http://bhxb.buaa.edu.cn jbuaa@buaa.edu.cn
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2024.0230

基于牛顿-欧拉递推算法的高置信度斜铰旋翼动力学模型

杨毅松，李建波*，段登燕
(南京航空航天大学 航空学院 直升机动力学全国重点实验室，南京 210016)

摘　　要：斜铰旋翼无需自动倾斜器，仅通过电机加减速变化就能实现周期变距操控，结构复杂性低，但引入斜铰后，旋翼摆振、变距相耦合，使斜铰旋翼动力学建模更加复杂。针对现有建模方法中正、反桨叶间挥舞差异揭示不充分、模型预测精度不高的问题，基于改进的Denavia-Hartenberg方法建立桨叶局部连杆坐标系，采用牛顿-欧拉递推动力学算法，在局部连杆坐标系下，对斜铰旋翼连杆系统向外递推计算各连杆的速度和加速度，向内递推计算各连杆间的相互作用力、力矩，构建斜铰旋翼动力学模型。在此基础上，通过仿真计算，进一步揭示了斜铰旋翼周期变距机理。计算结果表明：所提模型可以更加准确地预测正、反桨叶间挥舞差异；对于桨叶摆振运动幅值的预测精度提高了9.05%。

关　键　词：斜铰旋翼；无自动倾斜器；摆振-变距耦合；动力学模型；周期变距控制
中图分类号：V275+.1
文献标志码：A　　**文章编号**：1001-5965(2026)06-2024-10

直升机可以垂直起降、悬停作业，具有优秀的点对点运输能力，且低空机动性能优异，在军事、抢险救护、民用运输等领域取得了广泛应用[1]。近年来，随着微电子系统的蓬勃发展[2]及微小型飞行器应用场景的不断拓宽，在航拍摄影、物流运输等领域的应用取得了长足进步，使微小型飞行器吸引了许多研究人员的注意，已经成为热门的研究方向[3]。得益于直升机优异的悬停能力，将其微小型化后，应用在军事侦察、民用航拍摄影等领域的潜力巨大。这也对直升机的微小型化发展提出了新的需求。

目前，直升机微小型化面临的技术难点为微型无人直升机的结构和制造工艺[4]。传统大型直升机主要通过自动倾斜器与舵机的配合来实现桨叶的周期变距效果，虽然直接将自动倾斜器小型化后应用于小型直升机上已被证实是可行的[5-6]，但简单地将操纵机构进行等比例缩小再应用于微小型直升机上的效果并不理想。这是因为自动倾斜器具有结构复杂、质量较大、加工成本高的缺点，将其等比例缩小应用于微小型直升机上时，受限于小尺寸零件的加工水平和加工成本，这些缺点会被进一步放大。同时，自动倾斜器还需要依靠多套舵机配合来实现桨叶的周期变距，进一步制约了其在微小型直升机上的发展。

本文研究的斜铰旋翼是一种新型的周期变距装置，由于其独特的机械结构，使旋翼的摆振运动与变距运动相耦合，在无需自动倾斜器等机构的情况下，仅仅依托电机加减速的变化，就能实现旋翼的周期变距操控。斜铰旋翼可以大大简化旋翼系统的复杂性，降低成本，减轻质量，为直升机周期变距机构的微小型化提供一种简单可行的方案。

斜铰旋翼方案最早于2013年由宾夕法尼亚大学的Paulos和Yim提出，并成功运用于共轴双旋翼直升机上，从工程实现的角度对该方案进行了阐

收稿日期：2024-04-18；录用日期：2024-05-24；网络出版时间：2024-06-20 11:29
网络出版地址：link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20240619.1210.001
*通信作者. E-mail：ljb101@nuaa.edu.cn

引用格式：杨毅松，李建波，段登燕. 基于牛顿-欧拉递推算法的高置信度斜铰旋翼动力学模型[J]. 北京航空航天大学学报，2026，52(6)：2024-2033. YANG Y S，LI J B，DUAN D Y. Dynamic model of high confidence tilt-hinge rotor based on Newton-Euler recursion algorithm[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics，2026，52(6)：2024-2033 (in Chinese).

述[7]，证明了斜铰旋翼方案的有效性。在后续的飞行实验中，该团队对搭载斜铰旋翼方案的飞行器进行了飞行性能测试，实验表明，由于斜铰旋翼方案相较于自动倾斜器方案的结构质量更低，因此，可以搭载更大的机载电池，获得更长的续航时间[8]。得益于斜铰旋翼简单的机械构造，其在微小型直升机领域颇具优势。在国内，国防科技大学的尹欣繁[9]、北京邮电大学的黄灿铭[10]开展了斜铰旋翼方案的相关跟踪研究，并开展了工程复现实验，实现了斜铰旋翼方案在单旋翼带尾桨、纵列式双旋翼直升机上的应用。南京航空航天大学的王彪教授团队[11-14]开展了相关的驱动单元转速控制、有效操纵力矩生成规律、斜铰旋翼在无人直升机上的应用等方面的研究。斜铰旋翼方案已经在多种构型的直升机上实现了应用，证明了该方案的可行性。

当前对于斜铰旋翼方案的研究中，大部分还停留在工程实现的应用阶段，有关斜铰旋翼的变距机理阐述及动力学模型建立方面的工作内容还相对较少，且已经建立的动力学模型中，对于斜铰旋翼的正、反桨挥舞差异性的揭示并不充分。文献 [15] 假设正、反桨叶近似对称，以一侧旋翼为研究对象建立了旋翼动力学模型，并与实验结果进行了比对，实验结果中正、反桨叶的挥舞差异性并未在动力学模型中体现出来。南京航空航天大学的 Yu 等[16]采用正、反桨叶对称的近似假设，以一侧旋翼为研究对象，建立了斜铰旋翼的非线性动力学模型，相较于文献 [15] 中的动力学模型，显著提升了桨叶挥舞相位的预测精度，但该动力学模型对正、反桨叶间挥舞运动差异性的揭示并不充分，对反桨挥舞运动的预测并不准确。

开展动力学研究工作是进行旋翼结构参数优化设计及桨叶运动仿真的基础。针对现有模型对正、反桨叶间挥舞差异预测不准确的问题，本文通过在斜铰旋翼上建立多个局部坐标系，借由局部坐标系可以更准确地描述由于斜铰引入而导致的复杂桨叶姿态变化，进而通过牛顿-欧拉递推动力学算法完成旋翼的动力学建模；设计斜铰旋翼周期变距操纵仿真实验，以验证动力学模型的正确性；将动力学模型仿真计算结果与文献 [15] 中的实验数据进行比对，对动力学模型的准确性进行检验。

1　桨叶运动学

本节给出基于改进的 Denavia-Hartenberg 方法（简称 D-H 法）建立的连杆坐标系及由连杆运动学方程得到的桨叶姿态随关节角度的变化关系式。

1.1　斜铰旋翼结构及周期变距原理

如图 1 所示，斜铰旋翼的构造较为简单，仅由桨毂、对称布置的挥舞铰、反对称布置的倾斜铰、桨夹、桨叶组成。将倾斜轴线与桨毂转轴上侧轴线相交的一侧桨叶定义为正桨，反之，定义为反桨。

