http://bhxb.buaa.edu.cn jbuaa@buaa.edu.cn
DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2024.0546

基于熵权-TOPSIS的多机悬吊系统工作空间稳定性评价

李威，赵志刚*，赵祥堂，李子轩，江政
(兰州交通大学 机电工程学院，兰州 730070)

摘 要：针对多机悬吊系统工作空间稳定性难以评价的问题，提出一种基于熵权-优劣解距离法(TOPSIS)的稳定性评价方法，建立多维度工作空间来表征工作空间稳定性分布。通过分析系统的运动学和动力学特性，提出位置性能指标、姿态性能指标及拉力均匀性性能指标等影响多机悬吊系统稳定性的指标。采用熵权法(EWM)与层次分析法(AHP)计算各性能指标的复合权重确定各指标的相对重要性，运用TOPSIS对工作空间内各位置点的稳定性能进行计算。以定末端的多机悬吊系统为例仿真计算，评价工作空间位置点的稳定性，并绘制不同稳定性能区间内的多维度工作空间。仿真结果表明：随稳定性能增加，多维度工作空间向中心和上部收缩，表明多机悬吊系统工作空间中间区域和上部区域的稳定性较优。多维度工作空间为多机悬吊系统的构型优化提供了理论基础。

关 键 词：多机器人系统；悬吊系统；稳定性；多维度工作空间；优劣解距离法；熵权法
中图分类号：TP242.2
文献标志码：A **文章编号**：1001-5965(2026)11-4029-11

多机悬吊系统是一种典型的刚柔耦合的并联机器人，通过控制柔索的收放来实现被吊运物的运动[1-2]。相较于传统的绳牵引并联机器人和单机器人吊运系统，不仅具备高度灵活性和简洁的结构，还具有较低的惯性和更大的工作空间[3]。但柔性绳索本身的刚度较低，且柔索只能对被吊运物体施加单向的拉力，导致系统在面对外部干扰时的抗扰动能力较弱。在系统工作空间中，不同区域的稳定性不同，准确评价多机悬吊系统工作空间中各位置点的稳定性高低对完成吊运任务具有重要意义，而提升多机悬吊系统工作空间稳定性是当前研究中的一大挑战。

从20世纪80年代开始，国内外学者从不同的角度对绳牵引并联机器人的稳定性进行了研究。文献[4]将重力视为绳索，将柔索视为直线弹簧，利用系统总刚度矩阵来评估绳牵引并联机器人稳定性。文献[5]使用了Hessian矩阵分析了悬吊系统的静平衡稳定性，并探讨了多机悬吊系统的构型问题，但未考虑柔索拉力对稳定性的影响。文献[6]研究了欠约束柔索并联机器人的基于斜率的稳定性评价方法，也没有考虑柔索拉力对被吊运物运动稳定性的影响。文献[7]对一类绳牵引并联机构的结构进行了分析，使用动平台的位姿运动敏感性作为评价指标对绳牵引并联机构的稳定性进行评价。文献[8]对一类三自由度柔索并联机器人的布置方式进行设计，优化了机构的稳定性。文献[9]利用加权方法对影响柔索驱动并联机器人动平台运动稳定性的位置与拉力指标进行加权分析，并分析了各因素对动平台运动稳定性的重要程度。文献[10]针对4-1型柔索驱动并联机器人，提出一种融合机器人末端执行器位置和约束力影响因子的稳定性评价方法及其指标。文献[11]将柔索驱动

收稿日期：2024-07-18；**录用日期**：2024-09-23；**网络出版时间**：2024-09-27 10:28
网络出版地址：link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20240926.1735.002
基金项目：国家自然科学基金(51965032)；甘肃省自然科学基金(22JR5RA319)
*通信作者. E-mail：zhaozhg@mail.lzjtu.cn

引用格式：李威，赵志刚，赵祥堂，等. 基于熵权-TOPSIS的多机悬吊系统工作空间稳定性评价[J]. 北京航空航天大学学报，2026，52(11)：4029-4039. Li W，Zhao Z G，Zhao X T，et al. Workspace stability evaluation of multi-engine suspension system based on EWM-TOPSIS[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics，2026，52(11)：4029-4039 (in Chinese).

并联机器人的稳定性从0或1推广到区间[0,1],通过稳定性值的大小来评估动平台在该位置点的稳定性能。文献[12]提出了一种基于索张力测定的稳定性指标,根据稳定性指标设计了机构的稳定工作空间,但没有讨论拉力均匀性对机构稳定性的影响。文献[13]以多机悬吊系统的运动学和动力学为基础,提出了综合多性能指标的位置稳定性评价方法,但没有分析几种性能指标对系统性能影响的权重。除此之外,许多学者也对机器人工作空间的性能分布进行了研究。文献[14]求解了6轴工业机器人的最大工作空间,分析了位姿准确度和位姿重复性等性能指标在工作空间内部的分布。文献[15]提出了一种多量纲变量统一表达的并联机构多维度工作空间表示法,表达了刚性并联机构的全域工作空间和性能空间,但是没有对绳牵引并联机构的工作空间性能分布进行研究。文献[16]分析了不同构型刚柔复合驱动并联喷涂机器人的可行姿态角在工作空间内的分布,综合工作空间体积等性能指标,优选了最佳构型。

现有文献对多机悬吊系统这类绳牵引并联机构的稳定性研究较为有限,缺乏综合分析各性能指标对稳定性的影响研究,也少有关于工作空间性能表征的探讨。不同性能指标对悬吊系统运动的影响程度不同,因此,各指标的权重也应不同。然而,现有的稳定性评价研究常将各性能指标的权重视为相等,这限制了各指标对系统稳定性真实影响的准确反映。

建立多机悬吊系统稳定性评价模型,分析工作空间不同区域的稳定程度,对系统的构型优化至关重要。本文创新点如下:

1)基于多机悬吊系统的运动学、动力学模型,定义了拉力均匀性、位置、姿态等性能指标,以便更准确地评估多机悬吊系统的稳定性。

2)使用层次分析法-熵权法(analytic hierarchy processentropy-entropy weight method, AHP-EWM)计算3种性能指标的权重。定义稳定性能对多机悬吊系统工作空间不同位置点的稳定性进行量化。采用逼近理想解排序法(technique for order preference by similarity to ideal solution, TOPSIS)法对系统工作空间内各个位置点的稳定性能进行计算。

3)依据稳定性能,建立多维度工作空间。多维度工作空间可以表征多机悬吊系统的工作空间不同区域的稳定性能分布。

4)对多维度工作空间进行仿真实验,仿真结果表明,多维度工作空间可以准确地表征稳定性能分布,工作空间高性能的位置点主要分布在工作空间中心及上部区域。

1 多机悬吊系统运动学和动力学模型

1.1 系统构型及分类

多机悬吊系统是由3自由度串联机器人组成、使用柔性绳索吊运同一物体的系统。m台吊机固定在地面上,通过一根可调节长度的柔索与被吊运物相连,对被吊运物的n个自由度进行精确控制,从而实现被吊运物位姿的调整,并顺利完成吊运作业。系统的构型详见图1。

