{x}$ 的均值为 $\bar{\boldsymbol{x}}$，协方差矩阵为 $\boldsymbol{P}_x$。该积分具有如下恒等形式[7]：

$$I_N=\frac{1}{\sqrt{\pi^n}}\int_{\mathbf{R}^n}f(\sqrt{2\boldsymbol{P}_x}\boldsymbol{x}+\bar{\boldsymbol{x}})\mathrm{e}^{-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{14}$$

结合式(12)和 $t_1$、$t_2$、$A_1$、$A_2$，可以得到如下计算 $I_N$ 的球面单形-径向容积求积分准则：

$$\begin{aligned}I_N=&\frac{n}{4(n+1)(n+2+\sqrt{2n+4})}\cdot\\ &\sum_{i=1}^{n+1}\left(f\left(\bar{\boldsymbol{x}}+\sqrt{(n+2+\sqrt{2n+4})\boldsymbol{P}_x}\boldsymbol{a}_i\right)+\right.\\ &\left.f\left(\bar{\boldsymbol{x}}-\sqrt{(n+2+\sqrt{2n+4})\boldsymbol{P}_x}\boldsymbol{a}_i\right)\right)+\\ &\frac{n}{4(n+1)(n+2-\sqrt{2n+4})}\cdot\\ &\sum_{i=1}^{n+1}\left(f\left(\bar{\boldsymbol{x}}+\sqrt{(n+2-\sqrt{2n+4})\boldsymbol{P}_x}\boldsymbol{a}_i\right)+\right.\\ &\left.f\left(\bar{\boldsymbol{x}}-\sqrt{(n+2-\sqrt{2n+4})\boldsymbol{P}_x}\boldsymbol{a}_i\right)\right)\end{aligned} \tag{15}$$

特别的，当式(9)中的 $p=1$ 时，可以解得 $t_1=n/2$，$A_1=\Gamma(n/2)$，进而可推导出文献[11,15]中的球面单形-径向容积准则。由此可见，本文提出的球面单形-径向容积求积分准则的精度要高于球面单形-径向容积准则。

用 $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{a}_1\quad\boldsymbol{a}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{a}_{n+1}]$ 表示由 $\boldsymbol{a}_l$ 组成的矩阵，用 $[\cdot]_i$ 表示矩阵的第 $i$ 列，利用准则式(15)构造容积点 $\hat{\boldsymbol{x}}^{(i)}$ 和权值 $\omega_i$ 分别为

http://bhxb.buaa.edu.cn

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{(i)}=\begin{cases}\bar{\boldsymbol{x}}+\sqrt{(n+2+\sqrt{2n+4})\boldsymbol{P}_x}\left[\boldsymbol{a}\quad -\boldsymbol{a}\right]_i \\ \qquad i=1,2,\cdots,2n+2\\ \bar{\boldsymbol{x}}+\sqrt{(n+2-\sqrt{2n+4})\boldsymbol{P}_x}\left[\boldsymbol{a}\quad -\boldsymbol{a}\right]_{i-2n-2}\\ \qquad i=2n+3,2n+4,\cdots,4n+4\end{cases} \tag{16}$$

$$\omega_i=\begin{cases}\dfrac{n}{4(n+1)(n+2+\sqrt{2n+4})}\\ \qquad i=1,2,\cdots,2n+2\\ \dfrac{n}{4(n+1)(n+2-\sqrt{2n+4})}\\ \qquad i=2n+3,2n+4,\cdots,4n+4\end{cases} \tag{17}$$

### 2.2　DSSRCQKF 算法

由状态方程式(2)和量测方程式(4)构成如下滤波系统方程,为了使算法研究更具有一般性,考虑状态向量 $\boldsymbol{x}_k\in\mathbf{R}^n$,量测向量 $\boldsymbol{z}_k\in\mathbf{R}^c$,同时为了使公式的表述更为简洁,在没有歧义的情况下省略下标 $d$。

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}_k=f(\boldsymbol{x}_{k-1})+\boldsymbol{w}_k\\ \boldsymbol{z}_k=h(\boldsymbol{x}_k)+\boldsymbol{v}_k\end{cases} \tag{18}$$

