http://bhxb.buaa.edu.cn jbuaa@buaa.edu.cn
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2024.0286

变推力、变充液比、贮箱倾斜状态下液体晃动分析

何家伟[1,2]，吕敬[2,*]，王天舒[3]，刘颖杰[1]

(1. 湖北省航天技术研究院总体设计所，武汉 430048；2. 北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 102206；
3. 清华大学 航天航空学院，北京 100083)

摘 要：随着航天技术的发展，新型深空探测器在起飞时会遇到2种特殊工况：发动机推力矢量的大小和方向随时间变化；发射初期，重力方向和航天器主轴线不重合。同时，飞行过程中，液体燃料不断消耗。面对上述3种工况，针对航天器贮箱内液体晃动问题，提出解决方案：在动力学建模阶段，考虑航天器平动加速度的影响，分析推力不沿航天器轴线方向的液体晃动情况；借助变等效力学模型参数方法，计算变充液比工况下的液体晃动问题；通过设定等效力学模型中单摆存在一个初始摆角，模拟贮箱倾斜时液面与贮箱轴线不垂直的状态。以Cassini贮箱为例，在半充液状态，分别计算上述3种工况下的晃动力和晃动力矩。以某型号航天器液体贮箱为例，在实际发射条件下进行晃动分析，计算结果与商用软件Flow-3D计算结果吻合较好，验证了所提计算方法的可行性。

关 键 词：等效力学模型；液体晃动；变推力；变充液比；贮箱倾斜
中图分类号：V19
文献标志码：A **文章编号**：1001-5965(2026)06-2074-09

随着航天事业不断发展，要求不断提高火箭的运载能力、延长卫星在轨时间，同时，需要提升其机动性，航天器液体燃料的质量占自身的比重也在不断增加。航天器发射、升空及正常运行时，在航天器外部运动激励下，液体燃料可能发生剧烈晃动，由此产生的晃动力和晃动力矩会对航天器造成重要影响，可能导致航天器运行姿态失控或贮液结构损坏等严重事故[1-2]。在工程上，经常涉及贮液系统的动力学计算问题，人们更多关注贮箱内液体运动如何影响结构响应，工程师往往需要寻求一种液体晃动等效力学模型，将复杂的流体运动用简单的刚体运动来代替[3]。从20世纪50年代开始，相关学者就对等效力学模型方法进行研究，并形成了一大批文献资料[4-6]。

常用的等效力学模型有弹簧-质量模型和单摆模型[4]2种。Graham等[7]采取线性势流理论，提出了矩形贮箱内液体晃动弹簧-质量模型，Housner[8]通过对Graham等[7]提出的模型进行近似计算，得到了液体晃动等效力学模型的简化计算公式，使其更利于实际操作。针对非矩形贮箱，Rattayya[9]提出了椭球形贮箱内液体晃动的弹簧-质量模型。同时，单摆模型也得到了长足发展。Mikishev[10]提出了在一维平动或转动激励下充液耦合系统的平面单摆模型。包光伟[11]通过深化Mikishev[10]的研究，将平面问题推广到空间问题，建立了平放柱形贮箱在三维晃动条件下的等效单摆模型。原则上，2种等效力学模型是等价的，但当重力加速度变化时，等效弹簧刚度会发生变化，而等效单摆摆长保持常数，因此，本文选择单摆模型。

在实际生产中，贮箱形状并不是标准统一的，对于复杂形状的贮箱，很难通过理论分析得到单摆模型的参数，虽然可以通过实验方法测量[12]，但实验成本高，测量难度较大。因此，一般采用有限元方法。包光伟等[13]利用有限元方法建立了任意形状贮箱内液体晃动固有频率和模态的计算方法。李青等[14]针对非对称贮箱的液体晃动问题，采用有

收稿日期：2024-05-06；录用日期：2024-08-09；网络出版时间：2024-09-27 12:10
网络出版地址：link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20240926.1748.003
*通信作者. E-mail：lvjing@buaa.edu.cn

引用格式：何家伟，吕敬，王天舒，等. 变推力、变充液比、贮箱倾斜状态下液体晃动分析[J]. 北京航空航天大学学报，2026，52(6)：2074-2082. HE J W，LYU J，WANG T S，et al. Analysis of liquid sloshing under variable thrust, variable filling liquid ratio, and tilted tank state[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics，2026，52(6)：2074-2082 (in Chinese).

限元方法计算液体晃动等效模型参数。在航天领域中, 借助等效力学模型进行晃动耦合分析, 一般以火箭推力产生的惯性力作为等效重力, 在贮箱本体坐标系中, 推力大小和方向恒定, 此外, 通常会以液面与贮箱轴线垂直状态作为贮箱内液体的初始姿态, 现代航天作业面临更加复杂的推力情况, 且航天器有时在倾斜状态下起飞, 因此, 有必要设计适用于复杂工况下的晃动分析方法。

本文采用等效力学模型法计算航天器液体贮箱内的晃动耦合作用, 将航天器的飞行姿态作为输入, 计算贮箱内液体对贮箱壁产生的作用力和作用力矩, 即晃动力和晃动力矩。航天器(特别是深空探测器)的发动机需要随时调整推力大小和方向; 同时, 贮箱内液体燃料一直处于消耗状态; 另外, 在着陆过程中, 不能保证探测器以垂直姿态降落到行星表面上, 因此, 重新起飞时, 探测器贮箱处于倾斜状态。面对上述 3 种工况, 本文提出一种解决方案, 并与商用软件 Flow-3D 计算结果比较, 以验证本文提出的液体晃动分析方法的正确性。

1　建模方法

1.1　晃动动力学方程

三维液体晃动等效力学模型将贮箱内的液体分为 2 部分: 相对于贮箱晃动的液体用 n 个 (n 为模态数) 单摆模型表示; 相对贮箱静止的液体部分用 1 个静止质量块表示。惯性坐标系下, 在贮箱平动和转动运动的外部激励作用下, 计算液体在晃动过程中对贮箱产生的作用力和作用力矩。一般情况下, 取等效力学模型的前 2 阶有效单摆进行计算, 即 n=2。充液航天器三维运动等效系统如图 1 所示。其中, O_0xyz为惯性坐标系, $O_{\mathrm{b}}xyz$为贮箱本体坐标系。