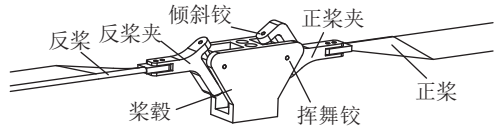


图 1　斜铰旋翼结构示意

Fig. 1　Tilt-hinge rotor structure diagram

斜铰旋翼在周期变距的实现上与自动倾斜器不同。斜铰旋翼由于斜置放置的倾斜铰使桨叶的摆振运动与变距运动相耦合。当电机做加速运动时，由于惯性，正、反桨叶均滞后于桨毂，正桨桨距增加，反桨桨距减小；而当电机做减速运动时，桨叶的桨距变化情况与之相反。通过调制电机转速，使电机在特定位置进行加、减速运动，使桨叶桨距呈周期性变化，即可实现与自动倾斜器类似的周期变距效果。

1.2　连杆坐标系

为能以关节转角解算桨叶运动姿态，以及后续的动力学分析，将桨毂、桨叶简化为连杆机构。对斜铰旋翼系统进行如下简化：①忽略桨叶弹性变形，连杆为均匀刚体，质量均匀分布；②连杆结构严格对称；③连杆重心与中心重合。

对连杆、关节进行如下命名：将桨毂旋转轴定义为关节 1，将正桨的挥舞铰、倾斜铰分别定义为关节 2、3，将反桨的挥舞铰、倾斜铰分别定义为关节 2N、3N。同时，将关节 2N 至关节 2 的桨毂部分定义为连杆 1，将关节 2 至关节 3 部分定义为连杆 2，将关节 2N 至关节 3N 部分定义为连杆 2N，将正、反桨桨叶分别定义为连杆 3、3N。定义后的关节命名如图 2 所示，其中，θ_1 为关节 1 的转动角度，θ_2、θ_3、θ_{2N}、θ_{3N} 分别为关节 2、关节 3、关节 2N、关节 3N 的转动角度。

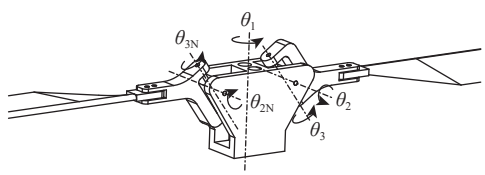


图 2　斜铰旋翼关节命名

Fig. 2　Naming of tilt-hinge rotor joints

机器人运动学中，普遍采用 D-H 法进行坐标系的建立，其是由 Denavia 和 Hartenberg 在 1955 年提出的用于描述低副机构的方法，该方法在约束运动副的杆件上建立局部坐标系，采用 4 个参数来描

述附加坐标系之间的变换矩阵。通过四阶齐次变换矩阵来描述连杆的空间几何关系。本节使用改进的 D-H 法进行坐标系的建立。坐标系如图 3 所示，以下角标 N 对正、反桨叶坐标系进行区分，对于坐标系中重合的轴，以逗号对其进行分隔，如 $x_{2,3}$表示坐标系 2、3 的 x 轴，$x_{2N,3N}$表示坐标系 2N、3N 的 x 轴。

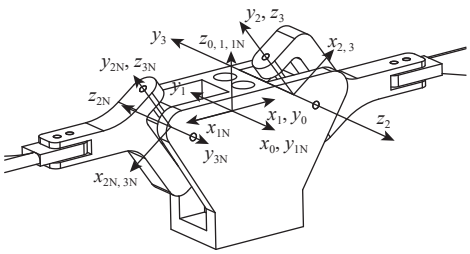


图 3 斜铰旋翼连杆坐标系

Fig. 3 Tilt-hinge rotor linkage coordinate system

由图 3 建立的坐标系得到的连杆 D-H 参数如表 1 所示。其中，连杆长度L_{i-1}为沿x_i轴从z_i移动到z_{i+1}的距离，关节扭角α_{i-1}为绕x_i轴从z_i旋转到z_{i+1}的角度，连杆之间的距离d_i为沿z_i轴从x_{i-1}移动到x_i的距离，关节变量θ_i为绕z_i轴从x_{i-1}旋转到x_i的角度，L_1为连杆 1 长度，即正桨挥舞铰到反桨挥舞铰的距离，δ为倾斜铰的倾斜角度。

表 1 连杆坐标系的 D-H 参数

Table 1 D-H parameters of linkage coordinate system

坐标系	L_{i-1}	α_{i-1}/(°)	d_i	θ_i/(°)
0 → 1	0	0	0	$90+\theta_1$
1 → 2	$L_1/2$	90	0	$\delta+\theta_2$
2 → 3	0	−90	0	θ_3
0 → 1N	0	0	0	θ_1-90
1N → 2N	$L_1/2$	90	0	$-\delta+\theta_{2N}$
2N → 3N	0	−90	0	θ_{3N}
1N → 1	0	0	0	180

位置转换矩阵[17]为

$$\boldsymbol{T}_i^{i-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & L_{i-1}\\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i\sin\alpha_{i-1}\\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i\cos\alpha_{i-1}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{T}_i^{i-1}$为位置变化矩阵，描述坐标系i相对于坐标系$i-1$的位置变换关系，如$\boldsymbol{T}_2^1$为坐标系 1 到坐标系 2 的位置变换矩阵，$\boldsymbol{T}_1^2$为坐标系 2 到坐标系 1 的位置变换矩阵。

坐标系 0 至坐标系 3 下的位置变换矩阵可表示为

$$\boldsymbol{T}_3^0=\boldsymbol{T}_1^0\cdot\boldsymbol{T}_2^1\cdot\boldsymbol{T}_3^2 \tag{2}$$

定义旋转变换矩阵为位置变换矩阵的前 3 行前 3 列，因此，旋转变换矩阵表示为

$$\boldsymbol{R}_i^{i-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0\\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}\\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}\end{bmatrix} \tag{3}$$

式中：$\boldsymbol{R}_i^{i-1}$为旋转变换矩阵，描述坐标系i相对于坐标系$i-1$的旋转变换关系，如$\boldsymbol{R}_2^1$为坐标系 1 到坐标系 2 的旋转变换矩阵，$\boldsymbol{R}_1^2$为坐标系 2 到坐标系 1 的旋转变换矩阵。

由旋转变换矩阵的性质可得

$$\boldsymbol{R}_i^{i-1}=\left(\boldsymbol{R}_{i-1}^{i}\right)^{-1}=\left(\boldsymbol{R}_{i-1}^{i}\right)^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

如此，便建立了各级连杆间的位置变换矩阵、旋转变换矩阵，以使用关节间的转动解算桨叶的挥舞、摆振、变距运动。

1.3 桨叶运动姿态分析

依据图 4 将挥舞角β_p、摆振角ζ_p、变距角θ_p分别定义为桨叶绕y_1轴负方向、z_1轴正方向、x_1轴正方向的转动角度。因此，正桨挥舞角可以表示为正桨桨叶方向向量在X_1Z_1平面的投影与x_1轴的夹角。正桨摆振角可以表示为正桨桨叶方向向量在X_1Y_1平面的投影与x_1轴的夹角。而正桨变距角可以表示为y_3轴在Y_1Z_1平面的投影与y_1轴的夹角。按照上述描述，桨叶方向向量在坐标系 1 中的表示如图 5 所示。其中，红色带箭头实线为桨叶方向向量，橙色、绿色带箭头虚线分别为其在X_1Z_1、X_1Y_1平