式中:$\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 为不相关的零均值高斯白噪声,其协方差矩阵分别为 $\boldsymbol{Q}_k$ 和 $\boldsymbol{R}_k$。利用统计线性误差传播方法可以得到交叉协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_{xz}$ 的等价表达式 $\boldsymbol{P}_{xz}\approx\boldsymbol{P}_k^-\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}$,从而定义伪观测矩阵 $\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{P}_{xz}^{\mathrm{T}}\cdot(\boldsymbol{P}_k^-)^{-1}$,将式(16)和式(17)所示的容积点和权值嵌入 DEKF[5] 的更新过程可以得到如下 DSSRCQKF 算法,具体计算步骤如下:

**步骤 1**　滤波初始化。

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{x}}_0^+=E(\boldsymbol{x}_0)\\ \boldsymbol{P}_0^+=E((\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}_0^+)(\boldsymbol{x}_0-\hat{\boldsymbol{x}}_0^+)^{\mathrm{T}})\end{cases} \tag{19}$$

循环 $k=1,2,\cdots$,完成以下步骤。

**步骤 2**　时间更新。分别利用 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^+$ 和 $\boldsymbol{P}_{k-1}^+$ 代替式(16)中的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{P}_x$ 计算容积点 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)}$,并利用 $f(\cdot)$ 计算其非线性传递:

$$\boldsymbol{X}_k^{(i)}=f(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^{(i)}) \tag{20}$$

按照式(17)中 $\omega_i$ 的取值加权合并 $\boldsymbol{X}_k^{(i)}$ 得到先验状态估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^-=\sum_{i=1}^{4n+4}(\omega_i\boldsymbol{X}_k^{(i)}) \tag{21}$$

计算先验状态协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^-$:

$$\boldsymbol{P}_k^-=\sum_{i=1}^{4n+4}(\omega_i(\boldsymbol{X}_k^{(i)}-\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)(\boldsymbol{X}_k^{(i)}-\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)^{\mathrm{T}})+\boldsymbol{Q}_{k-1} \tag{22}$$

**步骤 3**　量测更新。分别利用 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^-$ 和 $\boldsymbol{P}_k^-$ 代替式(16)中的 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 和 $\boldsymbol{P}_x$ 计算容积点 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}$,并利用 $h(\cdot)$ 计算其非线性传递:

$$\boldsymbol{Z}_k^{(i)}=h(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}) \tag{23}$$

按照式(17)中 $\omega_i$ 的取值加权合并 $\boldsymbol{Z}_k^{(i)}$ 得到量测预测值 $\hat{\boldsymbol{z}}_k$:

$$\hat{\boldsymbol{z}}_k=\sum_{i=1}^{4n+4}(\omega_i\boldsymbol{Z}_k^{(i)}) \tag{24}$$

计算交叉协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_{xz}$:

$$\boldsymbol{P}_{xz}=\sum_{i=1}^{4n+4}(\omega_i(\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}-\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)(\boldsymbol{Z}_k^{(i)}-\hat{\boldsymbol{z}}_k)^{\mathrm{T}}) \tag{25}$$

**步骤 4**　与邻居星进行信息交互。向邻居星发送信息 $\boldsymbol{m}_k=(\boldsymbol{i}_k\quad \boldsymbol{I}_k\quad \hat{\boldsymbol{x}}_k^-)$,并从邻居星接收信息,其中,$\boldsymbol{I}_k$ 和 $\boldsymbol{i}_k$ 定义为

$$\begin{cases}\boldsymbol{I}_k=\widehat{\boldsymbol{H}}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}\widehat{\boldsymbol{H}}_k=(\boldsymbol{P}_k^-)^{-1}\boldsymbol{P}_{xz}\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{P}_{xz}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_k^-)^{-1}\\ \boldsymbol{i}_k=\widehat{\boldsymbol{H}}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_k^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_k+\widehat{\boldsymbol{H}}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)=\\ \qquad (\boldsymbol{P}_k^-)^{-1}\boldsymbol{P}_{xz}\boldsymbol{R}_k^{-1}[\boldsymbol{\varepsilon}_k+\boldsymbol{P}_{xz}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}_k^-)^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_k^-]\end{cases} \tag{26}$$