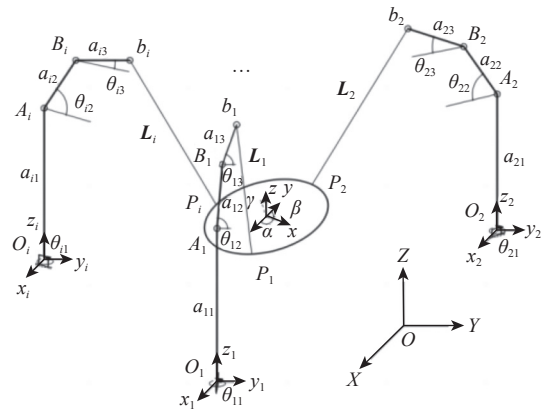


图1 悬吊系统空间构型

Fig. 1 Spatial configuration of the suspension system

图1中,O-XYZ为全局坐标系,O'-xyz为物体坐标系;在吊机靠近地面第1个关节的中心建立局部坐标系O_i-$x_iy_iz_i$,各坐标轴方向与O-XYZ一致。吊机为3关节机器人,O_i、A_i、B_i为第i台吊机的转动关节,初始位置均处于水平平面。a_{ij}为第i台吊机的第j根机械臂的长度(j=1,2,3),θ_{ij}为第i台吊机第j个关节处相对初始位置的转动量,$\boldsymbol{L}_i$为柔索的空间位置矢量,b_i为第i根柔索与第i台吊机末端连接点,P_i为吊点。多机悬吊系统在静力学平衡的研究中,输入量为θ_{ij}和柔索长度l_i,输出量为被吊运物的广义坐标(x, y, z, α, β, γ),其中,x、y、z分别为吊运物质心在X、Y、Z轴方向的位移量,α、β、γ分别为被吊运物绕X、Y、Z轴方向的转动量。通过系统输入量的改变控制输出量来满足不同的吊运任务需求。

根据驱动方式可以将多机悬吊系统分为定柔索长度、定末端、柔索长度和机器人末端位置同时变化3种构型。本文研究对象为定末端系统构型,对多机悬吊系统稳定性进行研究,该构型柔索的数目m=3,被吊运物自由度n=6。当$m\geqslant 3$时,所用研究方法及所得结论仍可成立。

1.2 系统运动学和动力学建模

由图1所示几何关系可知,多机悬吊系统的柔

索长度 l_i 为

$$l_i=\sqrt{(x_{P_i}-x_{b_i})^2+(y_{P_i}-y_{b_i})^2+(z_{P_i}-z_{b_i})^2}\quad i=1,2,3 \tag{1}$$

式中: $(x_{P_i},y_{P_i},z_{P_i})$为机器人末端在 *O-XYZ*中位置点 P_i 的坐标, $(x_{b_i},y_{b_i},z_{b_i})$为柔索与被吊运物的连接点在 *O-XYZ*中吊点 b_i 的坐标, 柔索与被吊运物的连接点由局部坐标向全局坐标通过齐次变换关系转换所得的坐标为

$$\begin{bmatrix}x_{P_i}\\y_{P_i}\\z_{P_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+{}^{O}\boldsymbol{R}_{P}\begin{bmatrix}{}^{P}x_{P_i}\\{}^{P}y_{P_i}\\{}^{P}z_{P_i}\end{bmatrix}\qquad i=1,2,3 \tag{2}$$

式中: $[{}^{P}x_{P_i},{}^{P}y_{P_i},{}^{P}z_{P_i}]^{\mathrm{T}}$为 P_i 在 *O′-xyz*中的位置坐标, ${}^{O}\boldsymbol{R}_{P}$为旋转矩阵。

$$\begin{aligned}{}^{O}\boldsymbol{R}_{P}&=\boldsymbol{R}_z(\gamma)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\alpha)=\\&\begin{bmatrix}\cos\gamma&-\sin\gamma&0\\\sin\gamma&\cos\gamma&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta&0&\sin\beta\\0&1&0\\-\sin\beta&0&\sin\beta\end{bmatrix}\cdot\\&\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha\\0&\sin\alpha&\cos\alpha\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3}$$

式中: $\boldsymbol{R}_x(\alpha)$ 为绕 x 轴的基本旋转矩, α 为绕物体坐标系 z 轴转角; $\boldsymbol{R}_y(\beta)$ 绕 y 轴的基本旋转矩阵, β 为绕物体坐标系 y 轴转角; $\boldsymbol{R}_z(\gamma)$ 绕 z 轴的基本旋转矩阵, γ 为绕物体 z 轴转角。

被吊运物的运动速度为$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{\omega})$, $\boldsymbol{v}$ 为被吊运物的平移速度, $\boldsymbol{\omega}$ 为被吊运物的角速度, 且有

$$\boldsymbol{v}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right) \tag{5}$$

多机悬吊系统的运动学方程由式 (1) 给出。机器人的数量等于柔索的数量, 也等于运动学方程的数量。由式 (1)～ 式 (5) 可以得到多机悬吊系统的运动学方程。

由于柔索相对于多机悬吊系统来说质量较轻, 因此, 被吊运物在吊运过程中, 通常可以忽略柔索自身的质量、弹性形变及由柔索自身质量产生的悬链线效应。基于这一假设, 可以将被吊运物的力旋量平衡方程表示为

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{F} \tag{6}$$

式中: $\boldsymbol{T}$ 为多机悬吊系统的拉力矩阵, $\boldsymbol{T}=[T_1,T_2,T_3]^{\mathrm{T}}$, T_1、T_2、T_3 为各柔索的拉力大小, $T_i\in(t_{\min},t_{\max})$为第 i 根柔索上的拉力介于柔索最小拉力 $t_{\min}$ 及柔索极限拉力 $t_{\max}$ 之间, 其中 i=1,2,3。 $\boldsymbol{F}$为被吊运物受到的外力旋量, 其为由 6 个分量组成的列向量, 表达式为

$$\boldsymbol{F}=\left[\left(M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{T}},\left([\boldsymbol{J}_x,\boldsymbol{J}_y,\boldsymbol{J}_z]\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

式中: M 为被吊运物的质量大小; $\boldsymbol{J}_x$、$\boldsymbol{J}_y$、$\boldsymbol{J}_z$分别为被吊运物绕 x、y、z 坐标轴的旋转惯量; t 为时间。

$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{J}_2,\boldsymbol{J}_3]$为悬吊系统的结构矩阵, 且有

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_i\\({}^{O}\boldsymbol{R}_{P}{}^{P}\boldsymbol{P})\times\boldsymbol{e}_i\end{bmatrix} \tag{8}$$

式中: ${}^{P}\boldsymbol{P}$ 为吊点 P_i 转换到全局坐标系的位置矢量; $\boldsymbol{e}_i$为柔索的单位向量, 即

$$\boldsymbol{e}_i=\frac{\boldsymbol{L}_i}{\|\boldsymbol{L}_i\|}=\frac{{}^{O}\boldsymbol{P}_i-{}^{O}\boldsymbol{b}_i}{\|{}^{O}\boldsymbol{P}_i-{}^{O}\boldsymbol{b}_i\|}\qquad i=1,2,3 \tag{9}$$

由式 (6)～式 (9) 可得到系统的动力学模型。使用最小二乘法联立以上静力学平衡方程求解, 可以得到 3 根柔索拉力的大小。

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{F})=0\Rightarrow\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{F})] \tag{10}$$

2　多机悬吊系统稳定性分析

2.1　稳定性描述

多机悬吊系统通过柔索驱动精确控制被吊运物体, 外界干扰可能导致被吊物体的运动状态变化, 进而影响整个系统的动态平衡。因此, 多机悬吊系统的运动稳定性可定义为: 系统在面对外部干扰时, 维持被吊运物预定运动轨迹和姿态, 顺利完成吊运任务的能力。