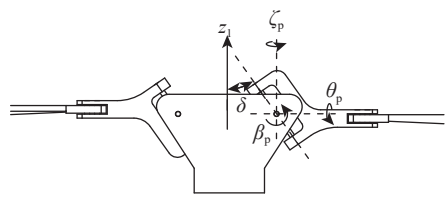


图 4 桨叶挥舞角、摆振角、变距角定义

Fig. 4 Blade flapping angle, lag angle, pitch angle definition

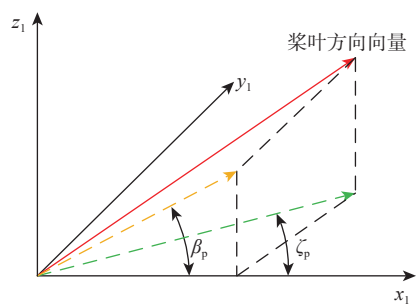


图 5 坐标系 1 中的正桨桨叶方向向量

Fig. 5 Forward blade vector in coordinate system 1

面的投影。桨叶方向向量在X_1Z_1、X_1Y_1平面上的投影与x_1轴的夹角即为对应的挥舞角、摆振角。因此, 将坐标系 3 下的对应矢量转换到坐标系 1 下计算相应夹角, 即可得到对应的挥舞角、摆振角、变距角。

依据旋转变换矩阵得到的坐标系 1 下正桨桨叶方向向量、Y_3轴向量如下:

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{pj}}^{1}=\begin{bmatrix} L_3(\sin(\delta+\theta_2)\sin\delta+\cos(\delta+\theta_2)\cos\delta\cos\theta_3) \\ L_3\cos\delta\sin\theta_3 \\ L_3(\sin(\delta+\theta_2)\cos\delta\cos\theta_3-\cos(\delta+\theta_2)\sin\delta) \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{py}}^{1}=\begin{bmatrix} -\cos(\delta+\theta_2)\sin\theta_3 \\ \cos\theta_3 \\ -\sin(\delta+\theta_2)\sin\theta_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

式中: $\boldsymbol{P}_{\mathrm{pj}}^{1}$为正桨桨叶方向向量在坐标系 1 下的向量表示, 在本文中, 左上角标默认作为向量所在坐标系的标志, 后续向量不再进行赘述; $\boldsymbol{P}_{\mathrm{py}}$为$y_3$轴向量; L_3为连杆 3 长度, 即桨叶长度。

最终得到的正桨挥舞角、摆振角、变距角分别为

$$\beta_{\mathrm{p}}=\arctan\left(\frac{\tan(\delta+\theta_2)\cos\theta_3-\tan\delta}{\tan(\delta+\theta_2)\tan\delta+\cos\theta_3}\right) \tag{7}$$

$$\zeta_{\mathrm{p}}=\arctan\left(\frac{\sin\theta_3}{\sin(\delta+\theta_2)\tan\delta+\cos(\delta+\theta_2)\cos\theta_3}\right) \tag{8}$$

$$\theta_{\mathrm{p}}=\arctan\left(\frac{-\sin(\delta+\theta_2)\sin\theta_3}{\cos\theta_3}\right) \tag{9}$$

使用同样的方法可获得反桨的挥舞角β_{n}、摆振角ζ_{n}、变距角θ_{n}表达式。至此, 通过建立连杆坐标系完成了对桨叶挥舞、摆振、变距运动的描述。

2　动力学模型

牛顿-欧拉递推动力学算法是建立在以牛顿方程和欧拉方程为基础的经典刚体动力学上, 以牛顿-欧拉方法分别建立单个刚体的动力学方程, 应用递推算法来建立多刚体系统的动力学方程。递推动力学算法可分为 2 部分: 首先, 向外递推计算各连杆的速度和加速度, 由牛顿-欧拉公式计算各连杆的惯性力和力矩; 然后, 向内递推计算各连杆相互作用的力和力矩及施加在关节上的气动力矩、摩擦力矩、电机转矩。由各关节上的力矩平衡方程, 最终可得到封闭形式下的动力学方程。

2.1　外推计算

为计算作用在连杆上的惯性力, 需要计算操作臂每个连杆的角速度、线加速度和角加速度。可应用递推方法完成计算。按照$0\to1\to2\to3$、$0\to1\mathrm{N}\to2\mathrm{N}\to3\mathrm{N}$的递推方向由坐标系 0 开始向坐标系 3、3N 方向进行递推计算, 对各个连杆上的角速度、角加速度、惯性力、惯性力矩进行计算。递推计算公式为

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{i+1}=\boldsymbol{R}_{i}^{i+1}\cdot\boldsymbol{\omega}_{i}^{i}+\dot{\theta}_{i+1}\cdot\hat{\boldsymbol{Z}}_{i+1}^{i+1} \tag{10}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}^{i+1}=\boldsymbol{R}_{i}^{i+1}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i}^{i}+\boldsymbol{R}_{i}^{i+1}\cdot\boldsymbol{\omega}_{i}^{i}\times\dot{\theta}_{i+1}\cdot\hat{\boldsymbol{Z}}_{i+1}^{i+1}+\ddot{\theta}_{i+1}\cdot\hat{\boldsymbol{Z}}_{i+1}^{i+1} \tag{11}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1}^{i+1}=\boldsymbol{R}_{i}^{i+1}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i}^{i}\times\boldsymbol{P}_{i+1}^{i}+\boldsymbol{\omega}_{i}^{i}\times(\boldsymbol{\omega}_{i}^{i}\times\boldsymbol{P}_{i+1}^{i})+\dot{\boldsymbol{v}}_{i}^{i}) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1\mathrm{c}}^{i+1}=&\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}^{i+1}\times\boldsymbol{P}_{i+1\mathrm{c}}^{i+1}+\\&\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{i+1}\times(\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{i+1}\times\boldsymbol{P}_{i+1\mathrm{c}}^{i+1})+\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1}^{i+1}\end{aligned} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{F}_{i+1}^{i+1}=m_{i+1}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1\mathrm{c}}^{i+1} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{N}_{i+1}^{i+1}=\boldsymbol{I}_{i+1}^{\mathrm{c}i+1}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}^{i+1}+\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{i+1}\times\boldsymbol{I}_{i+1}^{\mathrm{c}i+1}\cdot\boldsymbol{\omega}_{i+1}^{i+1} \tag{15}$$