式中:$\boldsymbol{\varepsilon}_k=\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_k$ 为滤波新息;$\boldsymbol{R}_k$ 为量测误差协方差矩阵。

**步骤 5**　对接收到的信息进行融合。

$$\begin{cases}\boldsymbol{d}_k=\sum_{j\in J_d}\boldsymbol{i}_{j,k}\\ \boldsymbol{S}_k=\sum_{j\in J_d}\boldsymbol{I}_{j,k}\end{cases} \tag{27}$$

**步骤 6**　状态更新。计算后验协方差矩阵 $\boldsymbol{P}_k^+$:

$$\boldsymbol{P}_k^+=[(\boldsymbol{P}_k^-)^{-1}+\boldsymbol{S}_k]^{-1} \tag{28}$$

计算后验状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^+$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^+=\hat{\boldsymbol{x}}_k^-+\boldsymbol{P}_k^+(\boldsymbol{d}_k-\boldsymbol{S}_k\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)+\gamma\boldsymbol{P}_k^-\sum_{j\in N_d}(\hat{\boldsymbol{x}}_{j,k}^--\hat{\boldsymbol{x}}_k^-) \tag{29}$$

式中:$\gamma=\dfrac{\varepsilon}{1+\|\boldsymbol{P}_k^-\|_{\mathrm{F}}}$,$\varepsilon$ 为一个小量,$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 为矩阵的 Frobenius 范数。

从式(18)可以看出,本文算法并没有对非线性函数的具体形式进行约束,因此 DSSRCQKF 算法不仅适用于本文所述的多星对合作目标的协同导航问题,同样可以应用于传感器网络目标跟踪、编队卫星协同导航和地基测控协同定轨等非线性系统协同滤波问题。

## 3　仿真实验

图 2 为某型号卫星的地面实验模拟器,其上运行的高精度轨道预报算法经过实际飞行任务的检验,是可靠的仿真实验数据来源。仿真中考虑

http://bhxb.buaa.edu.cn

4 颗导航星和 1 颗目标星,其轨道六根数见表 1。仿真时间为 1 Jul 2016 12:00:00/UTC 至 1 Jul 2016 13:30:00/UTC,4 颗导航星间的通信拓扑关系如图 3 所示,假设星间测距精度为 20 m。

滤波初值为

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0^+ = (4\,998\,111 \quad 14\,981\,098 \quad 4\,679\,448 \quad -4\,528\,939 \quad 1\,715)^{\mathrm{T}}$$

初始协方差矩阵为

$$\boldsymbol{P}_0^+ = \mathrm{diag}(10^6 \quad 10^6 \quad 10^6 \quad 10^3 \quad 10^3 \quad 10^3)$$

对比本文提出的 DSSRCQKF 算法与 DEKF 算法,参数 $\varepsilon$ 取为 0.01,用均方根误差(RMSE)描述导航星对目标星的实时定轨精度,运行 200 次 Monte Carlo 仿真,仿真结果如图 4~图 7 所示。统计平均定轨 RMSE,并分别列于表 2 和表 3。从仿真结果可以看出,本文 DSSRCQKF 算法实时定位精度约为19 m,定速精度约为1.71 m/s,而

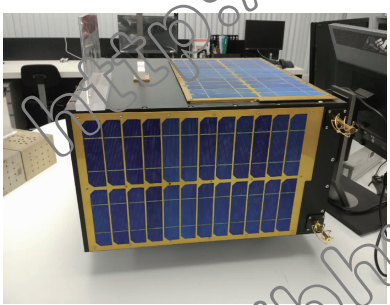


图 2 卫星地面实验模拟器

Fig. 2 Satellite simulator for ground experiment

表 1 卫星轨道六根数

Table 1 Six orbital elements of satellites

| 卫 星 | 半长轴/km | 偏心率 | 轨道倾角/(°) | 升交点赤经/(°) | 近地点幅角/(°) | 真近点角/(°) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 目标星 | 16 378.1 | 0 | 27 | 35 | 30 | 10 |
| 导航星 1 | 15 378.1 | 0 | 45 | 60 | 0 | 0 |
| 导航星 2 | 15 378.1 | 0 | 10 | 60 | 15 | 20 |
| 导航星 3 | 15 378.1 | 0 | 38 | 60 | 20 | 0 |
| 导航星 4 | 15 378.1 | 0 | 70 | 60 | 30 | 0 |