结合图 1, 对借助等效力学模型建立液体晃动

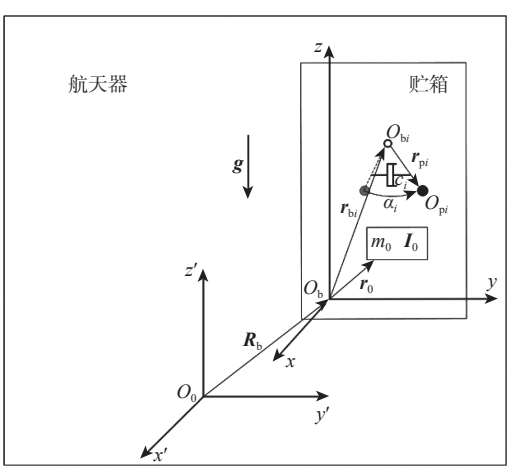


图 1　充液航天器三维运动等效系统

Fig. 1　Three-dimensional motion equivalent system for liquid filled spacecraft

动力学方程过程中所使用的各种物理量作简要说明, 其大体分为 3 类: ①液体晃动等效力学模型所包含的物理量: 重力加速度矢量$\boldsymbol{g}$、第 i 阶等效单摆质量m_i、第 i 阶等效单摆悬挂点$O_{\mathrm{b}i}$、第 i 阶等效单摆悬挂点相对于贮箱本体坐标系原点O_{b}的矢径$\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}i}$、静止质量块质量$m_0$、静止质量块相对于质心的惯量张量$\boldsymbol{I}_0$、静止质量块质心相对于贮箱本体坐标系原点$O_{\mathrm{b}}$的矢径$\boldsymbol{r}_0$; ②以等效力学模型中的数据作为中间量推导得出的物理量: 第 i 阶等效单摆质心相对于自身悬挂点$O_{\mathrm{b}i}$的矢径$\boldsymbol{r}_{\mathrm{p}i}$、第 i 阶等效单摆质心在贮箱本体坐标系中的位置$O_{\mathrm{p}i}$、第 i 阶等效单摆摆动过程中受到的阻尼c_i、参数阻尼比ζ_i; ③贮箱受到外部激励产生的物理量: 贮箱本体坐标系原点O_{b}相对于惯性坐标系原点O_0的矢径$\boldsymbol{R}_{\mathrm{b}}$、贮箱本体坐标系相对于惯性坐标系的转动角速度$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}$、第 i 阶等效单摆相对于贮箱本体坐标系的摆动角速度$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}$、第 i 阶等效单摆摆动角度α_i。

对贮箱内的液体整体进行受力分析。其受到重力$\boldsymbol{G}$、贮箱对液体产生的作用力$\boldsymbol{F}$和作用力矩$\boldsymbol{M}$、液体晃动过程中产生的阻尼力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$、贮箱运动产生的惯性力$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}$。根据牛顿第三定理, $\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{M}$的反作用力$-\boldsymbol{F}$和$-\boldsymbol{M}$即为液体对贮箱的晃动力和晃动力矩。将贮箱内液体在$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{F}$和$\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$的作用下产生的虚功率分别称为惯性力虚功率、重力虚功率、主动力虚功率和阻尼力虚功率, 分别表示为δP^{I}、δP^{g}、δP^{a}和δP^{d}。

根据虚功率原理有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\delta P_i^{\mathrm{I}}+\delta P_i^{\mathrm{g}}+\delta P_i^{\mathrm{d}}\right)+\delta P_0^{\mathrm{I}}+\delta P_0^{\mathrm{g}}+\delta P^{\mathrm{a}}=0 \tag{1}$$

式中: δP_i^{I}、δP_i^{g}、δP_i^{d}分别为第 i 阶等效单摆的惯性力虚功率、重力虚功率、阻尼力虚功率; δP_0^{I}、δP_0^{g}分别为静止质量块的惯性力虚功率、重力虚功率。

$$\delta P_i^{\mathrm{g}}=m_i\delta\dot{\boldsymbol{R}}_i\boldsymbol{g}=\delta\dot{\boldsymbol{R}}_i m_i\boldsymbol{g}+\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{S}_i\times\boldsymbol{g})+\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}i}\times\boldsymbol{g}\right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\delta P_i^{\mathrm{I}}=&-\delta\dot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{b}}\left(m_i\ddot{\boldsymbol{R}}_i+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{S}_i+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{p}i}\times\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}i}+\boldsymbol{Q}_{ti}\right)-\\&\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\left[\boldsymbol{S}_i\times\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}i}\times\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{p}i}\times\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}i}\right)+\boldsymbol{J}_i\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{p}i}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{r}i}\right]-\\&\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\left[\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}i}\times\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}i}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}i})+\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}i}\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}}+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{p}i}\right)+\boldsymbol{Q}_{ii}\right]\end{aligned} \tag{3}$$

$$\delta P_i^{\mathrm{d}}=-\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\left(2m_i\zeta_i\omega_i l_i^{\,2}\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{ti}=&\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)\times\boldsymbol{S}_{pi}+m_i\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\times(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}i})+\\&\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)\times\left[\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)\times\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}i}\right]\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{r}i}=&\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}i}\times\left[\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)\times\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}i}\right]+\\&\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}i}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)+\boldsymbol{S}_i\times[\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\times(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}i})]+\\&\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}i}\times\left\{\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)\times\left[\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)\times\boldsymbol{r}_{\mathrm{p}i}\right]\right\}+\\&\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)\times\left[\boldsymbol{J}_{\mathrm{p}i}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}\right)\right]\end{aligned} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{Q}_{ii}=\boldsymbol{J}_{pi}\left(\boldsymbol{\omega}_{b}\times\boldsymbol{\omega}_{pi}\right)+\boldsymbol{S}_{pi}\times[\boldsymbol{\omega}_{b}\times(\boldsymbol{\omega}_{b}\times\boldsymbol{r}_{bi})]+\left(\boldsymbol{\omega}_{b}+\boldsymbol{\omega}_{pi}\right)\times\left[\boldsymbol{J}_{pi}\left(\boldsymbol{\omega}_{b}+\boldsymbol{\omega}_{pi}\right)\right] \tag{7}$$

