

北京航空航天大学学报
Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics
ISSN 1001-5965,CN 11-2625/V

《北京航空航天大学学报》网络首发论文

题目：含输入时延的不确定非线性系统有限时间自适应控制
作者：徐刚，王红红，王凯
DOI：10.13700/j.bh.1001-5965.2026.0327
收稿日期：2026-05-31
网络首发日期：2026-09-02
引用格式：徐刚，王红红，王凯．含输入时延的不确定非线性系统有限时间自适应控制[J/OL]．北京航空航天大学学报．
https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2026.0327



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

含输入时延的不确定非线性系统有限时间自适应控制

徐刚[1]，王红红[2,✉]，王凯[2]

（1. 潍坊职业学院 机电工程学院，潍坊 262737；2. 青岛大学 电气工程学院，青岛 260071）

✉通信作者 E-mail： sdwhh2007@126.com

摘要 针对一类同时含有未知非线性和输入时延的纯反馈非线性系统，研究其实用有限时间自适应反步控制方案。为解决输入时延可能引发的系统失稳问题，引入一类辅助系统对时延动态进行补偿；利用径向基函数神经网络的强大通用逼近能力，实时在线估计系统中的未知非线性函数；采用反步法的递推设计思路，结合自适率对神经网络权值进行在线调整，构造状态反馈控制器。借助该控制器闭环系统中所有信号实现半全局实用有限时间稳定性，且确保系统状态在有限时间内收敛于原点附近的一小邻域内。依据实用有限时间稳定性理论，完成了闭环系统的稳定性分析。最后通过三阶数值系统及同步发电机励磁系统的仿真验证了所提方法的有效性。

关键词 非线性系统；输入时滞；自适应反步控制；神经网络；实用有限时间稳定

中图分类号 TP173.2；O231.2 文献标志码 A DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2026.0327

Finite-time adaptive control for uncertain nonlinear systems with input delays

XU Gang[1], WANG Honghong[2,✉], WANG Kai[2]

（1. School of Mechanical and Electrical Engineering, Weifang Vocational College, Weifang 262737, China；

2. College of Electrical Engineering, Qingdao University, Qingdao 260071, China）

✉E-mail: sdwhh2007@126.com

Abstract The practical finite-time adaptive backstepping control strategy is investigated for a category of pure-feedback nonlinear systems subject to both unknown nonlinear dynamics and input delays. To mitigate the destabilizing effects induced by input delays, an auxiliary compensation system is introduced in the control design. Radial basis function neural networks are employed to approximated the unidentified nonlinear functions online, leveraging their universal approximation capabilities. By integrating the recursive backstepping design with adaptive laws for weight tuning, a state-feedback controller is developed. The controller guarantees semi-global practical finite-time stability for all closed-loop signals, and ensures the system states converge to a small neighborhood of the origin within finite time. Rigorous stability analysis is carried out based on practical finite-time stability theory. To conclude, the theoretical results are validated through simulations on a third-order numerical system and a synchronous generator excitation system, demonstrating the effectiveness of the proposed approach.

Key words nonlinear system; input time delay; adaptive backstepping control; neural network; practical finite-time stability

渐近稳定性仅保证系统状态轨迹在时间趋于无穷大时逐渐逼近平衡点，其收敛过程往往呈现指数衰减特征，理论上永远无法在有限时刻完全抵达零误差状态。相比之下，有限时间稳定性提出了更为严苛的要求：它强制系统状态必须在某个确定的有限时间 T 内精确收敛至平衡点，并在此后保持静止。从控制性能的角度审视，有限时间稳定不仅显著提升了系统的收敛速率和瞬态响应能力，更赋予了闭环系统更强的抗干扰鲁棒性与高精度定位能力。因此，在对响应速度和稳态精度有极高要求的现

收稿日期：2026-05-31

基金项目：山东省自然科学基金（基金号 ZR2020MF068）

英文基金项目：Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2020MF068)

网络首发时间：2026-09-02 17:19:03 网络首发地址：https://link.cnki.net/urlid/11.2625.v.20260902.1041.001

代工程实践中，有限时间稳定理论具有比传统渐近稳定更深远的实际意义和应用价值。

有限时间稳定性的严格数学定义可追溯至上世纪中期。1961 年，Weiss 和 Infante 首次提出了有限时间稳定的概念[1]，随后在 1965 年和 1967 年继续发表了相关论文，进一步完善了这一理论框架[2,3]，但受限于非线性分析工具的缺乏，早期研究主要集中于线性系统的有限时间有界性分析，未能形成系统的控制器设计方法。进入 21 世纪，有限时间控制理论研究取得突破性进展。Bhat 和 Bernstein 于 2000 年系统建立了齐次性理论与有限时间稳定的内在联系，揭示了齐次系统可以在有限时间内收敛的充分条件[4]。这一理论突破为非线性系统的有限时间控制器设计提供了系统性的分析框架。在此基础上，洪奕光等学者进一步扩展了非光滑系统的有限时间稳定性理论，将相关结果推广至更一般的非线性系统[5-7]。

需要注意的是，Weiss 和 Infante 在 1961 年提出的“有限时间稳定性”(Finite-Time Stability, FTS)与现代非线性控制理论中 Bhat 与 Bernstein 所讨论的“有限时间收敛稳定性”(Finite-Time Convergence/Stability)在定义上有所不同。前者侧重于实用稳定性(Practical Stability)。即系统状态在给定的有限时间区间 $[0,T]$ 内，如果初始状态在一个小范围内，则状态轨迹始终保持在另一个给定的界限内。它不要求状态在 T 时刻收敛到零，只要求不越界。后者侧重于有限时间收敛。即系统状态不仅在李雅普诺夫意义下稳定，且能在有限的时间内精确到达平衡点 $x(t)=0,\forall\, t\geq T$ 。

国内学者丁世宏、李世华于 2011 年发表的《有限时间控制问题综述》系统梳理了早期的理论成果，特别是齐次性方法、终端滑模控制等核心设计技术[8]。发表在《控制理论与应用》上，由东北大学刘洋、井元伟等学者撰写的文章在 2011 年综述的基础上，进一步涵盖了近十年的新进展，特别是对固定时间稳定 (Fixed-time Stability)、预设时间控制 (Prescribed-time Control) 以及更一般的非线性系统判据进行了详细总结[9]。近年来，有限时间控制理论的研究工作不断向更复杂的非线性系统拓展。在状态受限系统的输出反馈控制方面，文献[10,11]实现了输出信号的有限时间收敛。针对柔性关节机器人的控制难题，文献[12]创新地融合了强化学习技术，提出了一种自适应有限时间神经最优控制策略。而在多机器人协同领域，文献[13]提出了一种基于固定时间分布式自适应神经网络的混合优化编队控制方案。对于存在参数不确定性及状态约束的四旋翼无人机，文献[14]设计了一种自适应有限时间位置跟踪控制算法。此外，为了解决随机非线性系统的跟踪控制难题，文献[15]引入了一种新颖的实际预定时间自适应模糊控制手段，其显著优势在于能根据实际需求灵活调节系统的稳定时间。面向二阶多智能体系统，文献[16]提出了一种具备指定性能的一致性控制方案，有效保障了系统的共识误差在有限时间内收敛至预定范围。针对含时变陀螺漂移的刚体飞行器姿态估计问题，文献[17]提出有限时间互补滤波器，可保证姿态估计值在有限时间内快速收敛至真实姿态，同时在线补偿动态陀螺漂移。而在稳定性证明方面，尽管文献[18]主要沿用了渐近稳定性理论，但其通过构建多个 Lyapunov 函数并在不同状态子空间内建立判据，结合切换逻辑与加权机制的设计思路，为解决有限时间控制中的多约束难题提供了极具价值的参考。