本文评估多机悬吊系统的稳定性是对被吊运物在工作空间内任意位置点的稳定程度进行评估。为量化不同位置点被吊运物的稳定性, 引入稳定性能的概念衡量各位置点的稳定水平。

多机悬吊系统的稳定性受柔索拉力分布、被吊运物的姿态和空间位置等因素影响, 这些因素共同决定不同位置点的稳定性高低。为此, 定义了 3 种性能指标, 包括被吊运物的位置、姿态和柔索拉力, 综合评价系统的稳定性。采用 TOPSIS 对这些指标进行多维度综合评估。

2.2　位置性能指标

在多机悬吊系统中, 使用位置性能指标σ表示被吊运物的位置, 其表达式为

$$\sigma=\left(\frac{l_1+l_2+l_3}{3l_{\max}}\right)\left(\frac{l_{\min}}{l_{\max}}\right) \tag{11}$$

式中: l_1、l_2、l_3为被吊运物处于工作空间该位置点时的各柔索长度; $l_{\max}$ 为 3 根柔索中最长一根柔索的长度, $l_{\min}$ 为 3 根柔索中最短一根柔索的长度。

通过多机悬吊系统的运动学方程来定义位置性能指标 σ, 表示被吊运物质心 P 距离多机悬吊系统工作空间的竖直中线 MQ 以及系统工作空间上

表面几何中心 M 点的距离，如图 2 所示。其中 M 和 Q 点均为工作空间上下表面的几何中心。

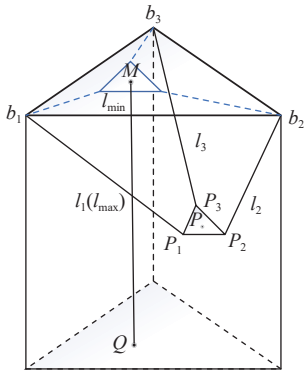


图 2 位置性能指标示意图

Fig. 2 Schematic diagram of location performance indicators

位置性能指标 $\sigma\in(0,1]$，当 σ 增加的时候，表示被吊运物位置向工作空间中心靠上区域移动，此时柔索拉力逐渐增大，系统的刚度逐渐提升。这增强了被吊运物抵抗外部干扰的能力，从而提高多机悬吊系统的稳定性。

2.3 姿态性能指标

分析多机悬吊系统构型可知，在静力学平衡时，绕 Z 轴旋转的 γ 角不影响稳定性。在评估姿态对被吊运物稳定性影响时，主要考虑绕 X 和 Y 轴旋转的 α 和 β 角。当 α 和 β 接近 0°时，被吊运物姿态稳定；当 α 或 β 接近± π/2 rad 时，可能发生柔索虚牵的情况，导致多机悬吊系统不稳定。因此，在实际吊运中应避免这种情况发生。

引入姿态性能指标 ζ 来衡量多机悬吊系统被吊运物的姿态稳定程度：

$$\zeta=\frac{\pi/2-\max(|\alpha|,|\beta|)}{\pi/2} \tag{12}$$

式中：$\zeta\in[0,1]$。被吊运物的姿态角 α 与 β 均为 0°时，ζ=1，此时被吊运物的姿态平稳，被吊运物运动稳定性最高；反之当 α 或 β 为±π/2 rad 时，ζ=0，此时柔索虚牵，拉力失衡，被吊运物处于极不稳定的情况。

2.4 拉力均匀性性能指标

使用 3 根柔索拉力之和与其中拉力最大柔索拉力的比值来定义拉力均匀性性能指标 τ：

$$\tau=\left(\frac{T_1+T_2+T_3}{3T_{\max}}\right) \tag{13}$$

式中：T_1、T_2、T_3 为第 1、2、3 根柔索的拉力；$T_{\max}$ 为 3 根柔索中拉力最大柔索的拉力。

拉力均匀性性能指标 $\tau\in(0,1]$，当 T_1=T_2=T_3 时，τ=1，柔索的拉力分布更加均匀，被吊运物的平稳性更好，反之各柔索之间拉力差别越大，τ 越小，被吊运物越不平稳。

3 基于熵权-TOPSIS 的多机悬吊系统稳定性评价模型

多机悬吊系统在工作空间内不同区域的稳定性各不相同，每个位置点的稳定性能也有所差异。需要一种可视化的方法准确反映稳定性能的分布。此外，不同指标对系统稳定性的影响程度也不同。为正确计算各指标的权重，本文采用 EWM 确定权重，并结合 AHP 进行修正。利用 TOPSIS 对工作空间内各位置点的稳定性能进行计算，并将稳定性能 Ω_S 以颜色映射到工作空间中，建立多维度工作空间。这些研究为多机悬吊系统的构型优化提供了理论基础。

3.1 AHP-EWM 赋权

在评估多机悬吊系统工作空间不同位置点的稳定性时，不同性能指标在评价模型中的权重不同，而现有研究通常将各指标权重视为相等，这与实际情况相悖。本文采用 EWM 确定性能指标的客观权重，这是一种通过信息量确定指标权重的客观方法，特别适用于多指标的权重确定，确保评估结果更为客观。在确定拉力均匀性、位置和姿态 3 个指标的权重时，每个工作空间位置点都被视为评价对象。

汇总位置性能指标、拉力均匀性性能指标及姿态性能指标构成原始矩阵：

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\tau_{n'1} & \sigma_{n'2} & \zeta_{n'3}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=(x_{i'j'})_{n'\times 3}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_{n'1} & x_{n'2} & x_{n'3}\end{bmatrix} \tag{14}$$

式中：$\boldsymbol{X}$ 为原始数据矩阵；$x_{i'j'}$ 为第 i' 个评价对象的第 j' 个性能评价指标；j'=1,2,3。n' 为评价的对象，等于工作空间位置点的数目。

为使各性能指标转化为正向指标，需要对原始矩阵正向化，对影响多机悬吊系统稳定性的各性能指标进行趋同化处理。令

$$A=\max(x_{1j'},x_{2j'},\cdots,x_{n'j'}) \tag{15}$$

$$B=\min(x_{1j'},x_{2j'},\cdots,x_{n'j'}) \tag{16}$$

$$x'_{i'j'}=\frac{x_{i'j'}-B}{A-B} \tag{17}$$

原始的性能指标经过正向化处理之后，即可得到正向化矩阵 $\boldsymbol{X}'$：

$$\boldsymbol{X}'=(x'_{i'j'})_{n'\times 3}=\begin{bmatrix}x'_{11} & x'_{12} & x'_{13}\\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x'_{n'1} & x'_{n'2} & x'_{n'3}\end{bmatrix} \tag{18}$$

由于各性能指标之间量纲不同，需要对性能指

标进行归一化处理, 以消除不同量纲的影响, 使原始数据介于区间 [0,1], 得到标准化矩阵 $\boldsymbol{Z}$:

$$\boldsymbol{Z}=\left(z_{i'j'}\right)_{n'\times 3}=\frac{x'_{i'j'}}{\sqrt{\sum_{i'=0}^{n'}x'^{2}_{i'j'}}}=\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n'1} & z_{n'2} & z_{n'3} \end{bmatrix} \tag{19}$$

式中: $z_{i'j'}$为第 j'项指标下第 i'个评价对象占该指标的比重, 有 n 行评价对象, 3 列评价指标。

通过概率矩阵可以计算第 j'项指标下第 i'个样本值占该指标的比重:

$$p_{i'j'}=\frac{z_{i'j'}}{\sum_{i'=1}^{n'}z_{i'j'}} \tag{20}$$

由式 (20) 可以得到各性能指标的熵值 $C_{j'}$:

$$C_{j'}=-\frac{\sum_{i'=1}^{n'}p_{i'j'}\ln p_{i'j'}}{\ln n'}\qquad j'=1,2,3 \tag{21}$$