式中：$\boldsymbol{R}_i$为第i阶晃动质量m_i在惯性坐标系下的矢径，$\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{R}_b+\boldsymbol{r}_{bi}+\boldsymbol{r}_{pi}$；$\boldsymbol{p}_i$为第$i$阶晃动质量$m_i$在贮箱本体坐标系下的晃动方向(晃动平面的法向)；$\boldsymbol{S}_i$和$\boldsymbol{S}_{pi}$分别为第$i$阶晃动质量$m_i$相对于贮箱本体坐标系原点$O_b$和对应单摆悬挂点$O_{bi}$的静矩；$\boldsymbol{J}_i$和$\boldsymbol{J}_{pi}$分别为第$i$阶晃动质量相对于贮箱本体坐标系原点$O_b$和单摆悬挂点$O_{bi}$的惯量张量；$\omega_i$和$l_i$分别为第$i$阶等效单摆的摆动频率和摆长。

$$\delta P_0^{g}=\delta\dot{\boldsymbol{R}}_b m_0\boldsymbol{g}+\delta\boldsymbol{\omega}_b(\boldsymbol{S}_0\times\boldsymbol{g}) \tag{8}$$

$$\delta P_0^{I}=-\delta\dot{\boldsymbol{R}}_b\left[m_0\ddot{\boldsymbol{R}}_b+\dot{\boldsymbol{\omega}}_b\times\boldsymbol{S}_0+\boldsymbol{\omega}_b\times(\boldsymbol{\omega}_b\times\boldsymbol{S}_0)\right]-\delta\boldsymbol{\omega}_b\left[\boldsymbol{S}_0\times\ddot{\boldsymbol{R}}_b+\boldsymbol{J}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_b+\boldsymbol{\omega}_b\times(\boldsymbol{J}_0\boldsymbol{\omega}_b)\right] \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{S}_0$和$\boldsymbol{J}_0$分别为静止质量块相对于贮箱本体坐标系原点O_b的静矩和惯量张量。

$$\delta P^{a}=\delta\dot{\boldsymbol{R}}_b\boldsymbol{F}+\delta\boldsymbol{\omega}_b\boldsymbol{M} \tag{10}$$

将式(2)～式(10)代入式(1)，利用变分$\delta\dot{\boldsymbol{R}}_b$、$\delta\boldsymbol{\omega}_b$、$\delta\boldsymbol{\omega}_{pi}$的独立性分别得到系统的平动方程、转动方程和第$i$阶等效模态的晃动方程：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}m_i+m_0\right)\ddot{\boldsymbol{R}}_b+\dot{\boldsymbol{\omega}}_b\times\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i+\boldsymbol{S}_0\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{pi}\times\boldsymbol{S}_{pi}\right)+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Q}_{ti}+\boldsymbol{\omega}_b\times(\boldsymbol{\omega}_b\times\boldsymbol{S}_0)=\left(\sum_{i=1}^{n}m_i+m_0\right)\boldsymbol{g}+\boldsymbol{F} \tag{11}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i+\boldsymbol{S}_0\right)\times\ddot{\boldsymbol{R}}_b+\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{J}_i+\boldsymbol{J}_0\right)\dot{\boldsymbol{\omega}}_b+\sum_{i=1}^{n}\left[\boldsymbol{r}_{bi}\times\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{pi}\times\boldsymbol{S}_{pi}\right)+\boldsymbol{J}_{pi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{pi}\right]+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{Q}_{ti}+\boldsymbol{\omega}_b\times(\boldsymbol{J}_0\boldsymbol{\omega}_b)=\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i+\boldsymbol{S}_0\right)\times\boldsymbol{g}+\boldsymbol{M} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{S}_{pi}\times\ddot{\boldsymbol{R}}_b+\boldsymbol{S}_{pi}\times(\dot{\boldsymbol{\omega}}_b\times\boldsymbol{r}_{bi})+\boldsymbol{J}_{pi}\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}_b+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{pi}\right)+\boldsymbol{Q}_{ii}+2m_i\zeta_i\omega_i l_i^2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{\omega}_{pi}=\boldsymbol{S}_{pi}\times\boldsymbol{g}\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{13}$$

1.2 变推力工况下晃动分析

航天器发射过程中，其受到重力和火箭推力作用，随着航天技术发展的要求，火箭推力大小和方向会随时间发生变化，如图2所示。由于推力使贮箱内液体受到惯性力作用，其在重力方向会产生大于零的分量，导致航天器实际受到的重力不断变化。在小幅度晃动条件下，贮箱内液体可以等效为单摆或弹簧-质量模型，一般情况下，2种模型是等价的，但当重力变化时，等效弹簧刚度会随之变化，此时，等效模型条件不成立，而等效单摆摆长保持常数，因此，航天领域一般选择单摆模型。

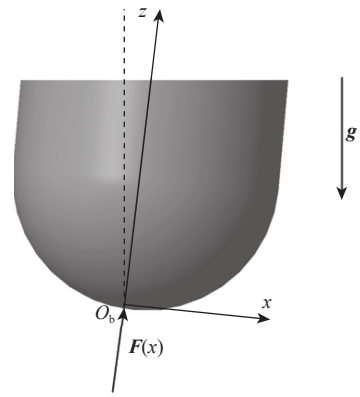


图2 变推力工况示意图

Fig. 2 Schematic diagram of variable thrust operating conditions

本文在推导液体晃动动力学方程过程中，对上述2部分作用力都有考虑：通过计算等效力学模型各部分的重力虚功率δP_i^{g}和δP_0^{g}，实现重力对液体晃动的影响；在计算等效力学模型中各部分的惯性力虚功率δP_i^{I}和δP_0^{I}时，式(3)和式(9)中引入贮箱平动加速度矢量$\ddot{\boldsymbol{R}}_b$，考虑了贮箱三维平动运动对液体晃动的影响。因此，本文推导的液体晃动动力学方程同样适用于火箭推力大小和方向不断变化的情况。

1.3 变充液比工况下晃动分析

为模拟充液比变化过程中的晃动现象，将液体晃动等效力学模型中的所有参数作为与时间相关的函数$f(x)$，随着充液比变化，等效力学模型各参数变化较为平缓，可以考虑使用线性插值法计算对应时间点的等效力学模型[15]，利用动力学方程式(11)～式(13)计算相应的晃动力和晃动力矩，具体实施步骤如图3所示。