另一方面，实际工程应用中，执行器动力学特效及信号传输滞后等因素不可避免地会导致输入延迟现象。这不仅会削弱系统的整体性能，严重时甚至可能诱发闭环系统失稳[19]。为了攻克这一挑战，学术界已发展出包括预测器法、Lyapunov-Krasovskii 泛函法及辅助变换法在内的多种补偿策略[20-30]。在众多方案中，将自适应技术与反步控制相结合展现出独特的优越性，该方法能够在处理未知非线性的同时应对输入延迟，即便在复杂的不确定性条件下，依然能够确保系统获得良好的稳定性能和跟踪性能[31]。

受近期有限时间控制领域最新研究成果的启发，本文针对一类含输入时滞及未知动态的非线性系统，研究其实用有限时间控制问题。结合有限时间控制理论和神经网络自适应控制技术，设计一类实用有限时间控制器，能够保证闭环系统内所有信号在有限时间内保持有界，并使系统状态最终收敛至原点附近的较小邻域内。

本文的主要工作可总结为以下几点：

(1)提出一类有限时间综合控制方案

提出一类融合径向基函数神经网络、自适应反步法与幂次项的综合设计方案。利用神经网络的万能逼近特性，在线辨识目标系统中含有的未知非线性函数，克服了分数阶滑模控制[32]和无模型控制[33]等方法对精确数学模型的依赖。结合实用有限时间 Lyapunov 判据，克服了传统渐近稳定收敛速度较慢的缺陷，严格证明了系统具有半全局实用有限时间稳定特性(SGPFS, semi-global practical finite-time stability)。

(2)所用系统模型更具一般性，贴合工程实际

不同于现有文献[20-23]中忽略控制增益或仅考虑仿射结构的做法，本文将研究对象扩展至含未知控制增益的纯反馈非线性系统，所建模型降低了对理想参数的依赖。借助引理 5 中神经网络的特性，对含高阶状态变量的系统函数进行处理，使得所提控制策略更适于机电系统、电力励磁等实际工程中的复杂非线性特征，进而拓展了其通用性和工程应用前景。

(3)构造一类辅助系统抵消输入时延动态

针对输入时滞的处理，考虑到 Pade 法有近似误差，积分变换法易引发系统阶数过高，Lyapunov-Krasovskii 泛函法数学推导复杂、参数调节困难，选用了构造辅助系统的方法。该方法可以精确处理时滞，通过内部补偿机制抵消时滞带来的影响，保证闭环系统的稳定性，且不会引入额外的动态误差。相比于其他方法，其瞬态响应通常更平滑，超调和振荡较小。

(4)使用实际工程系统验证理论

在仿真部分，除使用抽象非线性系统验证理论之外，又进一步将所提控制策略应用于三阶同步发电机励磁工程模型，双重验证机制，进一步说明了算法的有效性。

1　问题描述与预备知识

单输入单输出纯反馈非线性系统结构如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i\left(\bar{\boldsymbol{x}}_{i+1}\right) + g_i\left(\bar{\boldsymbol{x}}_i\right) x_{i+1} + d_i(t), 1 \le i \le n-1 \\ \dot{x}_n = f_n\left(\bar{\boldsymbol{x}}_n\right) + u(t-\tau) + d_n(t) \\ y = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

式中，$\bar{\boldsymbol{x}}_i = \left[x_1, x_2, ..., x_i\right]^T \in \Re^i, \left(i = 1, 2, ..., n\right)$，$y \in \Re$，$u(t-\tau) \in \Re$，分别为系统的状态向量，带有输入延时 τ 的控制输入和系统输出。$d_i(t)s$ 表示外部有界扰动，满足 $\left|d_i(t)\right| \le \bar{d}_i$，其中 $\bar{d}_i$ 为常数。$f_i(\cdot)s$ 和 $g_i(\cdot)s$ 是未知的光滑非线性函数，其中 i=1,2,...n，$f_i(\cdot) = 0$。

备注 1：关于外部扰动有界的设定，符合工程实际情况。诸如机械摩擦阻力、电网谐波干扰以及负载动态波动等外部激励，其幅值往往受到物理条件的严格限制，为幅值有限信号，通常通过传感器可测其边界值。此外，在系统动力学特性的刻画上，本文聚焦于非线性光滑函数，暂未将死区、饱和等具有突变特征的硬非线性环节纳入考量范畴。

设计目标是结合自适应反步法和神经网络，构建自适应实用有限时间控制器，以期满足以下控制指标。(1)稳定指标：确保闭环系统的所有信号半全局实用有限时间有界；(2)收敛指标：存在有限时间 T>0，当 $t \ge$T 时，系统状态满足$||x(t)|| \le \delta$，δ 是大于零的任意小常数，可通过设计参数调节；(3)鲁棒指标：在输入时滞和外部扰动共同作用下，系统仍能保持有限时间收敛特性，相较于半全局一致最终有界自适应控制，系统调节时间可显著缩短，缩短幅度可通过仿真验证。

为实现这一设计目标，需要下述假设和引理。

假设 1：未知函数 $g_i\left(\bar{x}_i\right)s$ 的符号已知且不变，即存在一个未知常数 $b_i > 0$，使得 $b_i \le \left|g_i\left(\bar{x}_i\right)\right|$。

假设 1 意味着 $g_i\left(\bar{x}_i\right)$严格为正或为负。为了明确起见且不失一般性，进一步假设 $g_i\left(\bar{x}_i\right)s > 0$，且未知常数 b_i 仅用于完成稳定性分析，不用于控制器设计。

备注 2：本文假定控制增益的符号恒定且已知。在机电与电力励磁等实际工程系统中，执行器及励磁增益的符号通常是由物理结构决定的，不会发生正负跳变。因此该假设符合工程实际。当然，如