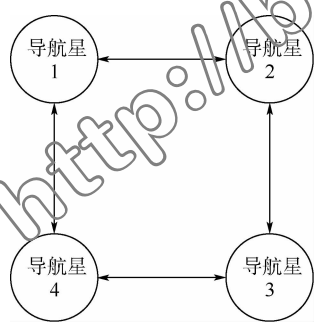



图 3 4 颗导航星间的通信拓扑结构

Fig. 3 Communication topology structure among four navigation satellites

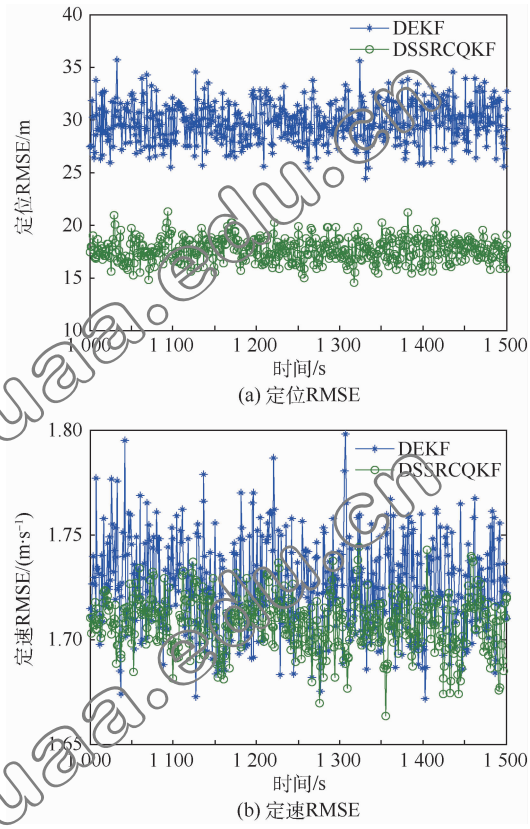



图 4 导航星 1 对目标星的实时定轨 RMSE

Fig. 4 Real-time orbit determination RMSE of navigation Satellite 1 to target satellite

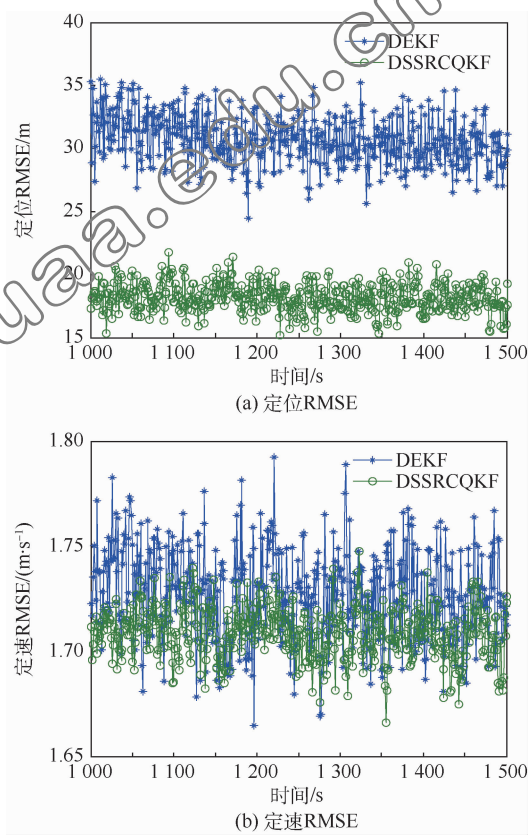
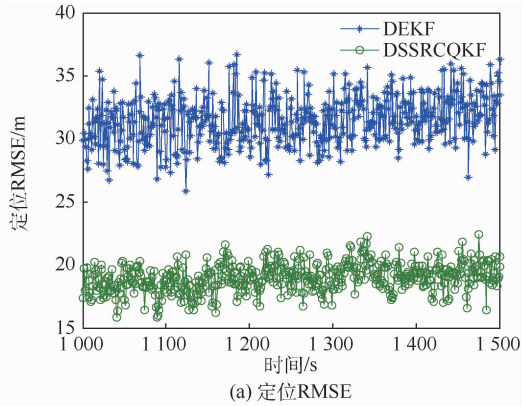