为提高计算方法的运算效率和可操作性，使用

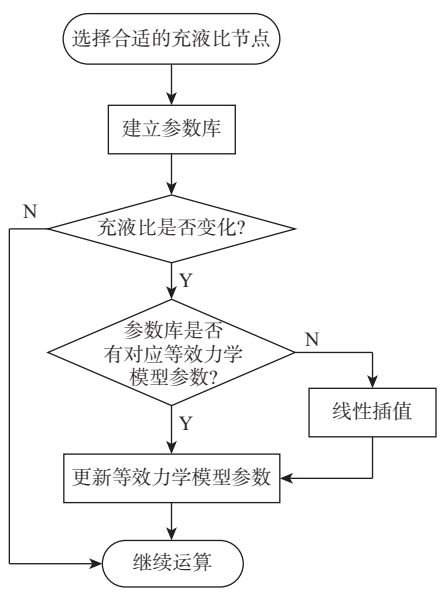


图3 变充液比工况晃动计算流程

Fig. 3 Flowchart for sloshing calculating under the variable filling liquid ratio operating condition

插值法计算贮箱内不同充液比所对应的液体等效力学模型数据时, 采用分段低次插值来保证算法的收敛性, 本文使用分段 3 次 Lagrange 插值。计算步骤如下:

1) 按照从大到小 (或从小到大) 的顺序选取 m+1 个不同充液比 $x_0, x_1, \cdots, x_m$ 作为插值节点;

2) 分别计算出插值节点对应的等效力学模型数据 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_m)$, 将其作为插值基函数;

3) 根据待计算充液比 $x(x_0 \leqslant x \leqslant x_m)$, 选择相邻的 3 个插值节点, 分别为 a_0、a_1、a_2, 计算对应的等效力学模型参数。

选择插值节点时, 将 x 与 m+1 个插值节点比较, 得到与 x 值最接近节点的下标 k。如果 k=0, 插值节点取 $a_0 = x_0, a_1 = x_1, a_2 = x_2$; 如果 k=m, 插值节点取 $a_0 = x_{m-2}, a_1 = x_{m-1}, a_2 = x_m$; 如果 0<$k$<$m$, 插值节点取 $a_0 = x_{k-1}, a_1 = x_k, a_2 = x_{k+1}$。从而, x 对应的等效力学模型参数为

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{r=0}^{2}\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq r}}^{2}\frac{x-a_j}{a_r-a_j}\right) f(a_r) = \\ \left(\frac{x-a_1}{a_0-a_1}\right)\left(\frac{x-a_2}{a_0-a_2}\right) f(a_0) + \\ \left(\frac{x-a_0}{a_1-a_0}\right)\left(\frac{x-a_2}{a_1-a_2}\right) f(a_1) + \\ \left(\frac{x-a_0}{a_2-a_0}\right)\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right) f(a_2) \end{aligned} \tag{14}$$

1.4　贮箱倾斜工况下晃动分析

在重力作用下, 自由液面的法线方向始终与重力方向共线。一般情况下, 为方便建立贮箱内液体的有限元模型, 贮箱的初始姿态位置选择轴线与重力方向平行, 此时, 重力在贮箱本体系中的初始方向为 $\left[0, 0, -1\right]^{\mathrm{T}}$, 对晃动方程 (13) 进行数值计算时, 等效力学模型中单摆相对于贮箱轴线的初始角位移 $\alpha_i (i = 1,2)$ 全部取 0, 而在贮箱倾斜的情况下, 需要重新计算 α_i 的值, 如图 4 所示。

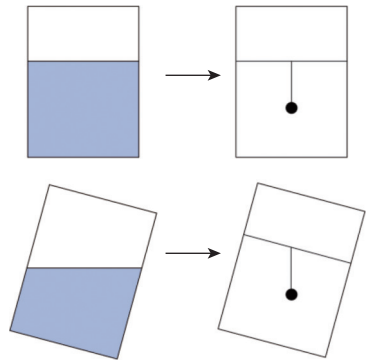


图 4　等效单摆初始摆角

Fig. 4　Equivalent initial swing angle of a pendulum

贮箱倾斜时, 在重力作用下, 等效力学模型中单摆处于贮箱相应姿态下最低点的平衡位置, 此时, 单摆在摆动方向上存在初始角位移 α_i。为求 α_i, 可以通过空间几何方法, 但计算过程复杂, 难以实现程序化计算流程; 而将重力在本体坐标系中的方向和贮箱的初始运动状态代入式 (13) 中, 通过动力学方法将原本计算过程转化为代数求解, 极大降低了运算的复杂程度。

设 t = 0 s 初始条件下, 在贮箱本体坐标系 $O_{\mathrm{b}}xyz$ 中, 重力为

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{g}}|\boldsymbol{g}| = \left[a, b, c\right]^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{g}| \tag{15}$$

式中: $\boldsymbol{r}_{\mathrm{g}}$ 为重力加速度在贮箱本体坐标系下的方向向量; a、b、c 为方向向量的 3 个分量。

此时, 贮箱无外部激励, 贮箱处于静止状态, 则有

$$\ddot{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{p}i} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

将式 (16) 代入式 (13) 得

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{p}i} \times \boldsymbol{g} = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

则有

$$\begin{cases} m_i|\boldsymbol{g}|\left[x_i, y_i, 0\right]\left\{\left[\begin{bmatrix} x_i & -y_i & 0 \\ y_i & x_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ l_i\sin\alpha_i(t) \\ -l_i\cos\alpha_i(t) \end{bmatrix}\right] \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right\} = 0 \\ m_i|\boldsymbol{g}|l_i\left[x_i, y_i, 0\right]\left[\begin{bmatrix} -y_i\sin\alpha_i \\ x_i\sin\alpha_i \\ -\cos\alpha_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ \mathrm{c} \end{bmatrix}\right] = 0 \\ c\left(x_i^2 - y_i^2\right)\sin\alpha_i + (bx_i - ay_i)\cos\alpha_i = 0 \end{cases} \tag{18}$$

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{ay_i - bx_i}{x_i^2 - y_i^2}\right) \qquad i = 1,2 \tag{19}$$