果实际系统中增益符号未知，可考虑引入 Nussbaum 函数进行方法拓展，这也是值得进一步探索的研究方向。

引理 1：考虑非线性系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$，其中 $\boldsymbol{x}\in\Re^n$ 是状态向量，$\boldsymbol{u}\in\Re^m$ 是输入向量。$f:\boldsymbol{D}\to\Re^n$ 在包含原点的开邻域 $\boldsymbol{D}\subset\Re^n$ 内连续。若存在 C^1 函数 $V:\boldsymbol{D}\to\Re$ 以及实数 $\lambda>0, 0<\gamma<1$ 和 $0<\eta<\infty$，使得 $V(x)$ 在 D 上正定，且沿系统轨迹有 $\dot{V}(x)\le -\lambda V^{\gamma}(x)+\eta$，则系统状态在 Lyapunov 意义下达到半全局实用有限时间稳定(SGPFS)。

引理 2：当 $r\in(0,1)$，$h\in(0,2)$ 时，对任意实数 $l_i(i=1,2,...,n)$，以下不等式成立：

$$\left(|l_1|+...+|l_n|\right)^r \le |l_1|^r+...+|l_n|^r$$

$$\left(|l_1|^2+...+|l_n|^2\right)^h \le \left(|l_1|^h+...+|l_n|^h\right)^2$$

引理 3：对于任意正实数 m，n，w 以及任意实变量 Φ，Ψ，以下不等式成立：

$$|\phi|^m|\psi|^n \le \frac{m}{m+n}w|\phi|^{m+n}+\frac{n}{m+n}w^{-m/n}|\psi|^{m+n}$$

引理 4：若 $f(\zeta)$ 是定义在集合 Ω 上的未知连续光滑函数。当神经网络节点数 $l(>1)$ 足够大时，可用径向基函数函数神经网络 $\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{S}(\zeta)$ 对其进行估计。即，对于任意精度 $\varepsilon>0$，可得:

$$\sup_{\zeta\in\Omega}\| f(\zeta)-\boldsymbol{W}^T\boldsymbol{S}(\zeta)\| \le \varepsilon,$$

其中 $\zeta\in\Omega$ 是输入向量；$\boldsymbol{S}(\zeta)=[s_1(\zeta),\ldots,s_l(\zeta)]^T$ 是基函数向量；$\boldsymbol{W}=[w_1,\ldots,w_l]^T$ 是理想的等权向量，通常选择 $s_i(\zeta)$ 为高斯函数:

$$s_i(\zeta)=\exp[-\frac{(\zeta-\boldsymbol{\mu}_i)^T(\zeta-\boldsymbol{\mu}_i)}{\varphi^2}]\quad i=1,2,...l,$$

式中 $\boldsymbol{\mu}_i=[\mu_{i1},\mu_{i2},...,\mu_{in}]^T$ 与 φ 分别为高斯函数的中心向量和宽度。

引理 5：令 $\boldsymbol{S}(\bar{\boldsymbol{x}}_m)=\left[s_1(\bar{\boldsymbol{x}}_m),s_2(\bar{\boldsymbol{x}}_m),...,s_l(\bar{\boldsymbol{x}}_m)\right]^T$ 表示神经网络的基函数向量且 $\bar{\boldsymbol{x}}_m=\left[x_1,x_2,...,x_m\right]^T$。那么，对于任意正整数 $k\le m$，下列不等式成立：

$$\left\|\boldsymbol{S}(\bar{\boldsymbol{x}}_m)\right\|^2 \le \left\|\boldsymbol{S}(\bar{\boldsymbol{x}}_k)\right\|^2。$$

2 有限时间自适应控制设计

在本节中，我们将针对系统(1)设计一种自适应实用有限时间控制器。为实现这一目标，需首先引入辅助系统：

$$\begin{cases}\dot{\Lambda}_i = b_i\Lambda_{i+1}-p_i\Lambda_i, 1\le i\le n-1\\ \dot{\Lambda}_n = -p_n\Lambda_n-u(t-\tau)+u(t)\end{cases}\tag{2}$$

这个辅助系统的主要作用是抵消输入时滞的影响。其中 p_i 是设计参数，且 $p_1>1/2$，其它 $p_i>1$。如此要求的目的是为了确保后续稳定分析过程中 $\tilde{p}_i>0$，从而完成信号 Λ_i 的有界性证明。进一步，令 $z_i=x_i-\alpha_{i-1}+\Lambda_i$，其中 $\alpha_0=0$，$\alpha_i\ (1\le i\le n-1)$ 为虚拟控制信号，当 $i=n$ 时，α_n 为实际控制输入信号。控制信号设计如下：

$$\alpha_i=-\frac{1}{2a_i^2}z_i\theta_i\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{X}_i)^T\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{X}_i)-\frac{1}{2}z_i-k_iz_i^{2\gamma-1}$$

其中 $0.5<\gamma<1$，$\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{X}_i)$ 是基函数向量，用于在第 i 个设计步骤中逼近未知的非线性函数。α_i 是变量 $\boldsymbol{X}_i=[x_1,...,x_i,\theta_1,...,\theta_i,\Lambda_1,...,\Lambda_i]$ 的函数，和是正设计参数。θ_i 是未知常数 $\hat{\theta}_i=\|\boldsymbol{W}_i\|^2/b_i$ 的估计值，估计误差定义为 $\tilde{\theta}_i=\hat{\theta}_i-\theta_i$，其自适应律率设计如下：

$$\dot{\theta}_i = \frac{r_i}{2a_i^2} z_i^2 \boldsymbol{S}_i^T(\boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{X}_i) - \sigma_i \theta_i,$$

其中 r_i 和 σ_i 为正的设计参数。

备注 3：该自适应特性为神经网络权自适应。后续设计过程中会出现完全未知的非线性项，需采用径向基函数神经网络在线逼近。而网络理想最优权值未知，因此设计上述权值自适应更新律。仿真运行过程中，控制器实时采集状态误差 z_i，持续在线修正权值估计 θ_i，不断缩小神经网络对未知动态的逼近误差，实现对模型不确定性的在线自适应辨识。

上述主要设计结果是在反步设计过程中实现的。下面给出详细的设计过程。

选取李雅普诺夫函数为 $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$，其中 $V_i = \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{b_i}{2r_i}\tilde{\theta}_i^2$，$b_n = 1$。分别求 V_i 的时间导数。

第 1 步，对 V_1 求导得：

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 - \frac{b_1}{r_1}\tilde{\theta}_1\dot{\theta}_1 = \\ & z_1\left(f_1 + g_1 x_2 + d_1 + b_1\Lambda_2 - p_1\Lambda_1\right) - \frac{b_1}{r_1}\tilde{\theta}_1\dot{\theta}_1 \end{aligned} \tag{3}$$

使用配方方法处理项 $z_1 d_1$：

$$z_1 d_1 \le \frac{1}{2\rho^2} z_1^2 + \frac{\rho^2}{2}\bar{d}_1,$$

其中 ρ 是正设计参数。定义非线性函数：

$$\bar{f}_1(\boldsymbol{Z}_1) = f_1 + \frac{1}{2\rho^2} z_1 + k_1 z_1^{2\gamma-1} - p_1\Lambda_1$$