式中: $\boldsymbol{\omega}_{i+1}$、$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i+1}$分别为连杆$i+1$的角速度向量、角加速度向量; $\boldsymbol{\omega}_i$、$\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$分别为上一连杆$i$的角速度向量、角加速度向量; $\dot{\theta}_{i+1}$、$\ddot{\theta}_{i+1}$分别为关节$i+1$的角速度、角加速度; $\hat{\boldsymbol{Z}}_{i+1}$为坐标系$i+1$的$z$轴单位向量; $\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1}$、$\dot{\boldsymbol{v}}_i$分别为坐标系$i+1$、$i$原点处的线加速度向量; $\boldsymbol{P}_{i+1}$为由坐标系i的原点到坐标系$i+1$原点的向量; $\dot{\boldsymbol{v}}_{i+1\mathrm{c}}$为连杆$i+1$重心处的线加速度向量; $\boldsymbol{P}_{i+1\mathrm{c}}$为由坐标系$i+1$的原点到连杆$i+1$重心位置的向量; m_{i+1}为连杆$i+1$的质量; $\boldsymbol{I}_{i+1}^{\mathrm{c}i+1}$为连杆$i+1$在连杆重心坐标系下的惯性张量, 其中, 连杆重心坐标系的原点位于连杆重心处, 各坐标轴方向与原连杆坐标系$i+1$方向相同; $\boldsymbol{F}_{i+1}$、$\boldsymbol{N}_{i+1}$分别为连杆$i+1$受到的惯性力向量、惯性力矩向量。

由于基座处于固定状态, 固定坐标系即坐标系 0 的初始角速度、角加速度均为 0, 即$\boldsymbol{\omega}_0^0=[0,\,0,\,0]^{\mathrm{T}}$、$\dot{\boldsymbol{\omega}}_0^0=[0,\,0,\,0]^{\mathrm{T}}$。同时, 为考虑连杆本身质量的影响, 令$\dot{\boldsymbol{v}}_0^0=[0,\,0,\,g]^{\mathrm{T}}$, 其中, g为重力加速度, 对固定基座施加向上的重力加速度g等同于对连杆系统施加了向下的重力。给定基座初始的状态量, 借由外推关系式 (10)～式 (15) 进行递推计算, 得到各连杆的角速度、角加速度、线加速度等信息。

2.2　气动力模型

确定连杆 3、3N 的角速度后, 根据连杆运动学关系即可得到连杆上任意一点处的速度和来流迎角, 通过叶素理论计算得到桨叶的升力。

为更方便地计算、描述气动力, 在已有坐标系基础上, 新增桨叶坐标系(即坐标系 4)及来流坐标系(即坐标系 5), 分别如图 6 和图 7 所示。坐标系 4 是在坐标系 3 的基础上旋转y_3轴, 使x_3轴与连杆 3 重合, 此时得到的新坐标系即为坐标系 4。坐标系 5 是通过旋转x_4轴, 使y_4轴与来流方向重合, 此时得到的坐标系即为坐标系 5。反桨的坐标系 4N、5N

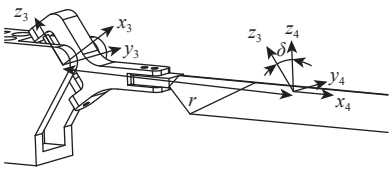


图6 桨叶坐标系

Fig. 6 Blade coordinate system

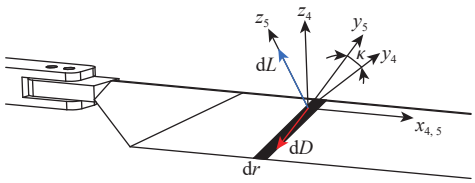


图7 来流坐标系

Fig. 7 Airflow coordinate system

建立规则与正桨一致，不再进行赘述。

在悬停状态下，通过动量叶素理论[18]得到的桨叶诱导速度表达式为

$$v_{\mathrm{ip}}=-\frac{\varpi L_{\mathrm{R}} a\sigma}{16}\left(\sqrt{1+\frac{32(\kappa_0+\theta_{\mathrm{p}})r}{a\sigma L_3}}-1\right) \tag{16}$$

式中：v_{ip}为正桨桨叶微段处的诱导速度；ϖ为旋翼的基准转速；a为翼型的升力线斜率；σ为旋翼的实度；L_{R}为桨盘半径，$L_{\mathrm{R}}=L_1/2+L_3$；r为桨叶微段距离桨叶根部处的距离；κ_0为桨叶安装角。

桨叶微段处的桨叶运动速度为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}^3=\boldsymbol{R}_1^3\cdot\boldsymbol{\omega}_1^1\times\boldsymbol{P}_2^1+\boldsymbol{\omega}_3^3\times\boldsymbol{R}_4^3\cdot\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}^4 \tag{17}$$

式中：$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$为桨叶微段处的桨叶运动速度向量；$\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}$为桨叶微段位置向量。

将桨叶速度取负，与诱导速度叠加，最终求得的来流速度为

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{L}}^4=-\boldsymbol{R}_3^4\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}^3+\boldsymbol{R}_1^4(v_{\mathrm{ip}}\cdot\hat{\boldsymbol{Z}}_1^1) \tag{18}$$

式中：$\boldsymbol{v}_{\mathrm{L}}$为来流速度向量。

由于$\boldsymbol{v}_{\mathrm{L}}$沿$x_4$轴方向的分量很小，且叶素理论中近似认为来流速度沿桨叶展向分量为0，因此，忽略$\boldsymbol{v}_{\mathrm{L}}$沿$x_4$轴方向的分量，得到来流速度大小及入流角为

$$V_{\mathrm{H}}=\sqrt{v_{\mathrm{L}z}^{4,2}+v_{\mathrm{L}y}^{4,2}} \tag{19}$$

$$\kappa=\arctan\left(\frac{v_{\mathrm{L}z}^4}{v_{\mathrm{L}y}^4}\right) \tag{20}$$

式中：V_{H}为来流合速度；κ为入流角度。由于计算来流速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{L}}$时涉及多次坐标变换，导致来流速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{L}}$的表达式过长，完全写出会过于复杂，以$v_{\mathrm{L}z}$、$v_{\mathrm{L}y}$表示来流速度$\boldsymbol{v}_{\mathrm{L}}$的$z$、$y$轴分量。

在桨叶微段dr处的气动升力dL、气动阻力dD为

$$\mathrm{d}L=\rho C_L c V_{\mathrm{H}}^2\mathrm{d}r/2 \tag{21}$$

$$\mathrm{d}D=\rho C_D c V_{\mathrm{H}}^2\mathrm{d}r/2 \tag{22}$$

式中：ρ为大气密度；c为桨叶微段位置的弦长；C_L、C_D分别为翼型的升力系数、阻力系数。

则在坐标系5下桨叶微段上的气动力向量d$\boldsymbol{f}_{\mathrm{q}}$为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\mathrm{q}}^5=\left[0,\ -\mathrm{d}D,\ \mathrm{d}L\right]^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

如式(24)和式(25)所示，对微段上的气动力、气动力矩进行积分，最终得到施加在关节3上的气动力、气动力矩：

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{q}}^3=\boldsymbol{R}_4^3\left(\int_0^{L_{\mathrm{R}}}\boldsymbol{R}_5^4\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\mathrm{q}}^5\right) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{n}_{\mathrm{q}}^3=\boldsymbol{R}_4^3\left(\int_0^{L_{\mathrm{R}}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{r}}^4\times\boldsymbol{R}_5^4\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{f}_{\mathrm{q}}^5\right) \tag{25}$$

式中：$\boldsymbol{f}_{\mathrm{q}}^3$、$\boldsymbol{n}_{\mathrm{q}}^3$分别为关节3受到的气动力、气动力矩。