式中: x_i 和 y_i 分别为等效力学模型中第 i 阶晃动单摆的晃动方向在本体坐标系 x 轴和 y 轴上的分量。

使用龙格-库塔法对式 (13) 所示的晃动方程进行数值计算时, 将式 (19) 计算得到的 α_i 作为迭代初始值, 进行动力学方程数值求解。

2　算例分析

使用航天领域最常用的 Cassini贮箱, 分别计算

在变推力、变充液比和初始贮箱倾斜等工况下的晃动力和晃动力矩，并将计算结果与商用软件 Flow-3D 结果进行比较，验证其正确性。通过某探测器液体贮箱在实际飞行过程中的案例，验证本文计算方法在复杂工况下的有效性。

2.1 贮箱基本参数

Cassini 贮箱是航天器中常用的液体燃料贮箱，其中间段为圆柱，两端底面为半球形，是一种典型的轴对称贮箱。在本节的算例中，贮箱本体坐标系定义为原点位于贮箱下底面的顶点，z 轴与贮箱轴线重合，方向竖直向上，y 轴垂直纸面向里，与 x 轴和 z 轴成右手准则，如图 5 所示。

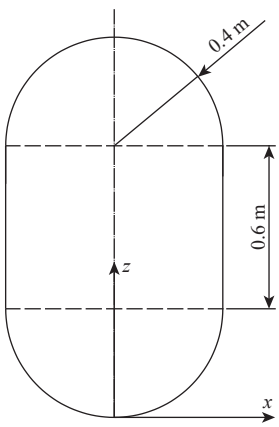


图 5 Cassini 贮箱本体坐标系定义

Fig. 5 Cassini tank coordinate system definition

贮箱具体尺寸如图 5 所示。贮箱内液体为水，密度为 1 000 kg/m^3，运动黏度为 9.29×10^{-7} m^2/s。重力加速度统一取 9.8 m/s^2，初始方向沿本体坐标系 z 轴负方向，不随贮箱姿态位置变化而改变方向。计算时，选择合适的外部激励，保证在计算过程中液体不接触贮箱顶部。

2.2 变推力工况

液体晃动动力学方程利用 C++编程实现求解过程，通过添加平动和转动激励，可以解决贮箱在任意三维运动状态下的晃动耦合问题。本节以 2.1 节中的 Cassini 贮箱为例，充液比为 0.5，为模拟探测器在着陆起飞时发动机推力产生等效重力的情况，原有的重力加速度不变，在贮箱本体系 z 轴方向施加正弦变化的加速度激励，且由于航天器受到的推力方向一直沿 z 轴正方向，加速度总是大于 0，因此，取 z 方向加速度 $a_z=2-2\sin(0.1\pi t)$ m/s^2，液体对贮箱产生的晃动力和晃动力矩分别如图 6 和图 7 所示。

根据图 6 和图 7 可知，在 z 方向施加激励时，产生的晃动力频率与激励频率相同，等效力学模型和 Flow-3D 模型计算结果吻合，其中，等效力学模型通过线性近似的方法计算液体晃动，忽略晃动过程中

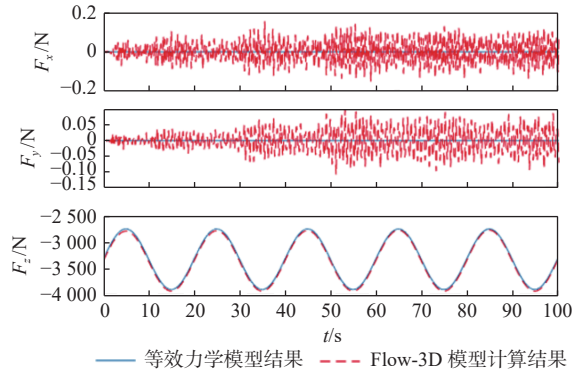


图 6 变推力工况下液体对贮箱的作用力在本体坐标系下的分量

Fig. 6 The component of the force exerted by a liquid on a storage tank under variable thrust conditions in the body coordinate system

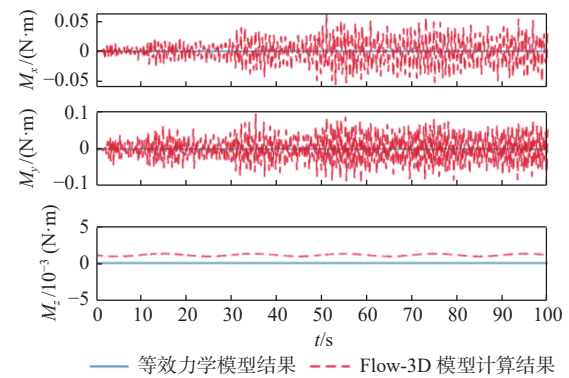


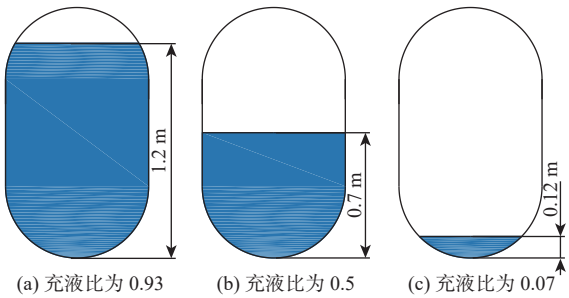
图 7 变推力工况下液体对贮箱的作用力矩在本体坐标系下的分量

Fig. 7 The component of the torque exerted by a liquid on a storage tank under variable thrust conditions in the body coordinate system

的非线性现象，而 Flow-3D 计算过程中会在 x 和 y 方向出现轻微非线性晃动，但相对 z 方向晃动力来说误差较小，符合工程实际的使用要求。晃动力在 z 方向上分量的相对误差在 1% 以内，说明变推力工况下晃动分析方法的有效性。

2.3 变充液比工况

本节进行的变充液比数值验证算例中，形成等效力学模型数据库所需要的充液比插值节点选择从大到小依次为 0.93、0.76、0.5、0.24、0.07，其中，充液比 0.76 和 0.24 所对应的位置是贮箱的上下底面与中间圆柱筒段相切的位置，为保证计算结果的准确性，插值节点中尽量包含这 2 个节点。部分充液比对应的 CAD 模型如图 8 所示。按照 1.3 节中变充液比工况的模拟方法计算各充液比对应的等效力学模型，形成后续计算所需要的数据库。在本节案例的计算时间内，贮箱充液比从 0.93～0.07 之间均匀变化。