其中 $\boldsymbol{Z}_1 = [x_1, x_2, \theta_1, \Lambda_1]^T$。注意到 $x_2 = z_2 + \alpha_1 - \Lambda_2$，并将上述两式代入(3)可得：

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \le\ & z_1\left(\bar{f}_1 + g_1 z_2 + g_1\alpha_1 - g_1\Lambda_2 + b_1\Lambda_2\right) - \\ & \frac{b_1}{r_1}\tilde{\theta}_1\dot{\theta}_1 + \frac{\rho^2}{2}\bar{d}_1^2 - k_1 z_1^{2\gamma} \end{aligned}$$

根据假设 1，上式可以进一步写作：

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \le\ & z_1\left(\bar{f}_1 + g_1 z_2 + g_1\alpha_1\right) - \frac{b_1}{r_1}\tilde{\theta}_1\dot{\theta}_1 + \\ & \frac{\rho^2}{2}\bar{d}_1^2 - k_1 z_1^{2\gamma} \end{aligned} \tag{4}$$

根据引理 4，$\boldsymbol{W}_1^T\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{Z}_1)$ 可以用来逼近未知函数 $\bar{f}_1(\boldsymbol{Z}_1)$，即对于任意给定的 $\varepsilon_1 > 0$，可得：

$$\bar{f}_1(\boldsymbol{Z}_1) = \boldsymbol{W}_1^T\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{Z}_1) + \delta_1(\boldsymbol{Z}_1), \left|\delta_1(\boldsymbol{Z}_1)\right| \le \varepsilon_1,$$

其中 $\delta_1(\boldsymbol{Z}_1)$ 为逼近误差。利用引理 5 和杨氏不等式，可得：

$$\begin{aligned} z_1\bar{f}_1(\boldsymbol{Z}_1) &= z_1(\boldsymbol{W}_1^T\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{Z}_1) + \varepsilon_1) \le \\ & |z_1|\|\boldsymbol{W}_1\|\|\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{Z}_1)\| + |z_1|\varepsilon_1 \le \\ & |z_1|\|\boldsymbol{W}_1\|\|\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{X}_1)\| + |z_1|\varepsilon_1 \le \\ & \frac{b_1}{2a_1^2} z_1^2\hat{\theta}_1\boldsymbol{S}_1^T(\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{X}_1) + \frac{1}{2}a_1^2 + \\ & \frac{1}{2}b_1 z_1^2 + \frac{1}{2b_1}\varepsilon_1^2 \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\hat{\theta}_1 = \|\boldsymbol{W}_1\|^2 / b_1$。为方便书写，令 $\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{S}_i$，进一步将上式代入(4)得：

$$\dot{V}_1 \le z_1\left(\frac{b_1}{2a_1^2}z_1\hat{\theta}_1\boldsymbol{S}_1^T\boldsymbol{S}_1+g_1\alpha_1\right)+g_1z_1z_2-\frac{b_1}{r_1}\tilde{\theta}_1\dot{\theta}_1+\frac{\rho^2}{2}\bar{d}_1^2-k_1z_1^{2\gamma}+\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{2}b_1z_1^2+\frac{1}{2b_1}\varepsilon_1^2 \tag{5}$$

设计虚拟控制器：

$$\alpha_1=-\frac{1}{2a_1^2}z_1\theta_1\boldsymbol{S}_1^T\boldsymbol{S}_1-\frac{1}{2}z_1-k_1z_1^{2\gamma-1}$$

根据假设 1，可得：

$$z_1g_1\alpha_1\le-\frac{b_1}{2a_1^2}z_1^2\theta_1\boldsymbol{S}_1^T\boldsymbol{S}_1-k_1b_1z_1^2-\frac{b_1}{2}z_1$$

将上式代入(5)，得：

$$\dot{V}_1\le-k_1(1+b_1)z_1^{2\gamma}+\frac{b_1}{r_1}\tilde{\theta}_1\left(\frac{r_1}{2a_1^2}z_1^2\boldsymbol{S}_1^T\boldsymbol{S}_1-\dot{\theta}_1\right)+\frac{\rho^2}{2}\bar{d}_1^2+\frac{1}{2}\left(a_1^2+\frac{1}{b_1}\varepsilon_1^2\right)+g_1z_1z_2 \tag{6}$$

第 j 步：$(2\le j\le n-1)$：求 V_j 导数得：

$$\dot{V}_j\le z_j(f_j+g_jz_{j+1}+g_j\alpha_j+d_j-\dot{\alpha}_{j-1}-p_j\Lambda_j)-\frac{b_j}{r_1}\tilde{\theta}_j\dot{\theta}_j \tag{7}$$

其中：$z_jd_j\le z_j\bar{d}_j\le\frac{1}{2\rho^2}z_j^2+\frac{\rho^2}{2}\bar{d}_j^2$

$$-z_j\dot{\alpha}_{j-1}=-z_j\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_i}\dot{x}_i-z_j\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i$$

$$-z_j\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_i}d_i\le\frac{1}{2\rho^2}z_j^2\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_i}\right)+\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\rho^2}{2}\bar{d}_i^2$$

将上述三个式子代入(7)可得：

$$\dot{V}_j\le z_j\left(\bar{f}_j+g_jz_{j+1}+g_j\alpha_j-p_j\Lambda_j\right)-\frac{b_j}{r_j}\tilde{\theta}_j\dot{\theta}_j+\sum_{i=1}^{j}\frac{\rho^2}{2}\bar{d}_i^2-k_jz_j^{2\gamma}-g_{j-1}z_{j-1}z_j \tag{8}$$

其中：

$$\bar{f}_j(\boldsymbol{Z}_j)=f_j+g_{j-1}z_{j-1}+\frac{1}{2\rho^2}z_j+k_jz_j^{2\gamma-1}-p_j\Lambda_j-\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_1}\right)(f_i+g_ix_{i+1})+\frac{1}{2\rho^2}z_j\sum_{i=1}^{j-1}\left(\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial x_1}\right)^2-\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\partial\alpha_{j-1}}{\partial\theta_i}\dot{\theta}_i$$

其中 $\boldsymbol{Z}_j=\left[x_1,...,x_{j+1},\theta_1,...,\theta_j,\Lambda_1,...,\Lambda_j\right]^T$。同理，未知函数 $\bar{f}_j(\boldsymbol{Z}_j)$ 可以用神经网络 $\boldsymbol{W}_j^T\boldsymbol{S}_j\left(\boldsymbol{Z}_j\right)$ 来逼近：

$$\bar{f}_j\left(\boldsymbol{Z}_j\right)=\boldsymbol{W}_j^T\boldsymbol{S}_j\left(\boldsymbol{Z}_j\right)+\delta_j\left(\boldsymbol{Z}_j\right),\quad\left|\delta_j\left(\boldsymbol{Z}_j\right)\right|\le\varepsilon_j$$