计算第 j'项指标的信息熵冗余度:

$$g_{j'}=1-C_{j'}\qquad j'=1,2,3 \tag{22}$$

由式 (14)～式 (22) 可以得到多机悬吊系统各性能指标的熵权ω_{E}:

$$\omega_{\mathrm{E}}=\frac{g_{j'}}{\sum_{j'=1}^{3}g_{j'}}\qquad j'=1,2,3 \tag{23}$$

由式(14)～式(23)可以求得影响多机悬吊系统稳定性的各性能指标的熵权, EWM 是一种客观的赋权方法, 通过评估指标数据的离散程度来确定权重。然而, 由于数据误差可能对结果产生较大影响, 为更符合实际情况, 本文使用 AHP 对 EWM 进行修正。

由于被吊运物姿态失稳时往往伴随受力不均衡, 物体会通过位置偏移自发回归受力平衡状态, 该过程中被吊运物的拉力与位置同步发生改变。被吊运物姿态由自身位置与拉力状态共同决定, 因此, 在多机悬吊系统稳定性评价中, 姿态性能指标的重要程度最低。结合文献 [17] 的研究结论, 在系统参数保持一致的条件下, 增大位置性能指标权重、减小拉力均匀性性能指标权重时, 被吊运物整体稳定性逐步提升, 这表明位置性能指标对吊运物体运动稳定性的影响更为突出。综合上述分析可得 3 个性能指标的重要性排序: 位置性能指标＞拉力均匀性性能指标＞姿态性能指标。

本文采用 AHP 确定各性能指标的主观权重 ω_{A}, 如表 1 所示。针对位置性能指标σ、拉力均匀性性能指标τ、姿态性能指标ζ, 构建两两比较判断矩阵, 矩阵采用 1–9 标度法完成指标间相对重要性赋值。由矩阵赋值结果可见, 在所研究的多机悬吊评价问题中, 指标σ重要性最高, τ次之, ζ重要性最低。后续基于该判断矩阵求解各指标权重, 并开展一致性检验, 以保证专家主观判断逻辑不存在显著矛盾。

表 1　性能指标行因素相对于列因素的重要程度得分

Table 1　Score of the importance degree of row factors with respect to column factors for performance index

性能指标	重要程度得分		
	τ	σ	ζ
τ	1	1/2	3
σ	2	1	4
ζ	1/3	1/4	1

比较优先判断矩阵, 通过 AHP 计算得到 ω_{A} = [0.319 6, 0.558 4, 0.122 0]。为验证判断矩阵设计的合理性, 进行一致性检验[18]。表达式见式 (24), 随机一致性指标如表 2 所示。

$$C_{\mathrm{R}}=\frac{\lambda_{\max}-n}{(s-1)R_{\mathrm{I}}} \tag{24}$$

式中: R_{I}为随机一致性指标; s 为矩阵维数; $\lambda_{\max}$为矩阵最大特征值; C_{R} 为一致性检验指标。

表 2　随机一致性指标

Table 2　Random consistency indicators

矩阵维数	R_{I}
1	0
2	0
3	0.58
4	0.89
5	1.12
6	1.24

根据矩阵的一致性指标, 当 n=3 时, R_{I}=0.58, 代入数值得 C_{R}=0.015 776<0.1, 表示矩阵符合一致性检验, 各指标权重比例具有科学性。

将 AHP 与 EWM 结合, 通过式 (25) 计算得到复合权重ω_{S}:

$$\omega_{\mathrm{S}}=\frac{\omega_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{A}}}{\sum_{i=1}^{3}\omega_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{A}}} \tag{25}$$

通过 AHP-EWM 得到 3 个性能指标的权重之后, 使用 TOPSIS 法对工作空间内各位置点的稳定性能进行计算, 实现对多机悬吊系统工作空间稳定性的综合评价。

3.2　TOPSIS 法综合评价

评估多机悬吊系统工作空间稳定性时, 需要计

算所有位置点的稳定性能。通过获取各位置点的性能数据，可以建立系统中所有性能指标的理想最优解和最劣解。TOPSIS方法通过特定计算确定每个位置点相对于理想最优解和最劣解的综合距离，来评估工作空间各位置点的稳定性。距离理想最优解越近且距离最劣解越远的位置点稳定性越高；反之，稳定性越低。

使用TOPSIS法综合多机悬吊系统各性能指标权重，构建性能评估体系来评估系统稳定性。该方法不仅能够确定工作空间内不同位置点的稳定性能Ω_{S}，还能直观地反映被吊运物在每个位置点的稳定程度，为系统构型优化提供关键参考。

通过式(19)得到的标准化矩阵$\boldsymbol{Z}$定义正理想值D^{+}与负理想值D^{-}：

$$D^{+}=\max|\boldsymbol{Z}_{i1},\boldsymbol{Z}_{i2},\cdots,\boldsymbol{Z}_{in}| \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{26}$$

$$D^{-}=\min|\boldsymbol{Z}_{i1},\boldsymbol{Z}_{i2},\cdots,\boldsymbol{Z}_{in}| \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{27}$$

计算各性能指标与D^{+}、D^{-}的欧氏距离：

$$D_i^{+}=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\omega_{\mathrm{E}}(Z_j^{+}-z_{ij})^2} \tag{28}$$

$$D_i^{-}=\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\omega_{\mathrm{E}}(Z_j^{-}-z_{ij})^2} \tag{29}$$

计算该位置点的稳定性能Ω_{S}：

$$\Omega_{\mathrm{S}}=\frac{D_i^{-}}{D_i^{+}+D_i^{-}} \tag{30}$$

通过TOPSIS法，可得多机悬吊系统的工作空间不同位置点的稳定性能Ω_{S}，$\Omega_{\mathrm{S}}\in[0,1]$，不同位置点的稳定性不同，当$\Omega_{\mathrm{S}}$=0时，说明位置点与理想性能最劣点重合，此时该位置点的稳定性能最低，多机悬吊系统的稳定性最差。随着Ω_{S}的增加，位置点的稳定性能增加，当Ω_{S}=1时，说明位置点与理想性能最优的点重合，此时与理想性能最劣点的距离最远，该位置点的稳定性能最高，多机悬吊系统的稳定性最优，通过TOPSIS法可以对多机悬吊系统工作空间的稳定性能进行计算。

3.3 多维度工作空间

建立多机悬吊系统的稳定性评价模型后，基于TOPSIS法结合拉力均匀性性能指标、位置性能指标、姿态性能指标求解工作空间位置点稳定性能，建立多性能指标融合全域表达的多维度工作空间。多维度工作空间具体定义为：对于3根柔索控制的6自由度的多机悬吊系统，将每一个性能指标作为一个维度，多维度综合对静力学平衡工作空间位置点P的稳定性能进行评价。将稳定性能评分颜色映射到位置点P，评价后的位置点P的集合构成了多机悬吊系统的多维度工作空间。

在求解多维度工作空间时，给定稳定性能Ω_{S}的区间，求解在该区间内的所有位置点，并将Ω_{S}颜色映射到该位置点。多维度工作空间求解步骤如下：

1）定义多机悬吊系统的构型参数，稳定性能Ω_{S}的区间、吊机的姿态变换范围、被吊运物的质心位置的范围及吊机末端的坐标。

2）使用Monte Carlo法循环N次，随机给出被吊运物的位置及姿态。

3）在每次循环内，按式(1)计算出3根柔索的长度，利用式(6)～式(9)计算出结构矩阵$\boldsymbol{J}$，判断$\boldsymbol{J}$是否发生降秩。如果发生降秩，则本循环停止，进行下一循环；如果没有降秩，则根据式(10)计算每根柔索的拉力。