(a) 充液比为 0.93　(b) 充液比为 0.5　(c) 充液比为 0.07

图 8　部分充液比工况 CAD 模型

Fig. 8　CAD model of partial liquid filling ratio condition

贮箱绕 x 轴平动运动方程为 $X=\sin(0.1\pi t)$ m, 同时, 绕 x 轴转动运动方程为 $\theta_x=0.1\sin(0.1\pi t)$ rad, 液体对贮箱产生的晃动力和晃动力矩分别如图 9 和图 10 所示。

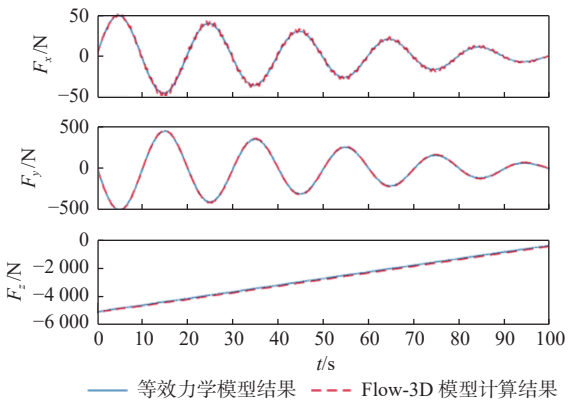


图 9　变充液比时液体对贮箱的作用力在本体坐标系下的分量

Fig. 9　The component of the force of liquid on the storage tank under the condition of variable filling ratio in the body coordinate system

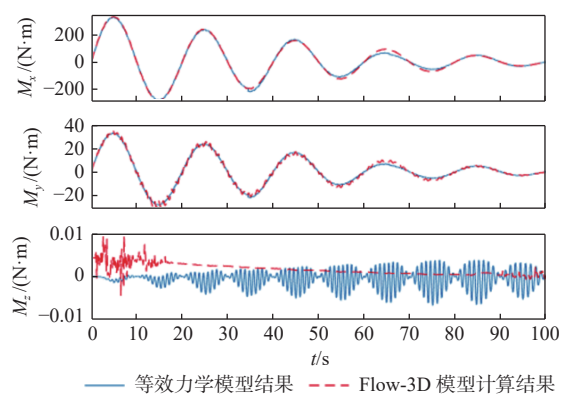


图 10　变充液比时液体对贮箱的作用力矩在本体坐标系下的分量

Fig. 10　The component of the torque of liquid on the storage tank under the condition of variable filling ratio in the body coordinate system

在使用 Flow-3D 进行变充液比条件下的数值模拟时, 采取贮箱内液体从底部均匀流出的方法来达到同样的效果。液体流速要尽可能小, 过大会导致液体流出口产生非线性现象, 此处, 液体流动速率约为 0.005 m^3/s, 对最终计算结果影响较小。在贮箱本体坐标系的同一个方向同时施加平动和转动激励, 最终计算结果与 Flow-3D 吻合较好, 其中, Flow-3D 数值模拟结果中 F_x 和 M_y 的图形曲线不光滑, 但曲线基本趋势与等效力学模型计算结果重合, 通过加密 Flow-3D 计算网格可以改善该现象; 另外, 由于贮箱的转动方向与等效力学模型中单摆摆动方向不重合, 当等效单摆由于摆动而使其质心不在贮箱中心轴时, 贮箱转动使单摆产生 z 方向的晃动力和晃动力矩, 根据计算结果来看, 上述晃动力和晃动力矩数值较小, 几乎不影响最终计算结果。

2.4　初始贮箱倾斜工况

本节算例计算方式选择定充液比为 0.5。为模拟探测器发射时主轴线与水平地面不垂直的状态, Cassini 贮箱初始姿态定义为从贮箱轴线与重力方向重合的位置绕 y 轴顺时针旋转 5°。此时, 贮箱内液体 CAD 模型如图 11 所示。

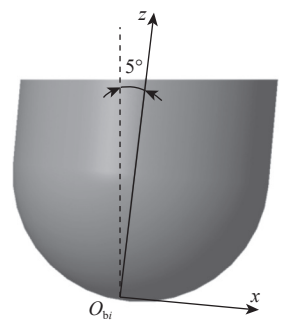


图 11　贮箱倾斜姿态下液体 CAD 模型

Fig. 11　CAD model of liquid under tilted posture of storage tank

重力在本体坐标系中的方向 $\boldsymbol{r}_g=[0.087,\ 0,\ -0.996]^T$。$t$=0 s 时, 贮箱姿态角 $\phi_b=[0.087,\ 0,\ 0]^T$。将等效力学模型数据代入式 (18), 计算求得前 2 阶单摆对应的初始摆角分别为: 第 1 阶单摆的晃动方向 $\boldsymbol{p}_1=[-0.128,\ 0.991,\ 0]$, 初始摆角 $\alpha_1=-0.011$ rad; 第 2 阶单摆的晃动方向 $\boldsymbol{p}_2=[0.991,\ 0.128,\ 0]$, 初始摆角 $\alpha_2=0.086$ rad。

计算贮箱倾斜工况下的液固耦合作用, 关键在于计算前 2 阶等效单摆的初始摆角 α_1 和 α_2, 为验证计算结果的正确性, 对本节定义的贮箱初始姿态采用一种特殊的计算案例: 从 t=0 s 时刻开始, 贮箱在 20 s 时间内, 以本体坐标系 y 轴为旋转轴, 逆时针匀速旋转 5°, 即回到贮箱主轴与重力方向共线的情况, 贮箱停止旋转, 计算总时长为 30 s, 此时, 液体对贮箱的晃动力和晃动力矩在本体系分量分别如图 12 和图 13 所示。

理论上, 此时等效力学模型中的单摆在上述计算得到的初始摆角情况下, 应处于最低点的平衡位

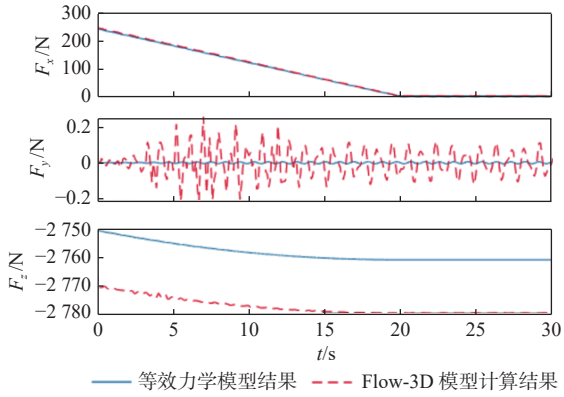


图 12 贮箱倾斜时液体对贮箱的作用力在本体坐标系下的分量

Fig. 12 The component of the force exerted by the liquid on the storage tank when the storage tank is tilted in the body coordinate system