使用同样方法可以得到施加在关节3N上的气动力$\boldsymbol{f}_{\mathrm{qn}}$、气动力矩$\boldsymbol{n}_{\mathrm{qn}}$。

2.3 电机模型

电机为旋翼提供克服旋翼气动阻力及斜铰旋翼进行周期变距时所需的驱动力矩，本文参考文献[15]中的无刷直流电机模型给出与之相似的电机模型：

$$\tau_{\mathrm{m}}=-c_{\mathrm{m}}\dot{\theta}_1-k_{\mathrm{m}}\theta_1+Q_0+K_{\mathrm{e}}\tilde{V}/R_{\mathrm{ohm}} \tag{26}$$

式中：τ_{m}为电机输出的驱动力矩；c_{m}、k_{m}分别为电机的阻尼系数、刚度系数；Q_0为电机的常值力矩；K_{e}、R_{ohm}分别为电机的反电动势常数、电阻；$\tilde{V}$为施加在电机上的余弦波动电压。为实现对电机转速的余弦速度调制，设定波动电压$\tilde{V}=A\cos\theta_1$，其中，A为波动电压幅值。可以通过控制波动电压幅值的大小实现对电机波动转速的控制，进而控制桨叶的挥舞、摆振幅值大小。

2.4 关节摩擦损失

在连杆相连接的关节处存在摩擦阻力，造成能量损失，因此，在旋翼动力学建模中，必须对摩擦损失进行建模。关节中的摩擦损失依据文献[15]，由摩擦阻尼系数的形式给出：

$$n_{\mathrm{m2}}=-I_\beta\varpi C_\beta\dot{\theta}_2 \tag{27}$$

$$n_{\mathrm{m3}}=-I_\beta\varpi C_\zeta\dot{\theta}_3\cos^2\delta \tag{28}$$

式中：n_{m2}、n_{m3}分别为施加在关节2、3上的摩擦力矩；I_β为桨叶的挥舞惯量；C_β、C_ζ分别为挥舞阻尼系数、摆振阻尼系数，其与铰链间的几何尺寸、摩擦

系数、挥舞和摆振幅度有关, 因此, 在不同幅值的激励电压下, 挥舞、摆振阻尼系数也不同, 两者的表达式为

$$C_\beta = \frac{6\mu_1 G_\mathrm{P}(1+e)}{\pi A_\beta (1-e)^2} \tag{29}$$

$$C_\zeta = \frac{6(\mu_1 G_\mathrm{P} + 2\mu_2 G_\mathrm{D}|\tan\delta|/3)(1+e)}{\pi A_\zeta (1-e)^2} \tag{30}$$

其中: μ_1、μ_2为摩擦系数; e为挥舞铰偏置量; G_P、G_D为铰关节的几何系数; A_β、A_ζ分别为桨叶挥舞运动幅值、桨叶摆振运动幅值, 两者均由对应条件下的实验测量结果给出。

同理, 可以得到施加在关节 2N、3N 上的摩擦力矩n_{m2N}、n_{m3N}。

2.5　内推计算

确定连杆所受到的力、力矩后, 需要计算施加在连杆上的力和力矩所对应的关节力矩, 因此, 进行内推计算。由坐标系 3、3N 向坐标系 0 方向进行内推计算。对后杆进行受力分析, 得出后杆施加给前杆的力和力矩, 通过逐级递推计算, 得到关节 1、2、3、2N、3N 处的关节力矩, 取关节力矩中 Z 方向分量, 令其为零, 可以建立 5 个以波动电压为输入量, 以关节角度、角速度、角加速度为待求解量的微分方程。

在内推计算开始时, 连杆 3 为末端连杆, 因此, 上一连杆对其施加的关节力、力矩为零。同时, 连杆 3 还受到气动力作用, 关节 3 受到摩擦力矩作用。最终, 在关节 3 处的关节力、力矩分别为

$$\boldsymbol{f}_3^3 = \boldsymbol{F}_3^3 - \boldsymbol{f}_\mathrm{q}^3 \tag{31}$$

$$\boldsymbol{n}_3^3 = \boldsymbol{N}_3^3 + \boldsymbol{P}_{3\mathrm{c}}^3 \times \boldsymbol{F}_3^3 - \boldsymbol{n}_\mathrm{q}^3 - n_{\mathrm{m3}} \cdot \boldsymbol{Z}_3^3 \tag{32}$$

式中: $\boldsymbol{f}_3$、$\boldsymbol{n}_3$分别为关节 3 处的关节力、关节力矩; $\boldsymbol{Z}_3$为坐标系 3 的 z 轴坐标向量。同理, 可得关节 3N 处的关节力$\boldsymbol{f}_{3\mathrm{N}}$和关节力矩$\boldsymbol{n}_{3\mathrm{N}}$。

计算关节 2 的关节力、关节力矩的递推表达式分别为

$$\boldsymbol{f}_2^2 = \boldsymbol{R}_3^2 \cdot \boldsymbol{f}_3^3 \tag{33}$$

$$\boldsymbol{n}_2^2 = \boldsymbol{R}_3^2 \cdot \boldsymbol{n}_3^3 - n_{\mathrm{m2}} \cdot \boldsymbol{Z}_2^2 \tag{34}$$

式中: $\boldsymbol{f}_2$、$\boldsymbol{n}_2$分别为关节 2 处的关节力、关节力矩; $\boldsymbol{Z}_2$为坐标系 2 的 z 轴坐标向量。同理, 可得关节 2N 处的关节力$\boldsymbol{f}_{2\mathrm{N}}$和关节力矩$\boldsymbol{n}_{2\mathrm{N}}$。

关节 1 处的关节力、力矩来自于关节 2、2N, 则关节 1 的关节力、关节力矩的递推表达式分别为

$$\boldsymbol{f}_1^1 = \boldsymbol{R}_2^1 \cdot \boldsymbol{f}_2^2 + \boldsymbol{R}_{2\mathrm{N}}^{1\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{f}_{2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}} + \boldsymbol{F}_1^1 \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}_1^1 = {} & \boldsymbol{N}_1^1 + \boldsymbol{R}_2^1 \cdot \boldsymbol{n}_2^2 + \boldsymbol{P}_2^1 \times \boldsymbol{R}_2^1 \cdot \boldsymbol{f}_2^2 - \tau_\mathrm{m} \cdot \boldsymbol{Z}_1^1 + \\ & \boldsymbol{R}_{1\mathrm{N}}^1 (\boldsymbol{R}_{2\mathrm{N}}^{1\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{n}_{2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}} + \boldsymbol{P}_{2\mathrm{N}}^{1\mathrm{N}} \times \boldsymbol{R}_{2\mathrm{N}}^{1\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{f}_{2\mathrm{N}}^{2\mathrm{N}})\end{aligned} \tag{36}$$

式中: $\boldsymbol{f}_1$、$\boldsymbol{n}_1$分别为关节 1 处的关节力、关节力矩; $\boldsymbol{Z}_1$为坐标系 1 的 z 轴坐标向量。

本节通过内推计算, 由末端连杆向内依次进行递推计算, 对各关节处的关节力矩进行计算, 使 5 个关节力矩的 z 轴方向分量等于 0, 最终得到了 5 个以关节角度、角速度、角加速度为待求解量的微分方程。