进一步使用(3)到(6)相同的方法，可得：

$$z_j \bar{f}_j(\mathbf{Z}_j) \le |z_j| \|\mathbf{W}_j\| \|\mathbf{S}_j(\mathbf{Z}_j)\| + |z_j| \varepsilon_j \le |z_j| \|\mathbf{W}_j\| \|\mathbf{S}_j(\mathbf{X}_j)\| + |z_j| \varepsilon_j \le \frac{b_j}{2a_j^2} z_j^2 \hat{\theta}_j \mathbf{S}_j^T(\mathbf{X}_j)\mathbf{S}_j(\mathbf{X}_j) + \frac{1}{2}a_j^2 + \frac{1}{2}b_j z_j^2 + \frac{1}{2b_j}\varepsilon_j^2$$

其中 $\hat{\theta}_j = \|\boldsymbol{W}_j\|^2 / b_j$。将上式与设计的控制器 α_j 代入(8)可得：

$$\dot{V}_j \le -k_j(1+b_j) z_j^{2\gamma} + \frac{b_j}{r_j}\tilde{\theta}_j\left(\frac{r_j}{2a_j^2} z_j^2 \boldsymbol{S}_j^T \boldsymbol{S}_j - \dot{\theta}_j\right) + \sum_{i=1}^{j} \frac{\rho^2}{2}\bar{d}_i^2 + \frac{1}{2}a_j^2 + \frac{1}{2b_j}\varepsilon_j^2 + g_j z_j z_{j+1} - g_{j-1} z_{j-1} z_j \tag{9}$$

第 n 步：求 V_n 导数得：

$$\dot{V}_n \le z_n\left(f_n + u + d_n - \dot{\alpha}_{n-1} - p_n \Lambda_n\right) - \frac{b_n}{r_n}\tilde{\theta}_n \dot{\theta}_n \tag{10}$$

同样的方法处理项 $z_n d_n$，可得

$$z_n d_n \le \frac{1}{2\rho^2} z_n^2 + \frac{\rho^2}{2}\bar{d}_i^2$$

定义:

$$\bar{f}_n(\mathbf{Z}_n) = f_n + (1/2\rho^2) z_n - \dot{\alpha}_{n-1} + g_{n-1} z_{n-1} + k_n z_n^{2r-1} - p_n \Lambda_n$$

其中 $\boldsymbol{Z}_n = [x_1, ..., x_n, \theta_1, ..., \theta_n, \Lambda_1, ..., \Lambda_n]^T$，则 (10)可以进一步表示为：

$$\dot{V}_n \le z_n\left(\bar{f}_n + u\right) - \frac{b_n}{r_n}\tilde{\theta}_n \dot{\theta}_n + \frac{\rho^2}{2}\bar{d}_n^2 - k_n z_n^{2\gamma} - g_{n-1} z_{n-1} z_n \tag{11}$$

对于任意给定正常数 ε_n，非线性函数可以由 $\boldsymbol{W}_n^T \boldsymbol{S}_n(\boldsymbol{Z}_n)$ 逼近。类似的，令 $\hat{\theta}_n = \|\boldsymbol{W}_n\|^2 / b_n$ 得：

$$z_n \bar{f}_n(\boldsymbol{Z}_n) \le \frac{b_n}{2a_n^2} z_n^2 \hat{\theta}_n \boldsymbol{S}_n^T \boldsymbol{S}_n + \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}b_n z_n^2 + \frac{1}{2b_n}\varepsilon_n^2$$

并将上式代入(11)，可得：

$$\dot{V}_n \le z_n\left(\frac{r_n}{2a_n^2} z_n \boldsymbol{S}_n^T \boldsymbol{S}_n + u\right) - \frac{b_n}{r_n}\tilde{\theta}_n \dot{\theta}_n + \frac{\rho^2}{2}\bar{d}_n^2 + \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{b_n}\varepsilon_n^2\right) + \frac{1}{2}b_n z_n^2 \tag{12}$$

设计实际控制信号 $u = \alpha_n$：

$$\alpha_n = -\frac{1}{2a_n^2} z_n \theta_n \boldsymbol{S}_n{}^T \boldsymbol{S}_n - \frac{1}{2} z_n - k_n z_n^{2\gamma-1}$$

且

$$z_n u \le -\frac{1}{2a_n^2} z_n^2 \theta_n \boldsymbol{S}_n^T \boldsymbol{S}_n - k_n z_n^{2\gamma} - \frac{1}{2} z_n^2$$

则(12)可以表示为：

$$\dot{V}_n \le -2k_n z_n^{2\gamma} + \frac{b_n}{r_n}\tilde{\theta}_n\left(\frac{r_n}{2a_n^2}z_n^2 \boldsymbol{S}_n^T \boldsymbol{S}_n - \dot{\theta}_n\right) + \frac{\rho^2}{2}\bar{d}_n^2 + \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2b_n}\varepsilon_n^2 - g_{n-1}z_{n-1}z_n \tag{13}$$

上述有限时间控制设计框架图可参见图 1。

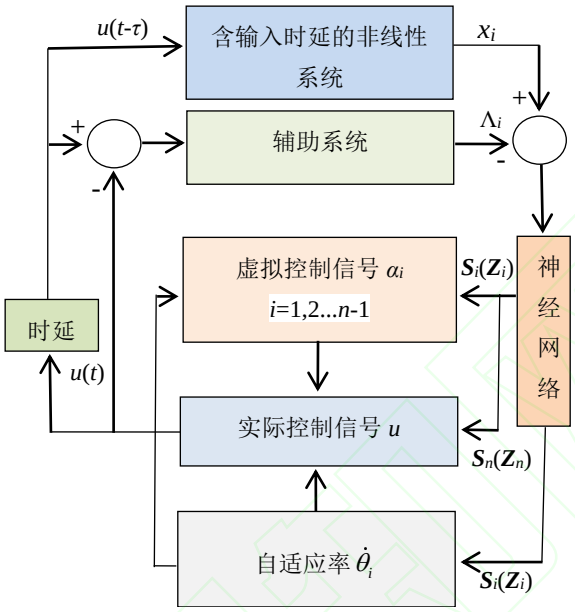

图 1 控制设计框图

Fig.1 Block diagram of control design

用下述定理来总结主要结论，然后进一步完成稳定性分析。

定理 1：考虑带有输入时滞的非线性系统(1)，且满足假设 1，系统中未知非线性函数 $\bar{f}_i$ 可以用神经网络估计。所设计的自适应律 θ_i 以及控制信号 α_i 可以保证闭环系统中所有信号是 SGPFS。同时，通过选择合适的设计参数，系统的轨迹可以在有限时间内跟踪收敛于原点附近的一小邻域内。

证明：合并(6) (9)和(13)，得总的李雅普诺夫函数 $V=\sum_{i=1}^{n}V_i$ 的导数为：

$$\dot{V} \le \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{r_i}\tilde{\theta}_i\left(\frac{r_i}{2a_i^2}z_i^2\boldsymbol{S}_i^T\boldsymbol{S}_i - \dot{\theta}_i\right) - \sum_{i=1}^{n}k_i(1+b_i)z_i^{2\gamma} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho^2}{2}(n-i+1)\bar{d}_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(a_i^2+\frac{1}{b_i}\varepsilon_i^2\right) \tag{14}$$