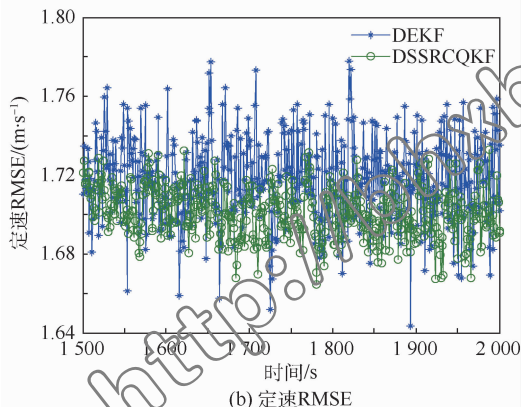

图 5 导航星 2 对目标星的实时定轨 RMSE

Fig. 5 Real-time orbit determination RMSE of navigation Satellite 2 to target satellite

http://bhxb.buaa.edu.cn



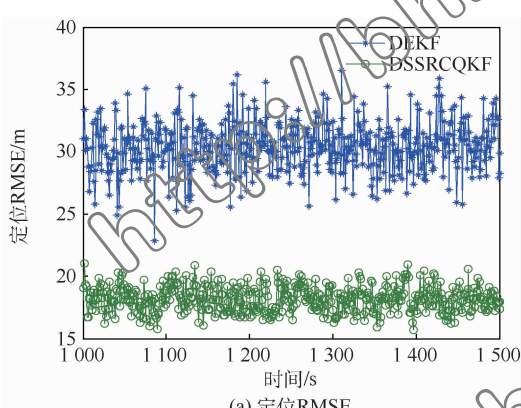
(a) 定位RMSE



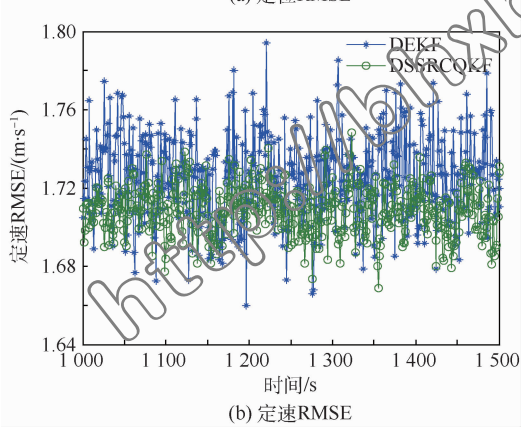
(b) 定速RMSE

图 6　导航星 3 对目标星的实时定轨 RMSE

Fig. 6　Real-time orbit determination RMSE of navigation Satellite 3 to target satellite



(a) 定位RMSE



(b) 定速RMSE

图 7　导航星 4 对目标星的实时定轨 RMSE

Fig. 7　Real-time orbit determination RMSE of navigation Satellite 4 to target satellite

表 2　协同导航平均定位 RMSE

Table 2　Mean position RMSE of coordinated navigation

| 导航星 | 平均定位 RMSE/m | |
|---|---|---|
| | DEKF | DSSRCQKF |
| 导航星 1 | 30.775 | 18.633 |
| 导航星 2 | 30.679 | 18.166 |
| 导航星 3 | 31.456 | 18.969 |
| 导航星 4 | 30.393 | 18.189 |