4）判断每次循环中3根柔索的拉力大小T_i，如果$T_i\in[0,T_{\max}]$，则使用式(11)～式(13)计算该位置点的各性能指标τ、ζ、σ。

5）汇总记录计算的性能指标，使用EWM通过式(23)计算指标的客观权重，并使用式(25)得到复合权重。

6）使用TOPSIS法通过式(30)计算位置点的稳定性能Ω_{S}，若Ω_{S}属于给定区间，则将Ω_{S}颜色映射到该位置点上，符合条件的位置点的集合组成了多机悬吊系统的多维度工作空间。

4 实例仿真

以3台吊运机器人协作吊运一个重物为例，如图3所示。

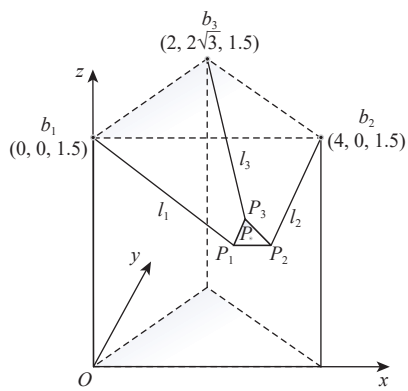


图3 机器人末端位置示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the robot end position

多机悬吊系统的相关参数如表3所示。

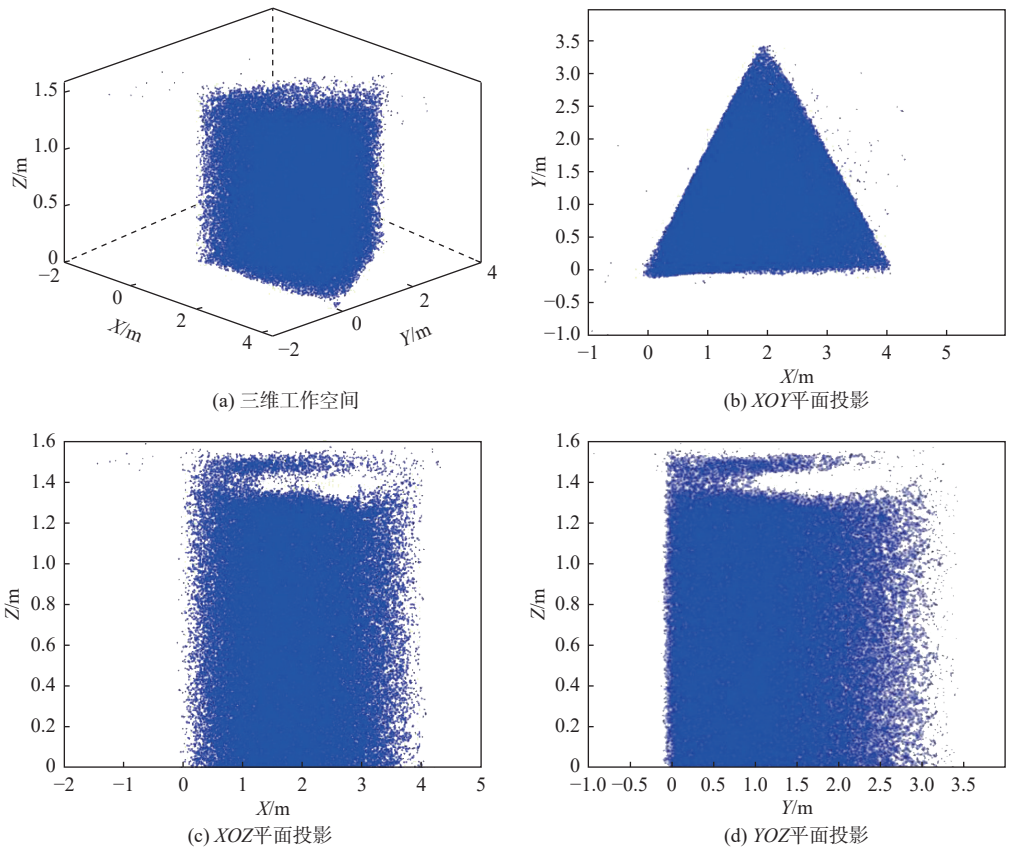
循环10万次，求解多机悬吊系统的静力学平衡工作空间，并求解各性能指标及权重，对工作空间的稳定性能进行计算，得到多机悬吊系统的多维度工作空间。

多机悬吊系统的静力学平衡工作空间如图4所示。经过10万次循环测试，可以观察到多机悬

表 3　悬吊机器人模型参数

Table 3　Model parameters of suspended robot

被吊运物质量M_p/kg	索拉力下限t_{min}/N	索拉力上限t_{max}/N	绕X轴旋转姿态角α/rad	绕Y轴旋转姿态角β/rad	1#末端位置b_1/m	2#末端位置b_2/m	3#末端位置b_3/m
10	0	400	$(-\pi/2, \pi/2)$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$(0,0,1.5)^T$	$(4,0,1.5)^T$	$(2,2\sqrt{3},1.5)^T$



(a) 三维工作空间　(b) *XOY*平面投影

(c) *XOZ*平面投影　(d) *YOZ*平面投影

图 4　静力学平衡工作空间仿真结果

Fig. 4　Static balance workspace simulation results

吊系统静力学平衡工作空间空间具有明确的界限。由于循环次数的限制, 边界区域的工作空间点分布较为稀疏。总体, 该工作空间的几何形状大致为直三棱柱, 有 335 个位置点游离在约束范围之外, 这是由于计算时算法的特性所产生的, 实际吊运中这些点是很难抵达的。静力学平衡工作空间总体分布与多机悬吊系统末端位置布局基本一致。

通过式 (23) 计算得到 3 个性能指标的客观权重, 得到熵权 $\omega_E=[\tau,\sigma,\zeta]=[0.247\,4,0.479\,8,0.272\,8]$, 结合$\omega_A$通过式 (25) 得到多机悬吊系统的性能指标的复合权重$\omega_S=[0.207\,9,0.704\,5,0.087\,6]$。

在 EWM 和 AHP 所计算的结果中, 权重系数最大的均为位置性能指标σ, 权重因子占比都接近 0.5。而 EWM 计算的姿态性能指标ζ的权重大于拉力均匀性性能指标τ, 这是由于 EWM 在计算的过程中依赖数据本身的变异程度, 被吊运物的姿态波动影响了 EWM 计算的结果, 在实际吊运过程当中, 被吊运物可以在姿态不平稳时自动调节姿态, 使被吊运物的状态趋于稳定, 因此, 在进行稳定性评价时, 姿态对多机悬吊系统的稳定性贡献较小, 权重最低。这时需要使用 AHP 对 EWM 进行修正, 修正之后得到的复合权重: $\sigma>\tau>\zeta$。较为合理地反映了 3 个性能指标对多机悬吊系统稳定性的影响程度。