2.6　封闭形式下的动力学方程

将关节处的力矩平衡方程进行联立, 可将其写为封闭形式下的动力学方程组:

$$\boldsymbol{\tau}_\mathrm{t}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{V}) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta}) \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{n}_\mathrm{m}(\dot{\boldsymbol{\theta}}) - \boldsymbol{n}_\mathrm{q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \tag{37}$$

式中: $\boldsymbol{\theta} = \left[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_{2\mathrm{N}}, \theta_{3\mathrm{N}}\right]^\mathrm{T}$; $\boldsymbol{\tau}_\mathrm{t}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{V})$为5×1的电机转矩向量; $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})$为连杆的5×5质量矩阵; $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$为5×1的离心力和哥氏力向量; $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})$为5×1的重力向量; $\boldsymbol{n}_\mathrm{m}(\dot{\boldsymbol{\theta}})$为5×1的摩擦力矩向量; $\boldsymbol{n}_\mathrm{q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$为5×1的气动力矩向量。

可以进一步将式(37)改写为

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\theta})^{-1}(\boldsymbol{\tau}_\mathrm{t}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \tilde{V}) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{n}_\mathrm{m}(\dot{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{n}_\mathrm{q}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})) \tag{38}$$

可以看出, 连杆受到的气动力矩、摩擦力矩及重力、离心力、哥氏力引起的力矩仅为关节角度、角速度的函数。电机扭矩除与关节角度、角速度有关外, 还取决于激励电压。通过改变电机上的激励电压, 可以引起关节角加速度的变化, 进而引起角度、角速度的变化。

3　仿真计算

为对旋翼动力学模型的操纵规律、建模准确性进行检验, 采用文献 [15] 中的旋翼结构参数、电机特性参数、相同的 NACA0012 翼型进行仿真计算, 将仿真计算结果与文献中的实验数据进行比对, 验证模型的准确性。其中, 旋翼结构参数、电机特性参数如表 2 和表 3 所示。

3.1　旋翼周期变距规律验证

斜铰旋翼的周期变距效果来源于电机转速的周期变化, 因此, 为更好地体现模型在相同波动转速输入下的响应情况, 将电机波动转速与基准转速的比值定义为转速变化因子η, 以η作为尺度衡量同一输入下的仿真计算结果与实验数据间的差值, 进而评估动力学模型的准确性。

为验证动力学模型的正确性, 设计仿真实

表2 旋翼结构参数

Table 2 Rotor structure parameters

倾斜铰倾斜角度/(°)	桨盘半径/mm	挥舞铰偏置量	桨毂长度/mm	桨毂质量/g	桨叶半径/mm	升力线斜率	桨叶弦长/mm	桨叶安装角/(°)	旋翼实度	桨叶质量/g	大气密度/(kg·m^{-3})	挥舞惯量/(kg·m^2)	摩擦系数μ_1	摩擦系数μ_2	几何系数G_D	几何系数G_P	基准转速/(rad·s^{-1})
45	159	0.076	24.2	10.5	146.9	5.73	19.3	9	0.077 3	5.40	1.2	3.9×10^{-5}	0.20	0.07	0.012 5	0.003 3	200

表3 电机特性参数

Table 3 Motor characteristic parameter

反电动势常数/(V·(rad·s^{-1})$^{-1}$)	电阻/Ω	电机阻尼系数	电机刚度系数	电机常值力矩
0.009 54	0.305	0.001 2	0.000 94	0.014 1

验对模型的周期变距规律进行验证。在基准转速200 rad/s、转速变化因子$\eta=0.1$的情况下进行仿真实验，应用式(7)～式(9)将得到的关节转角变化曲线解算为桨叶的挥舞、摆振、变距运动变化曲线，以方位角为横坐标对不同方位角下桨叶的挥舞、摆振、变距运动变化绘制曲线。

观察图8～图10可以发现，正、反桨叶的挥舞、摆振、变距运动在电机波动转速的激励下均呈现周期性波动变化的规律。在图8中，正、反桨叶的挥舞响应近似对称分布，在方位角为90°时，正桨挥舞角达到最大值，而反桨挥舞角为最小值，在电机旋转180°后，即在方位角为−90°的情况下，反桨挥舞角取得了最大值，而正桨挥舞角为最小值。这

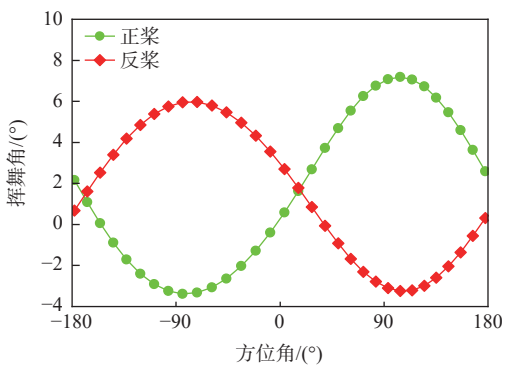


图8 桨叶挥舞角随方位角变化曲线

Fig. 8 Change curve of blade flapping angle with azimuth angle

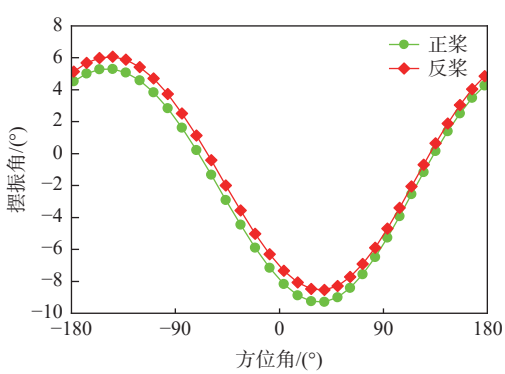


图9 桨叶摆振角随方位角变化曲线

Fig. 9 Change curve of blade swing angle with azimuth angle

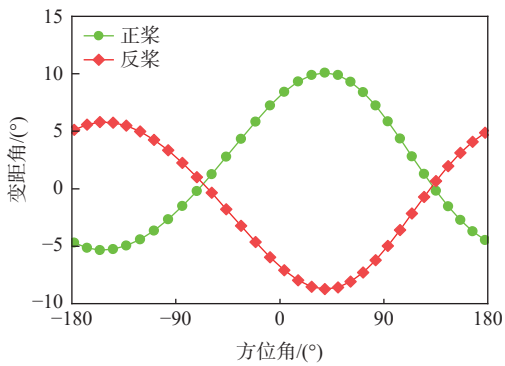


图10 桨叶变距角随方位角变化曲线

Fig. 10 Change curve of blade pitch angle with azimuth angle

种变化说明桨叶在受到波动转速的激励下，旋翼桨盘向一侧进行了倾倒。同时可以发现，正、反桨叶的挥舞曲线虽然近似对称，但反桨的挥舞运动幅度略弱于正桨，造成了正、反桨叶挥舞平面的不一致。

在图9的桨叶摆振曲线中可以发现，正、反桨叶的摆振运动近似一致，一同呈周期性变化，在方位角为45°时，正、反桨叶达到后摆的最大值，在方位角为−135°时，正、反桨叶的前摆最大。可以发现，桨叶虽然在进行前后摆振运动，但其摆振运动的均值并不等于零。正、反桨叶摆振角度的平均值都为负数，说明由于气动阻力的影响，导致正、反桨叶在恒定转速的情况下，均存在一定的稳态后摆角度。由于正、反桨叶受到的气动阻力近似相同，不同桨叶稳态后摆角度也近似一致，正、反桨叶的摆振运动呈现出一致性。