表 3　协同导航平均定速 RMSE

Table 3　Mean velocity RMSE of coordinated navigation

| 导航星 | 平均定速 RMSE/(m·s⁻¹) | |
|---|---|---|
| | DEKF | DSSRCQKF |
| 导航星 1 | 1.726 | 1.708 |
| 导航星 2 | 1.727 | 1.709 |
| 导航星 3 | 1.727 | 1.709 |
| 导航星 4 | 1.725 | 1.706 |

DEKF 算法定位精度约为 30 m,定速精度约为 1.73 m/s,从而表明本文算法具有更高的导航精度。对于多星协同导航问题,2 种算法通过导航星间的分布式通信与数据融合,均可实现对目标星轨道状态的一致估计。每颗导航星的估计结果基本相同,结果间细微的差别主要由系统的非线性引起,因为在非线性卡尔曼滤波中,假设后验概率密度服从高斯分布,本质上是一种次优滤波方法,无法像线性卡尔曼滤波一样得到理论上的最优估计。而且为了将非线性卡尔曼滤波嵌入分布式滤波中而引入的伪观测矩阵同样会带来一些误差,但每颗导航星估计值间的差别在应用中是可以接受的。从导航星间的通信拓扑结构可以看出,每颗导航星仅与其邻居星通信,滤波中间数据在整个无线网络中分布式流动,从而避免了将所有数据发送到融合中心的集中式处理,提高了系统的灵活性。

## 4　结　论

1)本文将球面单形准则与高斯-拉盖尔求积分准则相结合,提出一种新的球面单形-径向容积求积分准则,并将该准则嵌入 DKF 框架,得到一种适用于多星对空间目标协同导航的 DSSRCQKF 算法。该算法要求每颗导航星仅与其邻居星进行通信和数据融合,通过数据的分布式流动实现对目标星轨道状态的一致估计,从而避免了传统集中式处理中较高的通信和计算压力。

2)仿真实验结果表明,本文 DSSRCQKF 算法中各导航星对目标星的实时定位精度约为 19 m,定速精度约为 1.71 m/s。DEKF 算法中各导

http://bhxb.buaa.edu.cn

航星对目标星的定位精度约为30 m,定速精度约为1.73 m/s,相比之下本文算法将定位精度提高了11 m,定速精度提高了0.02 m/s,从而验证了本文算法的有效性。

3)本文提出的DSSRCQKF算法还可以进一步应用于其他非线性系统协同滤波问题。

## 参考文献(References)


[1] 王晓初,尤政,赵开春,等.分布式卫星系统的协同导航估计方法[J].宇航学报,2013,34(8):1107-1113.
WANG X C,YOU Z,ZHAO K C,et al. A cooperative navigation estimation method in distributed satellite system[J]. Journal of Astronautics,2013,34(8):1107-1113(in Chinese).

[2] 张艾,李勇.基于星间测距的编队卫星一致性导航算法[J].空间控制技术与应用,2015,41(3):24-27.
ZHANG A,LI Y. A consensus navigation algorithm for spacecraft formation based on distance ranging[J]. Aerospace Control and Application,2015,41(3):24-27(in Chinese).

[3] ZHOU Z W,FANG H T,HONG Y G. Distributed estimation for moving target based on state-consensus strategy[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2013,58(8):2097-2100.

[4] OLFATI-SABER R. Distributed Kalman filtering for sensor networks[C]// Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway,NJ: IEEE Press,2007:5492-5496.

[5] BATTISTELLI G,CHISCI L. Stability of consensus extended Kalman filtering for distributed state estimation[C]// Preprints of the 19th World Congress the International Federation of Automatic Control. Amsterdam:Elsevier,2014:5520-5525.

[6] JULIER S J,UHLMANN J K,DURRANTWHYTE H F. A new method for nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2000,45(3):477-482.

[7] ARASARATNAM I,HAYKIN S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2009,54(6):1254-1269.

[8] ZAREI J,SHOKRI E. Convergence analysis of non-linear filtering based on cubature Kalman filter[J]. IET Science,Measurement & Technology,2015,9(3):294-305.