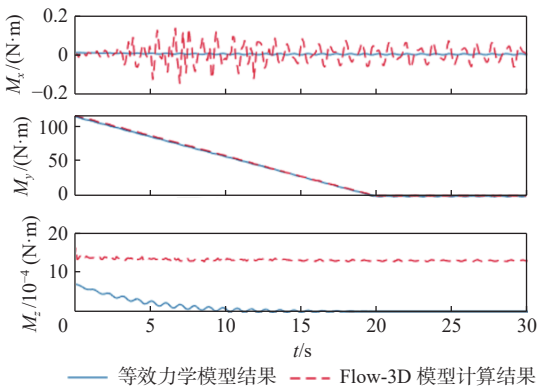


图 13 贮箱倾斜时液体对贮箱的作用力矩在本体坐标系下的分量

Fig. 13 The component of the torque exerted by the liquid on the storage tank when the storage tank is tilted in the body coordinate system

置。当贮箱在所给的转动激励下开始转动时，单摆摆角逐渐减小，在对应方向产生的晃动力和晃动力矩应该随时间逐渐降低。如果此时单摆没有在平衡点位置，则晃动力会在开始阶段少量增大，随后逐渐下降。图 12 和图 13 的 F_x 和 M_y 分量与理论分析结果符合，说明单摆初始摆角的计算正确。最终计算结果与 Flow-3D 模型对比较为一致，从而证明了本文模拟方法的有效性，其中，Flow-3D 计算的 F_y 和 M_x 出现的振荡现象由非线性晃动造成，相比于其他方向数值较小。

2.5 综合算例

以某深空探测器为例，采用飞行过程中实际受到的外部激励作用进行晃动耦合分析。探测器发射前使用推进舱推进，推力产生的加速度为 4 m/s^2，推力大小调整范围为±10%，推力方向调节范围为俯仰偏航各±10%。贮箱初始姿态设定为绕贮箱本体坐标系 x 轴顺时针旋转 5 °，发射后用 10 s 的时间调整到正常姿态，重力加速度为 9.8 m/s^2，贮箱内注入的液体为水，密度为 1 000 kg/m^3，运动黏度为 9.29×10^{-7} m^2/s，计算时长为 100 s。发射过程中，贮箱内燃料逐渐消耗，充液比变化范围为 0.92～0.14。为方便数值模拟，对上述飞行过程作相应的简化处理：①推力大小调整按照正弦变化规律(sin(0.1πt))；②推力方向保持与 O_bxz 平面呈 45°夹角的平面内转动，此时，推力在贮箱本体坐标系 x 轴和 y 轴方向上的分量相等，转动运动规律同样按照正弦变化(sin(0.1πt))；③整个计算过程中，充液比在 0.92～0.14 之间均匀变化；④贮箱在 0～10 s 时间内匀速从倾斜状态旋转到轴线与重力方向平行的状态。晃动力和晃动力矩计算结果分别如图 14 和图 15 所示。

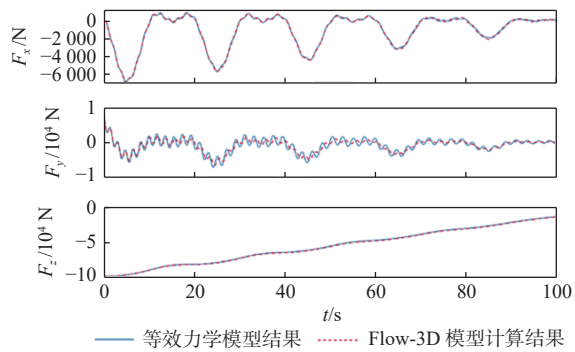


图 14 液体对贮箱的作用力在本体坐标系下的分量

Fig. 14 The component of the force of liquid on the storage tank in the body coordinate system

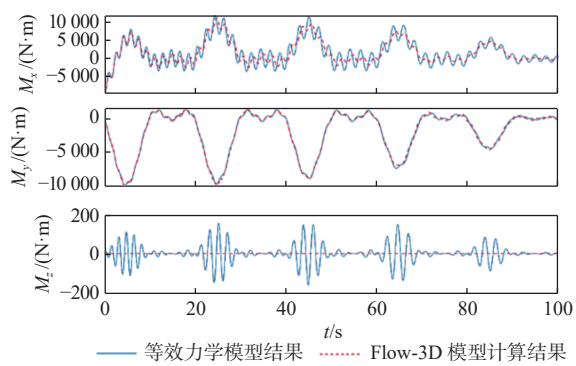


图 15 液体对贮箱的作用力矩在本体坐标系下的分量

Fig. 15 The component of the torque exerted by the liquid on the storage tank in the body coordinate system

t=0 s 时，贮箱处于绕本体坐标系 x 轴旋转了一定角度的倾斜状态，理论上，晃动力在 y 轴上的分量 F_y 不为零，而在充液比逐渐减小的过程中，晃动力和晃动力矩的幅值会随之减小，同时，在推力变化的情况下，晃动力在本体坐标系 z 轴上的分量会出现与外部激励相应的周期性起伏，且由于推力方向发生变化，晃动力在本体坐标系 x 轴和 y 轴方向

上也出现相应的分量。可见, 计算结果基本符合理论预期, 同时, 与 Flow-3D 数值模拟结果对比吻合较好。由于算例中的航天器贮箱体积较大, 对应等效力学模型中单摆的质量在 10^3 kg 数量级上, 根据 2.3 节的分析, 由于贮箱转动而产生的 z 方向上晃动力矩同样会相应增加, 虽然晃动力矩与 Flow-3D 计算结果最大误差接近 200 N·m, 但相对于其他 2 个方向的计算结果来说, 相差了接近 2 个数量级, 符合工程实际需求。另外, 在 Flow-3D 中, 为保证计算结果的收敛性, 计算过程中会添加额外的阻尼项, 导致 F_y 和 M_x 的曲线能够在很短时间内达到平滑状态, 等效力学模型对液体阻尼的计算偏小, 实际阻尼应该处于两者之间。