进一步，带入自适应率可得：

$$\dot{V} \le -\sum_{i=1}^{n}k_i(1+b_i)z_i^{2\gamma} + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{r_i}\tilde{\theta}_i\theta_i + \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho^2}{2}(n-i+1)\bar{d}_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(a_i^2+\frac{1}{b_i}\varepsilon_i^2\right) \tag{15}$$

令 $k_{\min}=\min_{1\le i\le n}\left\{k_i\left(1+b_i\right)\right\}$，根据引理 2，有

$$\sum_{i=1}^{n}k_i(1+b_i)z_i^{2\gamma} \le -k_{\min}\sum_{i=1}^{n}z_i^{2\gamma} \le -\bar{K}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2\right)^{\gamma}$$

式中 $\bar{K}=2^{\gamma}k_{\min}$，令 $\sigma_{\min}=\min_{1\le i\le n}\left\{\sigma_i\right\}$，则(15)可进一步表示为：

$$\begin{aligned}\dot{V}_n \le & -\bar{K}(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2)^{\gamma} - \sigma_{\min}^{\gamma}(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{2r_i}\tilde{\theta}_i^2)^{\gamma} + \\ & (\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{2r_i}\tilde{\theta}_i^2)^{\gamma} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho^2}{2}(n-i+1)\bar{d}_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(a_i^2+\frac{1}{b_i}\varepsilon_i^2) + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{r_i}\tilde{\theta}_i\theta_i \le \\ & -\lambda_1 V^{\gamma} + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{r_i}\tilde{\theta}_i\theta_i + (\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{2r_i}\tilde{\theta}_i^2)^{\gamma} + \\ & \sum_{i=1}^{n}\frac{\rho^2}{2}(n-i+1)\bar{d}_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(a_i^2+\frac{1}{b_i}\varepsilon_i^2)\end{aligned} \tag{16}$$

式中 $\lambda_1 = \min\left\{\bar{K}, \sigma_{\min}^{\gamma}\right\}$。

通过使用 $\tilde{\theta}\theta \le -(1/2)\tilde{\theta}^2 + (1/2)\hat{\theta}^2$，并注意到 $\gamma \in (1/2,1)$，可得：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{r_i}\tilde{\theta}_i\theta_i \le -\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{2r_i}\tilde{\theta}_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{2r_i}\hat{\theta}_i^2 \tag{17}$$

根据引理 3，令 $m = 1-\gamma, n = \gamma, w = e^{(\gamma/(1-\gamma))\ln\gamma}$，　$\phi = 1, \psi = \sum_{i=1}^{n}(b_i\sigma_i/2r_i)\tilde{\theta}_i^2$，可得：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{2r_i}\tilde{\theta}_i^2\right)^{\gamma} \le (1-\gamma)e^{(\gamma/(1-\gamma))\ln\gamma} + \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i\sigma_i}{2r_i}\tilde{\theta}_i^2 \tag{18}$$

令：

$$\begin{aligned}\eta_1 = & (1-\gamma)e^{(\gamma/(1-\gamma))\ln\gamma} + \sum_{i=1}^{n}(b_i\sigma_i/2r_i)\tilde{\theta}_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^{n}(\rho^2/2)(n-i+1)\bar{d}_i^2 + \\ & \sum_{i=1}^{n}(b_i\sigma_i/2r_i)\hat{\theta}_i^2\end{aligned}$$

将(17)和(18)代入(16)，则李雅普诺夫函数的时间导数为

$$\dot{V} \le -\lambda_1 V^{\gamma} + \eta_1 \tag{19}$$

根据引理 1，由(19)可知，V 是有界的，因此 z_i 和 $\tilde{\theta}_i$ 是有界的。下面继续证明 Λ_i 是有界的。进一步定义与之相关的李雅普诺夫函数：

$$V_{\tau 1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_i^2 \ ,$$

$$V_{\tau 2} = \frac{1}{a}\int_{t-\tau}^{t}\int_{w}^{t}\left\|\dot{u}(s)\right\|^2 dsdw \ ,$$

$$V_{\tau 3} = \frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_3}{a}\int_{t-\tau}^{t}\Lambda_n^2(s)ds \ ,$$

$$V_{\tau 4} = \frac{1}{a}\int_{t}^{t-\tau}\int_{w}^{t}\Lambda_n^2(s)dsdw \ ,$$

a 是一个正常数，$\bar{\bar{\sigma}}_3$ 的定义将在下文中给出。下面分别求其时间导数。

$$\dot{V}_{\tau 1} = \sum_{i=1}^{n}\Lambda_i\dot{\Lambda}_i \le -\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i\Lambda_i^2 + \frac{1}{2b}\left\|u(t-\tau)-u(t)\right\|^2 \tag{20}$$

其中，b 是正常数，$\bar{p}_1 = p_1 - 1/2$，$\bar{p}_i = p_i - 1$，$\bar{p}_n = p_n - (1+b)/2$。定义这些设计参数是为了便于后续的稳定性分析的完成。进一步，基于柯西-施瓦茨不等式，可得

$$\frac{1}{2b}\left\|u(t-\tau)-u(t)\right\|^2 \le \frac{\tau}{2b}\int_{t-\tau}^{t}\left\|\dot{u}(s)\right\|^2 ds$$

则(20)可进一步写作：

$$\dot{V}_{\tau 1}=-\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_i\Lambda_i^2+\frac{\tau}{2b}\int_{t-\tau}^{t}\|\dot{u}(s)\|^2 ds \tag{21}$$

利用定积分微分法则和莱布尼茨公式，可得：

$$\dot{V}_{\tau 2}\le\frac{\tau}{a}\|\dot{u}(t)\|^2-\frac{1}{a}\int_{t-\tau}^{t}\|\dot{u}(s)\|^2 ds \tag{22}$$

下面，使用[34]、[35]中所用的方法处理项 $\frac{\tau}{a}\|\dot{u}(t)\|^2$。

$$u(t)=\varsigma_1(z_{n-1},z_n,\theta_n)+\varsigma_4\Lambda_n,$$
$$\dot{u}(t)=\varsigma_2(z_{n-3},z_{n-2},z_{n-1},z_n,\theta_{n-2},\theta_{n-1},\theta_n)+$$
$$\varsigma_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})u(t-\tau)+\sum_{j=1}^{n}\varsigma_{5j}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})\Lambda_j$$

其中，$\boldsymbol{z}=[z_1,...,z_n]^T$，$\boldsymbol{\theta}=[\theta_1,...,\theta_n]^T$。$\varsigma_i,i=1,...4$ 和 $\varsigma_{5j},j=1,...n$ 是 C^1 函数。前面已经证明了 z_i 和 $\tilde{\theta}_i$ 是有界的，令 $\bar{\sigma}_i$ 和 $\bar{\sigma}_{5j}$ 是正常数可得：

$$\|\varsigma_i\|\le\bar{\sigma}_i,i=1,...4\ ,$$
$$\|\varsigma_{5j}\|\le\bar{\sigma}_{5j},j=1,...n$$