得到性能指标的权重后, 使用 TOPSIS 法对多机悬吊系统工作空间位置点的稳定性能进行综合评价, 如图 5 所示。稳定性能Ω_S呈中间高两头低的

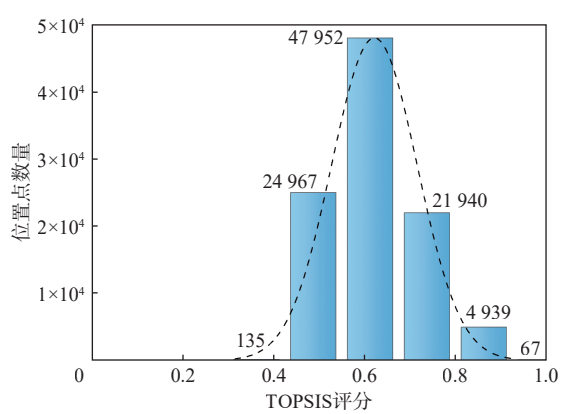
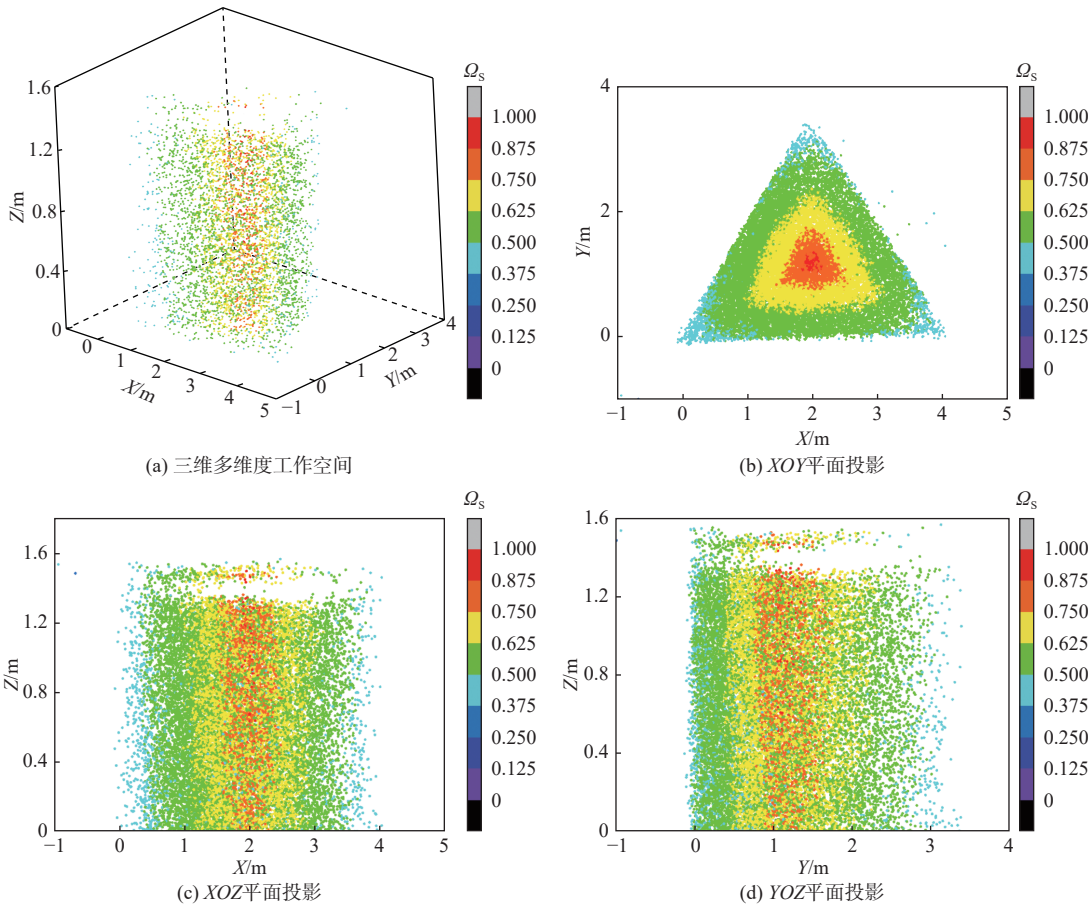


图 5　TOPSIS 评分分布

Fig. 5　TOPSIS score distribution

分布趋势，Ω_S多分布于区间 [0.4,0.8]。

按照第 3 节所述的步骤将 TOPSIS 法得到的稳定性能Ω_S颜色映射到原工作空间中，得到多机悬吊系统的多维度工作空间，综合反映多机悬吊系统工作空间稳定性能的分布，多维度工作空间如图 6 所示。不同的颜色代表不同的稳定性评分，从多维度工作空间 *XOY* 平面投影可以明显看出，多机悬吊系统的Ω_S主要呈现阶梯分布，从外到内Ω_S逐渐增加，机械臂末端位置附近的工作空间位置点的颜色主要为浅蓝色，代表稳定性能$\Omega_S \in [0,0.5]$，该区域的稳定程度较低。内部的Ω_S呈弧三角形向心逐渐增加，其中，工作空间中心位置点的稳定性能最高，Ω_S接近 1。



(a) 三维多维度工作空间　(b) *XOY*平面投影

(c) *XOZ*平面投影　(d) *YOZ*平面投影

图 6　$\Omega_S \in [0,1]$ 时的多维度工作空间

Fig. 6　Multi-dimensional workspace at $\Omega_S \in [0,1]$

使用 Alpha Shape 算法可以对多维度工作空间进行边界拟合，并使用数值积分法求解工作空间体积。得到不同评分区间内的工作空间体积变化，如图 7 所示。可以看出，当$\Omega_S \in [0.7,1]$ 时，相比于$\Omega_S \in [0,1]$，位置点数目减少至 20 479 个，下降 79.18%；工作空间体积从 10.472 m^3 减少至 1.905 6 m^3，下降 81.80%，而当$\Omega_S \in [0.8,1]$ 时，相对于$\Omega_S \in [0.7,1]$，位置点数目减少至 5 006 个，下降 75.87%；工作空间体积从 1.905 6 m^3 减少至 0.463 3 m^3，下降 75.69%。这说明，随着稳定性能的增加，在多机悬吊系统的工作空间中，工作空间的位置点数目逐渐减少，工作空间体积也逐步下降。在实际吊运任务当中，往往对被吊运物的稳定性有一定要求，需要被吊运物在稳定性能较高的区域内运动，这对工作空间的稳定性能提出了要求，需要求解稳定性能更好的工作空间。