[9] 钱华明,黄蔚,葛磊,等.基于四元数平方根容积卡尔曼滤波的姿态估计[J].北京航空航天大学学报,2013,39(5):646-649.
QIAN H M,HUANG W,GE L,et al. Attitude estimation based on quaternion square-root cubature Kalman filter[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2013,39(5):646-649(in Chinese).

[10] 方君,戴邵武,许文明,等.基于ST-SRCKF的超高速强机动目标跟踪算法[J].北京航空航天大学学报,2016,42(8):1698-1708.
FANG J,DAI S W,XU W M,et al. Highly maneuvering hypervelocity-target tracking algorithm based on ST-SRCKF[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics,2016,42(8):1698-1708(in Chinese).

[11] WANG S Y,FENG J C,CHI K T. Spherical simplex-radial cubature Kalman filter[J]. IEEE Signal Processing Letters,2014,21(1):43-46.

[12] SHOVAN B,SWATI. Cubature quadrature Kalman filter[J]. IET Signal Processing,2013,7(7):533-541.

[13] BATTISTELLI G,CHISCI L,MUGNAI G,et al. Consensus-based linear and nonlinear filtering[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2015,60(5):1410-1415.

[14] 李璟璟,张迎春,郑靖,等.基于信息融合的大椭圆轨道卫星组合导航方法[J].宇航学报,2012,33(9):1234-1239.
LI J J,ZHANG Y C,ZHENG J,et al. An information fusion based integrated navigation method for highly elliptical orbit satellite[J]. Journal of Astronautics,2012,33(9):1234-1239(in Chinese).

[15] 朱奇光,袁梅,王梓巍,等.机器人球面单径容积FastSLAM算法[J].机器人,2015,37(6):709-716.
ZHU Q G,YUAN M,WANG Z W,et al. A robot spherical simplex-radial cubature FastSLAM algorithm[J]. Robot,2015,37(6):709-716(in Chinese).



**作者简介:**

**李兆铭** 男,博士研究生。主要研究方向:航天测控最优状态估计。

**杨文革** 男,博士,教授,博士生导师。主要研究方向:先进数字信号处理技术。

**丁丹** 男,博士,讲师。主要研究方向:先进数字信号处理技术。

**廖育荣** 男,硕士,教授。主要研究方向:军事航天技术。


http://bhxb.buaa.edu.cn

# Distributed coordinated navigation filtering algorithm for cooperative target by multi-satellite

LI Zhaoming[1], YANG Wenge[2,*], DING Dan[2], LIAO Yurong[2]

(1. Graduate School, Academy of Equipment, Beijing 101416, China;
2. Department of Optical and Electrical Equipment, Academy of Equipment, Beijing 101416, China)

**Abstract**: A distributed spherical simplex-radial cubature quadrature Kalman filter (DSSRCQKF) was proposed aiming at the coordinated navigation problem for cooperative target by multi-satellite on orbit. The spherical simplex rule and second-order Gauss-Laguerre quadrature rule were adopted to calculate the spherical integral and radial integral, respectively, in order to calculate the Gaussian weighted integral in nonlinear Kalman filter, and a novel spherical simplex-radial cubature quadrature rule was put forward. Combined with the nonlinear cooperative navigation mathematical model, the above rule is embedded into the distributed Kalman filter framework to achieve the DSSRCQKF, in which the satellite only needs to communicate with its neighbors. The consensus estimation of the orbital state of the target satellite is achieved using the distributed data fusion method, thus avoiding the higher communication and computational burden in centralized filter. The simulation results show that, compared with the distributed extended Kalman filter, DSSRCQKF improves the real-time positioning accuracy by 11 m and the velocity accuracy by 0.02 m/s, which verifies the validity of the proposed algorithm.

**Keywords**: distributed coordinated navigation; cubature Kalman filter; spherical simplex; Gauss-Laguerre quadrature; nonlinear system

http://bhxb.buaa.edu.cn

**Received**: 2017-03-14; **Accepted**: 2017-06-16; **Published online**: 2017-07-14 19:12

**URL**: kns.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20170714.1912.003.html

**Foundation item**: National High-tech Research and Development Program of China (2015AA7026085)

* **Corresponding author**. E-mail: wengeyang_3@163.com