可进一步得到：

$$\|u(t)\|^2\le\bar{\bar{\sigma}}_1+\bar{\bar{\sigma}}_4\Lambda_n^2$$
$$\|u(t-\tau)\|^2\le\bar{\bar{\sigma}}_1+\bar{\bar{\sigma}}_4\Lambda_n^2(t-\tau)$$
$$\frac{\tau}{a}\|\dot{u}(t)\|^2\le\frac{\tau}{a}(\bar{\bar{\sigma}}_2+\bar{\bar{\sigma}}_5\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j^2+\bar{\bar{\sigma}}_3\Lambda_n^2(t-\tau)) \tag{23}$$

其中 $\bar{\bar{\sigma}}_1=2\bar{\sigma}_1^2$，$\bar{\bar{\sigma}}_2=3\bar{\sigma}_1^2+3\bar{\sigma}_3^2\bar{\bar{\sigma}}_1$，$\bar{\bar{\sigma}}_3=3\bar{\sigma}_3^2\bar{\bar{\sigma}}_4$，$\bar{\bar{\sigma}}_4=2\bar{\sigma}_4^2$，$\bar{\bar{\sigma}}_5$ 为 $\bar{\sigma}_{5j}$ 为中的最大者。继续求时间导数。

$$\dot{V}_{\tau 3}\le\frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_3}{a}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_n^2(t)-\frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_3}{a}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_n^2(t-\tau) \tag{24}$$

$$\dot{V}_{\tau 4}=-\frac{\tau}{a}\Lambda_n^2(t)-\frac{1}{a}\int_{t-\tau}^{t}\Lambda_n^2(s)ds \tag{25}$$

合并 (21)- (25)可得：

$$\dot{V}_{\tau}=\sum_{i=1}^{4}\dot{V}_{\tau i}\le-(\frac{1}{a}-\frac{\tau}{2b})\int_{t-\tau}^{t}\|\dot{u}(s)\|^2 ds-$$
$$\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\Lambda_i^2-\frac{1}{a}\int_{t-\tau}^{t}\Lambda_n^2(s)ds+\frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_2}{a} \tag{26}$$

其中：

$$\tilde{p}_i=\bar{p}_i-\frac{\tau}{a}\bar{\bar{\sigma}}_5,i=1,...n-1\ ,$$

$$\tilde{p}_n=\bar{p}_n-\frac{\tau}{a}(\bar{\bar{\sigma}}_5+\bar{\bar{\sigma}}_3-1)\ ,$$

选择合适的参数 p_i，a 和 b，可确保 $\tilde{p}_i>0$ 和 $\frac{1}{a}-\frac{\tau}{2b}>0$。

此外，易证下述不等式成立：

$$\int_{t-\tau}^{t}\int_{w}^{t}\|\dot{u}(s)\|^2 dsdw\le\tau\int_{t-\tau}^{t}\|\dot{u}(s)\|^2 ds$$
$$\int_{t-\tau}^{t}\int_{w}^{t}\Lambda_n^2(s)dsdw\le\tau\int_{t-\tau}^{t}\Lambda_n^2(s)ds \tag{27}$$

由 (26)和 (27)，可得：

$$\dot{V}_\tau \le -\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i\Lambda_i^2-(\frac{1}{\tau}-\frac{\tau}{2b})\frac{1}{a}\int_{t-\tau}^{t}\int_{w}^{t}\left\|\dot{u}(s)\right\|^2 dsdw+\frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_2}{a}-(\frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_3}{a}-\frac{1}{\tau})\frac{1}{a}\int_{t}^{t-\tau}\int_{w}^{t}\Lambda_n^2(s)dsdw-\frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_3}{a}\int_{t-\tau}^{t}\Lambda_n^2(s)ds$$

定义：

$$\lambda_2=\min\{2\tilde{p}_i,\frac{1}{\tau}-\frac{\tau}{2b},1,\frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_3}{a}-\frac{1}{\tau}\},$$

$$\eta_2=\frac{\tau\bar{\bar{\sigma}}_2}{a}+4(1-\gamma)e^{(\gamma/(1-\gamma))\ln\gamma},$$

再次应用引理 3，可得：

$$\dot{V}_\tau \le -\lambda_2 V_2^{\gamma}+\eta_2$$

根据引理 1，上式表明 Λ_i 是有界的。所以闭环系统中所有信号都是有界的，证明完成。

3 仿真验证

为了验证所提控制方案的可行性，首先考虑以下纯反馈结构的三阶系统。

$$\begin{cases}\dot{x}_1=0.5x_2^3(1+x_1^2)+\sin^2 x_1 x_2,\\ \dot{x}_2=0.2x_1x_2\sin^2 x_3+\cos^2 x_2 x_3,\\ \dot{x}_3=x_2^2\sin^2 x_1+u(t-\tau),\\ y=x_{1,}\end{cases}\tag{28}$$

系统中 $f_1(\bar{x}_2)=0.5x_2^3(1+x_1^2)$，$f_2(\bar{x}_3)=0.2x_1x_2\sin^2 x_3$ $f_3(\bar{x}_3)=x_2^2\sin^2 x_1$，$g_1(\bar{x}_1)=\sin^2 x_1$，$g_2(\bar{x}_2)=\cos^2 x_2$

系统初始条件选择如下：$x_i(0)=0.1$，$\hat{\theta}_i(0)=0.1$，$\Lambda_i(0)=0.5$。其他主要设计参数选择如下所示：$\gamma=100/101,k_i=1.5,a_i=1,\sigma_i=1,r_i=1,p_{\ i}=1$。输入时滞为 $\tau=0.05$。神经网络用以估计设计过程中的未知非线性项，包含 14 个节点，其中心均匀分布在区间$\{[-1.5,1.5]\times\ldots\times[-1.5,1.5]\}_{\mathrm{m}}$上，m=2,4,8，其高斯函数宽度均选为 1。仿真结果如图 2-6 所示。图 2 是系统状态量的轨迹；图 3 是系统自适应率的轨迹；图 4 是为了消除输入时滞影响而构造的辅助系统状态量的轨迹；图 5 是输入信号的轨迹。由此可见，通过适当选取设计参数，可使闭环系统各状态变量收敛至原点附近的小邻域内。