在图10的桨叶变距曲线中，正、反桨叶变距角的变化曲线呈现对称变化的规律。在45°方位角时，桨叶的后摆角度最大，此时，摆振角处于最小值，而正桨由于摆振运动与变距运动的负耦合关系，此时，正桨的变距角达到最大值，与之相反的反桨变距角由于摆振运动与变距运动的正耦合关系，取得最小值。而在方位角为−135°时，桨叶的前摆最大，正桨的变距角最小，反桨的变距角取得最大

值。这种变距角变化的差异性说明了正、反桨叶摆振-变距耦合关系的不同。同时观察变距曲线可以发现, 虽然不同桨叶上变距角的变化幅度是一致的, 但正、反桨叶变距曲线的平均值却不相同。这是由于桨叶稳态后摆角度的存在使正桨在恒定转速情况下的桨距增加, 而反桨在恒定转速下的桨距减小, 导致正、反桨叶在转速恒定时的桨距角不同, 从而使正桨变距角变化曲线的均值大于反桨变距角变化曲线的均值。

正、反桨叶的变距角均呈周期性变化, 这样的周期变距响应变化说明动力学模型计算结果呈现出了与自动倾斜器类似的周期变距效果, 验证了斜铰旋翼的周期变距操纵规律。

3.2　动力学模型准确性验证

为进一步评估斜铰旋翼动力学模型的准确性, 通过给定不同幅值下的波动电压进行动力学仿真实验, 以转速变化因子η为横坐标, 对正、反桨叶的挥舞、摆振响应幅值绘制曲线。

如图 11 所示, 本文建立的动力学模型预测得到的正、反桨叶的摆振幅值与转速变化因子η呈线性变化关系, 随着η的增大, 正、反桨叶的摆振幅值均增大。与文献 [15] 建立的动力学模型相比, 本文建立的动力学模型对摆振幅值的预测更为精准, 误差更小。在转速变化因子$\eta=0.096$的激励下, 实验测得摆振幅值为7.4°, 文献 [15]、本文动力学模型对摆振幅值的预测值分别为6.33°、7.0°。以实验测定值作为真值, 则文献 [15]中动力学模型预测摆振幅值的相对误差为14.46%。本文动力学模型预测摆振幅值的相对误差为5.41%。相较于原模型, 本文模型在大波动转速激励下的预测精度更高, 其中, 在转速变化因子$\eta=0.096$激励下, 对摆振幅值的相对误差预测精度提升了 9.05%, 应用本文动力学模型仿真计算得到的预测结果与实验测定结果间的误差较小, 且变化趋势一致。

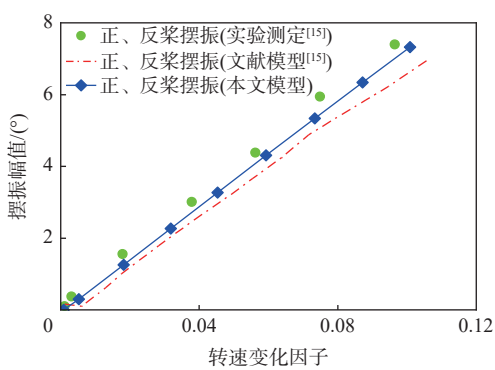


图 11　转速变化因子对摆振运动幅值的影响

Fig. 11　Influence of speed change factor on swing motion amplitude

如图 12 所示, 在波动转速为零时, 本文仿真计算得到的正、反桨叶的挥舞幅值均为零, 伴随着转速变化因子η的增大, 正、反桨叶的挥舞幅值也随之增大, 正、反桨叶的挥舞响应差异也越来越大。与文献 [15] 的预测结果相比, 本文模型对于正、反桨叶间的挥舞差异预测更为精准, 与实验结果符合更好, 说明了本文动力学模型的准确性。

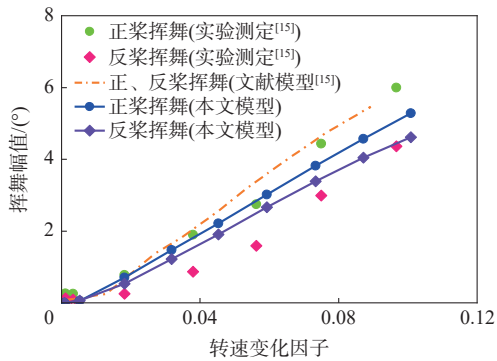


图 12　转速变化因子对挥舞运动幅值的影响

Fig. 12　Influence of speed change factor on flap motion amplitude

进一步分析正、反桨叶间挥舞运动差异性的产生原因可知, 正、反桨叶间的挥舞响应差异性来源于桨毂结构的不对称, 气动阻力的存在使桨叶与桨毂在转速恒定时存在一个固定的摆振滞后角度, 由于正、反桨叶结构的不同, 该滞后角度使正桨的变距角增加, 而反桨的变距角减小, 从而导致旋翼稳态时正桨的来流迎角大于反桨的来流迎角, 因此, 在施加同等激励的情况下, 正桨的挥舞幅值大于反桨的挥舞幅值, 这种桨间挥舞差异为旋翼带来了更剧烈的桨叶振动与桨间不平衡, 因此, 应着力减小转速恒定时桨叶的摆振滞后角度, 以减弱桨叶间的挥舞差异。

4　结　论

1) 本文采用多局部连杆坐标系方法描述斜铰旋翼复杂的桨叶摆振、变距耦合运动, 相较于原模型中采取小角度假设近似描述桨叶运动, 该方法具有更高的精准度, 对于桨叶摆振、变距运动相耦合的复杂运动现象的运动学描述效果则更为突出。

2) 在给定波动电压$\tilde{V}=A\cos\theta_1$的条件下进行周期变距仿真实验。仿真计算结果表明, 本文建立的动力学模型在周期变化的电机转速激励下, 桨叶可以产生类似于自动倾斜器的周期变距效果, 验证了本文动力学模型的正确性。

3) 本文建立的斜铰旋翼动力学模型具有较高的预测精度, 对于摆振运动幅值的预测, 在转速变化因子$\eta=0.096$的情况下, 相较于原模型的预测精

度提高了9.05%。在桨叶挥舞运动的预测方面，与原模型相比，本文模型正确模拟了正、反桨叶间的挥舞差异性，与实验测定数据符合很好。相较于原模型，本文动力学模型可以更好地模拟桨叶挥舞、摆振、变距运动现象，具有更高的置信度。

4）本文进一步分析了造成桨间挥舞差异的原因。分析表明，正、反桨间的结构差异导致的稳态时的桨叶摆振滞后角可能是造成正、反桨叶间挥舞差异的主要原因。斜铰旋翼的这种桨间挥舞差异性增大了斜铰旋翼的应用难度，在未来的研究中，应从斜铰旋翼本身结构着手以寻求削减正、反桨叶间挥舞差异性的可行方案。

参考文献（References）

[1] 邓景辉. 直升机技术发展与展望[J]. 航空科学技术, 2021, 32(1): 10-16.
DENG J H. Development and prospect of helicopter technology[J]. Aeronautical Science & Technology, 2021, 32(1): 10-16(in Chinese).