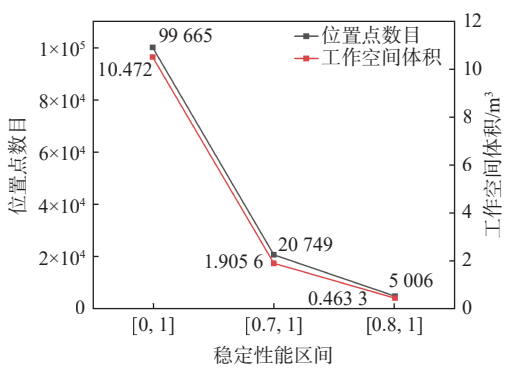
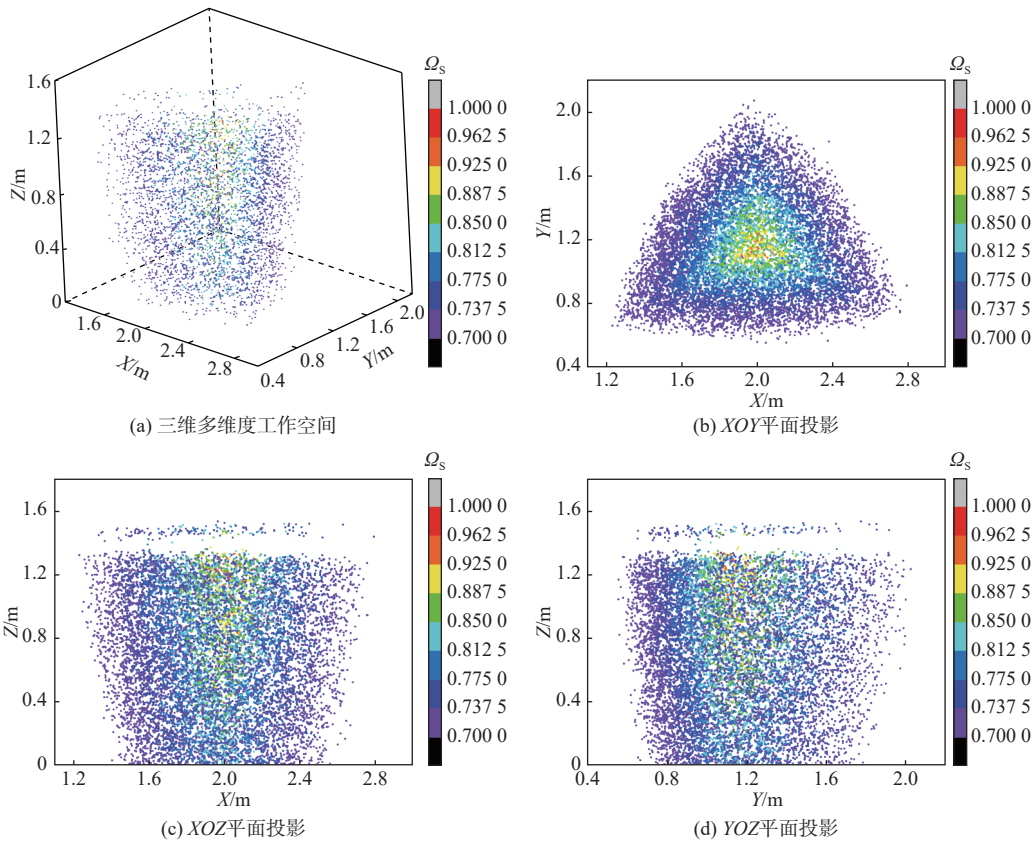


图 7　不同稳定性能区间的多维度工作空间变化

Fig. 7　Multi-dimensional workspace changes in different stability performance intervals

求解$\Omega_S \in [0.7,1]$ 和$\Omega_S \in [0.8,1]$ 的多维度工作空间，如图 8 和图 9 所示。可以看出，当Ω_S增加时，多机悬吊系统的多维度工作空间呈倒三棱台的形状，边界也从直边三角形更接近弧三角形，表明工作空间中心区域的稳定性能优于工作空间边界区域。

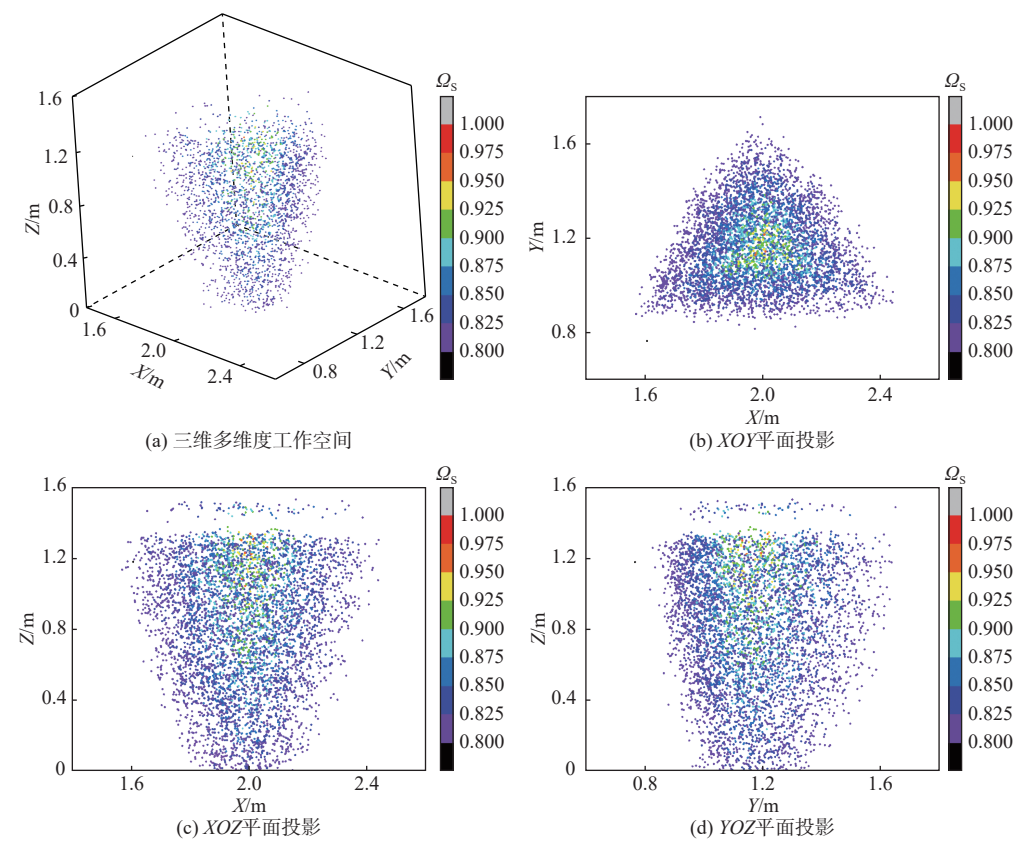


(a) 三维多维度工作空间　(b) *XOY*平面投影

(c) *XOZ*平面投影　(d) *YOZ*平面投影

图 8　$\Omega_S \in [0.7,1]$ 时的多维度工作空间

Fig. 8　Multi-dimensional workspace at $\Omega_S \in [0.7,1]$



(a) 三维多维度工作空间　(b) *XOY*平面投影

(c) *XOZ*平面投影　(d) *YOZ*平面投影

图 9　$\Omega_S \in [0.8,1]$ 时的多维度工作空间

Fig. 9　Multi-dimensional workspace at $\Omega_S \in [0.8,1]$

图8和图9相比图6,多维度工作空间下部体积减小尤为突出,进一步表明工作空间的稳定性能由下而上逐渐增加,工作空间上部运动稳定程度优于工作空间底部。通过对比图8与图9可知,在不同的Q_S区间内,稳定性能评分接近的点在分布上呈现出相似性,彼此可以交叉验证。这为面对不同任务需求的多机悬吊系统的构型优化提供了理论指导,即以多维度工作空间为基础,以提升工作空间的Q_S整体质量及分布为导向,对多机悬吊系统进行构型优化,满足不同的任务需求。

5 结 论

针对多机悬吊系统工作空间稳定性难以量化评价的问题,采用AHP与EWM组合赋权确定拉力均匀性、位置、姿态3项性能指标的复合权重,结合TOPSIS法建立了多机悬吊系统工作空间稳定性评价模型,并构建多维度工作空间表征稳定性能的空间分布。实例仿真结果表明:工作空间稳定性能呈中间高、两头低的分布趋势,中部及上部区域稳定性较优;随稳定性能阈值增大,多维度工作空间呈倒三棱台状收缩。该评价方法与多维度工作空间可为多机悬吊系统的构型优化、吊运作业区域选取与路径规划提供理论依据。

未来将进一步拓展稳定性评价指标体系,计入柔索弹性形变、外界扰动等实际工况因素,提高稳定性评价的精准度;并将该评价方法推广至定柔索长度、柔索长度与机器人末端位置同时变化等其他构型的多机悬吊系统,结合多维度工作空间的稳定性分布开展构型优化设计,使被吊运物尽可能运行于高稳定区域。

参考文献(References)

[1] 赵志刚, 滕富军, 石广田, 等. 多机器人联合吊运系统可行域分析与求解[J]. 上海交通大学学报, 2015, 49(8): 1174-1180.
Zhao Z G, Teng F J, Shi G T, et al. Analysis and calculation of feasible region of multi-robot combined lifting system[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2015, 49(8): 1174-1180(in Chinese).