3　结　论

本文基于已有的液体晃动等效力学模型理论, 根据虚功率原理建立等效模型的动力学方程, 实现任意形状的航天器液体贮箱在任意三维平动和转动运动状态下的晃动力和晃动力矩计算。同时, 针对航天器在发射过程中出现的 3 种特殊工况, 提出液体燃料晃动力和晃动力矩的计算方法:

1) 利用等效单摆模型在等效重力变化时摆长保持恒定的特性, 通过在贮箱上施加大小和方向不断变化加速度激励的方式模拟航天器飞行过程中推力大小和方向变化的情况。

2) 通过插值法更新等效力学模型参数, 以适应航天器在飞行过程中液体燃料逐渐消耗的情况。

3) 通过改变等效力学模型中单摆初始摆角的方法模拟航天器在准备发射阶段贮箱主轴线与地面不垂直的情况。

使用航天领域最常见的 Cassini 贮箱和某型号航天器实际燃料贮箱, 利用本文计算方法在上述 3 种特殊工况下进行晃动力和晃动力矩计算, 并将计算结果与商业软件 Flow-3D 计算结果比较, 计算误差较小, 符合工程实际的要求。由此证明本文计算方法的正确性, 且在复杂的工况下能够保证计算结果的有效性。

参考文献 (References)

[1] ABRAMSON H N. The dynamic behavior of liquids in moving containers: with applications to space vehicle technology: NASA SP-106[R]. Washington, D.C.: Scientific and Technical Information Division, NASA, 1966.

[2] TANG Y, YUE B Z, YAN Y L. Improved method for implementing contact angle condition in simulation of liquid sloshing under microgravity[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2019, 89(4-5): 123-142.

[3] 李遇春. 液体晃动动力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
LI Y C. Fundamentals of liquid sloshing dynamics[M]. Beijing: Science Press, 2017(in Chinese).

[4] BUSECK R, BENAROYA H. Mechanical models for slosh of liquid fuel[C]//Proceedings of the Aerospace Design Conference. Reston: AIAA, 1993: 1093.

[5] IBRAHIM R A. Liquid sloshing dynamics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

[6] DODGE F T. The new "dynamic behavior of liquids in moving containers": NASA SP-106[R]. San Antonio: Southwest Research Institute, 2000.

[7] GRAHAM E W, RODRIGUEZ A M. The characteristics of fuel motion which affect airplane dynamics[J]. Journal of Applied Mechanics, 1952, 19(3): 381-388.

[8] HOUSNER G W. Dynamic pressures on accelerated fluid containers[J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1957, 47(1): 15-35.

[9] RATTAYYA J. Sloshing of liquids in axisymmetric ellipsoidal tanks[C]//Proceedings of the 2nd Aerospace Sciences Meeting. Reston: AIAA, 1965: 114.

[10] MIKISHEV G N. Experimental method of spacecraft dynamics[M]. Moscow: Mechanical Manufacture, 1978.

[11] 包光伟. 平放柱形贮箱内液体晃动的等效力学模型[J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(12): 1961-1964.
BAO G W. Equivalent mechanical model of liquid sloshing in horizontal cylindrical container[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2003, 37(12): 1961-1964(in Chinese).

[12] DODGE F T, GARZA L R. Equivalent mechanical model of propellant sloshing in the workshop configuration of the Saturn S-IVB: NASA CR-101407[R]. Washington, D.C.: NASA, 1969.

[13] 包光伟, 王政伟. 液体三维晃动特征问题的有限元数值计算方法[J]. 力学季刊, 2003, 24(2): 185-190.
BAO G W, WANG Z W. Finite element method for eigen problem of liquid 3D sloshing[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2003, 24(2): 185-190(in Chinese).

[14] 李青, 马兴瑞, 王天舒. 非轴对称贮箱液体晃动的等效力学模型[J]. 宇航学报, 2011, 32(2): 242-249.
LI Q, MA X R, WANG T S. Equivalent mechanical model for liquid sloshing in non-axisymmetric tanks[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(2): 242-249(in Chinese).

[15] LI Q, MA X R, WANG T S. Equivalent mechanical model for liquid sloshing during draining[J]. Acta Astronautica, 2011, 68(1-2): 91-100.

Analysis of liquid sloshing under variable thrust, variable filling liquid ratio, and tilted tank state

HE Jiawei[1, 2], LYU Jing[2, *], WANG Tianshu[3], LIU Yingjie[1]

(1. The General Department of HuBei Areospace Technology Academy, Wuhai 430048, China;
2. School of Aeronautic Science and Engineering, Beihang University, Beijing 102206, China;
3. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100083, China)

Abstract: With the development of aerospace technology, new deep space probes will encounter two special operating conditions during takeoff: the magnitude and direction of the engine thrust vector changing over time; the direction of gravity during the initial launch does not coincide with the main axis of the spacecraft. During the flight, liquid fuel will be continuously consumed. This article suggests a new solution for the problem of liquid sloshing in spacecraft storage tanks to the aforementioned three working conditions: taking into account the impact of spacecraft translational acceleration during the dynamic modeling stage and then analyzing the sloshing situation of thrust not along the spacecraft axis direction; calculating the liquid sloshing problem under variable charge to liquid ratio conditions using the method of variable equivalent mechanical model parameters; and simulating the situation where the liquid level is not perpendicular to the tank axis when the tank tilts by setting an initial swing angle for a single pendulum in the equivalent mechanics model. This article takes the Cassini storage tank as an example to calculate the sloshing force and moment under the three working conditions mentioned above in a semi filled state. Finally, taking a certain type of spacecraft liquid storage tank as an example, sloshing analysis is carried out under actual launch conditions. The practicality of the calculation approach presented in this article is confirmed by the calculation results, which are in good agreement with the results of calculations made using commercial software Flow-3D.

Keywords: equivalent mechanical model; liquid sloshing; variable thrust; variable filling liquid ratio; tank tilt

Received: 2024-05-06; **Accepted**: 2024-08-09; **Published Online**: 2024-09-27 12:10
URL: link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20240926.1748.003

* **Corresponding author**. E-mail: lvjing@buaa.edu.cn