[2] 李路明, 王立鼎. MEMS研究的新进展: 微型系统及其发展应用的研究[J]. 光学精密工程, 1997, 5(1): 67-73.
LI L M, WANG L D. Microsystem and its development and applications[J]. Optics and Precision Engineering, 1997, 5(1): 67-73(in Chinese).

[3] 陈世适, 姜臻, 董晓飞, 等. 微小型飞行器发展现状及关键技术浅析[J]. 无人系统技术, 2018, 1(1): 38-53.
CHEN S S, JIANG Z, DONG X F, et al. Overview of micro aerial vehicles and its key technologies[J]. Unmanned Systems Technology, 2018, 1(1): 38-53(in Chinese).

[4] 尹欣繁, 张代兵, 张纪阳, 等. 微型无人直升机发展现状及关键技术[J]. 飞航导弹, 2018(5): 33-37.
YIN X F, ZHANG D B, ZHANG J Y, et al. Development status and key technologies of micro unmanned helicopter[J]. Aerodynamic Missile Journal, 2018(5): 33-37(in Chinese).

[5] KIM S, TILBURY D. Mathematical modeling and experimental identification of a model helicopter[C]//Proceedings of the AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. Reston: AIAA, 1998: 4357.

[6] DADKHAH N, METTLER B. System identification modeling and flight characteristics analysis of miniature coaxial helicopter[J]. Journal of the American Helicopter Society, 2014, 59(4): 36-51.

[7] PAULOS J, YIM M. An underactuated propeller for attitude control in micro air vehicles[C]//Proceedings of the 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Piscataway: IEEE Press, 2014: 1374-1379.

[8] PAULOS J, YIM M. Flight performance of a swashplateless micro air vehicle[C]//Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway: IEEE Press, 2015: 5284-5289.

[9] 尹欣繁. 无斜盘微型无人直升机设计与飞行控制研究[D]. 长沙: 国防科技大学, 2017: 5-10.
YIN X F. Design and flight control of a swashplateless micro unmanned helicopter[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2017: 5-10(in Chinese).

[10] 黄灿铭. 微小型无斜盘双旋翼飞行器的设计及实现[D]. 北京: 北京邮电大学, 2021: 10-20.
HUANG C M. Implementation of micro swashplateless twin rotor aircraft[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2021: 10-20(in Chinese).

[11] 王彪, 任至楷, 张宝晴, 等. 斜铰旋翼操纵力矩生成研究[J]. 机械制造与自动化, 2021, 50(2): 102-105.
WANG B, REN Z K, ZHANG B Q, et al. Research on the moment generation of tilt-hinge rotor[J]. Machine Building & Automation, 2021, 50(2): 102-105(in Chinese).

[12] 任至楷. 电动斜铰旋翼研发及其在无人直升机上的应用[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2020: 5-10.
REN Z K. Research and development of electric tilt-hinge rotor and its application in unmanned helicopter[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2020: 5-10(in Chinese).

[13] 徐家梁. 电动旋翼飞行器动力/推进操纵新技术研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2018: 8-18.
XU J L. Research on power/propulsion control technology of electrical-driving rotor systems[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2018: 8-18(in Chinese).

[14] 张宝晴. 基于电动斜铰旋翼的纵列式双旋翼无人直升机研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2021: 7-18.
ZHANG B Q. Research of an unmanned tandem-rotor helicopter based on electric tilt-hinge rotors[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2021: 7-18(in Chinese).

[15] PAULOS J, YIM M. Cyclic blade pitch control without a swashplate for small helicopters[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2018, 41(3): 689-700.

[16] YU J, LIU Y, YANG W D. Dynamics research on actively controlled swashplateless rotor[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering, 2019, 233(12): 4492-4508.

[17] CRAIG J J. Introduction to robotics: mechanics and control[M]. 4th ed. London: Pearson Education Inc, 2005: 70-80.

[18] LEISHMAN J G. Principles of helicopter aerodynamics[M]. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2006: 80-127.

附录 A

牛顿-欧拉递推动力学算法外推计算过程中需要用到的惯性张量为

$$\boldsymbol{I}_1^{C1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{m_1L_1^2}{48} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{m_1L_1^2}{48}\end{bmatrix} \tag{A1}$$

$$\boldsymbol{I}_2^{C2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{A2}$$

$$\boldsymbol{I}_{2\mathrm{N}}^{\mathrm{C2N}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \tag{A3}$$

$$\boldsymbol{I}_{3}^{\mathrm{C3}}=\begin{bmatrix}M_{11}&0&M_{13}\\0&M_{22}&0\\M_{13}&0&M_{33}\end{bmatrix} \tag{A4}$$

$$\boldsymbol{I}_{3\mathrm{N}}^{\mathrm{C3N}}=\begin{bmatrix}M_{11}&0&-M_{13}\\0&M_{22}&0\\-M_{13}&0&M_{33}\end{bmatrix} \tag{A5}$$

$$M_{11}=\frac{m_3L_3^2\sin^2\delta}{12} \tag{A6}$$

$$M_{13}=\frac{m_3L_3^2\sin\delta\cos\delta}{12} \tag{A7}$$

$$M_{22}=\frac{m_3L_3^2}{12} \tag{A8}$$

$$M_{33}=\frac{m_3L_3^2\cos^2\delta}{12} \tag{A9}$$

Dynamic model of high confidence tilt-hinge rotor based on Newton-Euler recursion algorithm

YANG Yisong，LI Jianbo*，DUAN Dengyan

(National Key Laboratory of Helicopter Aeromechanics，School of Aeronautics，
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016，China)

Abstract：The tilt-hinge rotor has a simpler structure because it doesn't need a swashplate and can provide cyclic pitch control just by accelerating and decelerating the motor. However, the tilt hinge coupled with the rotor lag and pitch motion complicates the modeling of rotor dynamics. However, the rotor lag and pitch motion are coupled with the tilt hinge, which makes the rotor dynamics modeling more complicated. The nearby linkage coordinate system of the blade was created based on the enhanced Denavia-Hartenberg approach in order to address the issues of low model prediction accuracy in the current modeling techniques and inadequate disclosure of the difference between forward and reverse blade flap-motion. The Newton-Euler recursion algorithm is used to calculate the velocity and acceleration of each linkage and the interaction force and torque of each linkage in the local linkage coordinate system. The dynamic model of the tilt-hinge rotor is established. On this basis, the mechanism of periodic pitch variation of the tilt-hinge rotor is further revealed through simulation calculation. At the same time, the calculation results show that this model can predict the flapping difference between forward and reverse blades more accurately. The prediction accuracy of blade lagging amplitude is improved by 9.05%.

Keywords：tilt-hinge rotor; swashplateless; lag-pitch coupling; dynamical model; cyclic pitch control

Received：2024-04-18；**Accepted**：2024-05-24；**Published Online**：2024-06-20 11：29

URL：link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20240619.1210.001

* **Corresponding author**. E-mail：ljb101@nuaa.edu.cn