[2] 苏程, 叶佳楠, 李巍, 等. 欠约束多机协调吊运系统动力学工作空间分析[J]. 上海交通大学学报, 2019, 53(2): 225-231.
Su C, Ye J N, Li W, et al. Analysis of dynamic workspace for under-constrained coordinate suspending system with multi-robots[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2019, 53(2): 225-231(in Chinese).

[3] 刘鹏, 仇原鹰. 绳牵引摄像机器人的力位混合稳定性评价方法[J]. 西安电子科技大学学报 (自然科学版), 2016, 43(1): 87-93.
Liu P, Qiu Y Y. Approach with a hybrid force-position property to assessing the stability for camera robots[J]. Journal of Xidian University, 2016, 43(1): 87-93(in Chinese).

[4] Behzadipour S, Khajepour A. Stiffness of cable-based parallel manipulators with application to stability analysis[J]. Journal of Mechanical Design, 2006, 128(1): 303-310.

[5] Michael N, Fink J, Kumar V. Cooperative manipulation and transportation with aerial robots[J]. Autonomous Robots, 2011, 30(1): 73-86.

[6] Bosscher P, Ebert-uphoff I. A stability measure for undercon-strained cable-driven robots[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway: IEEE, 2004: 4943-4949.

[7] Vu D S, Alsmadi A. Trajectory planning of a cable-based parallel robot using reinforcement learning and soft actor-critic[J]. WSEAS Transactions on Applied and Theoretical Mechanics, 2020, 15: 165-172.

[8] Vu D S, Barnett E, Zaccarin A M, et al. On the design of a three-DOF cable-suspended parallel robot based on a parallelogram arrangement of the cables[C]//Gosselin C, Cardou P, Bruckmann T, et al. Cable-Driven Parallel Robots. Cham: Springer International Publishing, 2018: 319-330.

[9] 刘鹏, 乔心州. 大跨度完全约束空间3-DOF柔索驱动并联机器人稳定性灵敏度研究[J]. 清华大学学报 (自然科学版), 2022, 62(9): 1548-1558.
Liu P, Qiao X Z. Stability sensitivity of a completely restrained 3-DOF cable-driven parallel robot with four long-span cables[J]. Journal of Tsinghua University(Science and Technology), 2022, 62(9): 1548-1558(in Chinese).

[10] 刘鹏, 曹现刚, 张旭辉, 等. 4-1型柔索驱动并联机器人稳定性度量及其灵敏度分析[J]. 振动与冲击, 2023, 42(14): 180-188.
Liu P, Cao X G, Zhang X H, et al. Stability and sensitivity of a 4-1 type cable-driven parallel robot[J]. Journal of Vibration and Shock, 2023, 42(14): 180-188(in Chinese).

[11] Liu P, Qiu Y Y, Su Y. A new hybrid force-position measure approach on the stability for a camera robot[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016, 230(14): 2508-2516.

[12] Liu P, Qiu Y Y, Su Y, et al. On the minimum cable tensions for the cable-based parallel robots[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014: 350492.

[13] 苏程, 卫启哲, 赵志刚, 等. 多机协调吊运系统综合多影响因子的位置稳定性评价方法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2023, 44(3): 481-488.
Su C, Wei Q Z, Zhao Z G, et al. Position stability evaluation method for a multi-robot coordinated lifting system based on multi-influence factors[J]. Journal of Harbin Engineering University, 2023, 44(3): 481-488(in Chinese).

[14] 董成举, 刘文威, 李小兵, 等. 六轴工业机器人工作空间分析及区域性能研究[J]. 中国测试, 2020, 46(5): 154-160.
Dong C J, Liu W W, Li X B, et al. Working space analysis and space division performance research on 6-DOF industrial robot[J]. China Measurement & Testing Technology, 2020, 46(5): 154-160(in Chinese).

[15] 李典. 面向任务的并联机构多维度工作空间表示及构型设计研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2020.
Li D. Research on multi-dimensional workspace representation and task-oriented structural design for parallel mechanisms[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2020(in Chinese).

[16] 赵嘉浩, 訾斌, 王威, 等. 刚柔复合驱动并联喷涂机器人机构设计与工作空间分析[J]. 机械工程学报, 2023, 59(15): 28-39.
Zhao J H, Zi B, Wang W, et al. Mechanical design and workspace analysis of a rigid-flexible hybrid driven parallel spray-painting robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(15): 28-39(in Chinese).

[17] 陈瑞娜. 浮动基多机协调吊运系统的运动稳定性分析[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2023.
Chen R N. Kinematic stability analysis of multi-robot coordinated towing system with floating base[D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2023(in Chinese).

[18] 夏子立, 景强, 高文博, 等. 基于权重融合法的跨海桥梁部位及部件权重体系分析[J]. 科学技术与工程, 2023, 23(5): 2171-2180.
Xia Z L, Jing Q, Gao W B, et al. Weight system analysis of bridge parts and components based on weight fusion method[J]. Science Technology and Engineering, 2023, 23(5): 2171-2180(in Chinese).

Workspace stability evaluation of multi-engine suspension system based on EWM-TOPSIS

LI Wei，ZHAO Zhigang*，ZHAO Xiangtang，LI Zixuan，GANG Zheng

(School of Mechatronic Engineering，Lanzhou Jiao Tong University，Lanzhou 730070，China)

Abstract：In response to the challenge of assessing the stability of a multi-robot suspension system's workspace, we propose a stability evaluation method based on entropy weight method (EWM) and technique for order preference by similarity to an ideal solution (TOPSIS). Additionally, article establish a multi-dimensional workspace to characterize the distribution of stability within the workspace. Firstly, by analyzing the kinematics and dynamics characteristics of the system, article introduce performance indices for position, attitude, and flexure force uniformity that impact the system's stability. Secondly, the article employs EWM-AHP to calculate composite weights for each performance index in order to determine their relative importance. Subsequently, TOPSIS is utilized to evaluate the stability performance of each position in the workspace. Finally, simulation computations are performed to identify the static balancing workspace of a fixed-end multi-machine suspension system and evaluate the stability of different positions within this space over various stability performance intervals. The simulation findings show that the multi-dimensional working space decreases toward its center and upper half as stability performance increases, indicating improved overall stability in these areas for the working space of the multi-machine suspension system. This analysis provides a theoretical foundation for optimizing configurations in multi-robot suspension systems.

Keywords：multi-robot system; suspension system; stability; multi-dimensional workspace; technique for order preference by similarity to an ideal solution; entropy weight method

Received：2024-07-18；**Accepted**：2024-09-23；**Published Online**：2024-09-27 10：28

URL：link.cnki.net/urlid/11.2625.V.20240926.1735.002

Foundation items：National Natural Science Foundation of China (51965032); National Natural Science Foundation of Gansu Province of China (22JR5RA319)

* **Corresponding author**. E-mail：zhaozhg@mail.lzjtu.cn