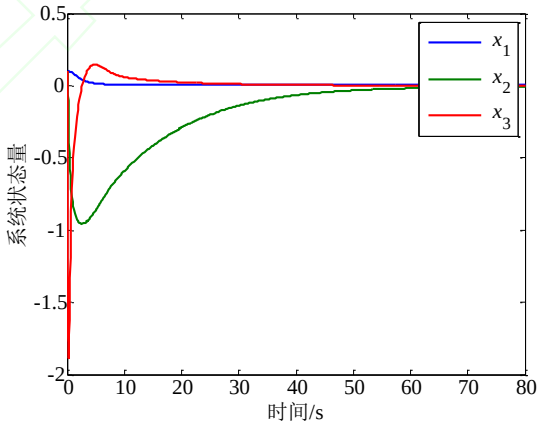

图 2　系统状态量 x_i 的轨迹
Fig.2 Trajectories of system state x_i

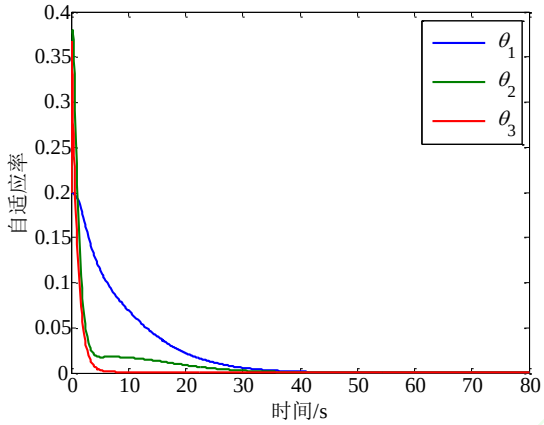

图 3　自适应率的轨迹
Fig.3 Trajectories of adaptive law

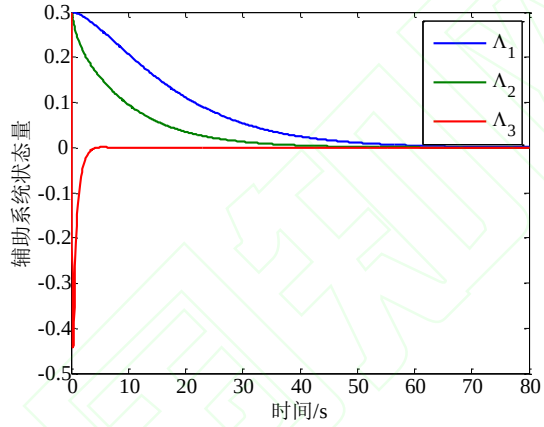

图 4　辅助系统状态量的轨迹
Fig.4 Trajectories of auxiliary system state

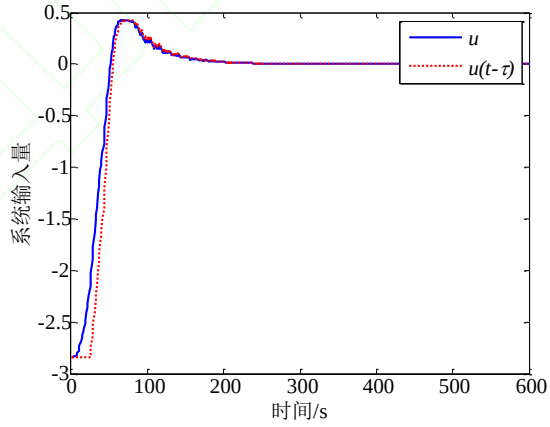

图 5　系统输入量的轨迹($\tau = 0.05$)
Fig.5 Trajectories of system input($\tau = 0.05$)

上述参数的选取综合了理论约束、工程实际与仿真性能三方面因素，下面具体说明其依据。

控制器参数 k_i、p_i 的取值需要折中考虑，过大易引发控制输入剧烈震荡，过小则可能会降低系统收敛速度。本文经过多组试算，在瞬态响应速度与执行器幅值约束之间取得平衡，最终确定当前取

值。自适应参数的整定则兼顾权值更新速度与数值稳定性；γ的选取遵循有限时间收敛判据，以保证系统的有限时间收敛特效。神经网络参数依据系统状态波动范围确定，其中隐层节点数取 14，在逼近精度与计算开销间取得平衡；基函数中心均匀覆盖系统全动态区间[−1.5,1.5]，基宽 η=1，可使相邻高斯基函数保持适度重叠程度，从而有效拟合系统未知非线性项。

输入时滞设为 0.05 s，该值应对于机电伺服、传动系统中典型的中等时滞情况。这一时滞尺度既能体现本文时滞补偿结构的作用，又不至于因时滞过大而导致固定参数仿真出现发散。需要注意的是，系统可容许的输入延迟受到有限时间收敛增益、神经网络近似精度以及自适应更新律等因素的共同影响。总体而言，时滞越小，辅助系统响应快，系统收敛速度也越快；而时滞增大则会延长调节时间，同时使控制信号幅度相应增加。

例如，图 5 和图 6 分别给出 τ=0.05 s 与 τ=0.1 s 两种输入时滞下的控制输入 u 及其延迟信号 $u(t-\tau)$轨迹。对比两组曲线可知，输入时滞增大后，系统瞬态调节时间明显延长，控制输入震荡加剧，峰值幅值显著抬升，当前时刻控制量 u 与延迟输入 $u(t-\tau)$之间的动态偏差随之扩大。尽管如此，在两种时滞工况下，控制输入最终均可平稳收敛至原点，这表明本文所设计的时滞补偿结构对不同量级的有界输入时延均具有较好的适应性，仅瞬态相应性能随时滞增大略有下降。

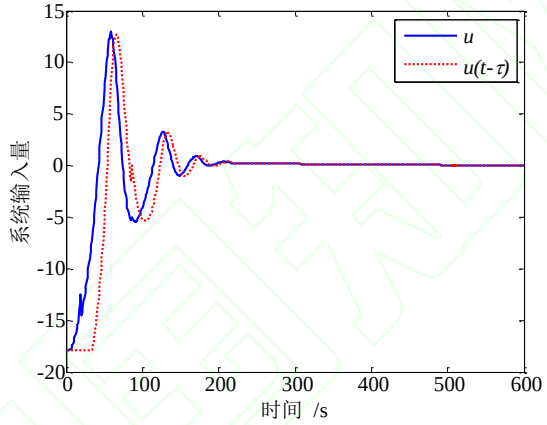

图 6　系统输入量的轨迹($\tau=0.1$)

Fig.6　Trajectories of system input($\tau=0.1$)

与之对比，Pade 近似法将时滞环节用一个有理传递函数来近似，从而将原时滞系统转化为高阶无时滞模型以开展控制设计研究。但这种数学处理方式不可避免地引入了非物理的动态误差。特别是在系统呈现强非线性、动态响应较快或误差累积显著的情况下，该近似可能会破坏闭环系统的稳定性。图 7 给出了同等参数配置下 Pade 法的仿真结果，可以看出，系统各信号在短时间内出现单调发散或非正常振荡，未能实现预期收敛。这表明，尽管 Pade 近似法在计算上实现了从时滞微分方程到常微分方程的降维简化，但在本算例的当前参数下，模型失真已超出控制器的鲁棒裕度，最终导致失稳。若要采用该方法，必须对设计参数进行重新整定。

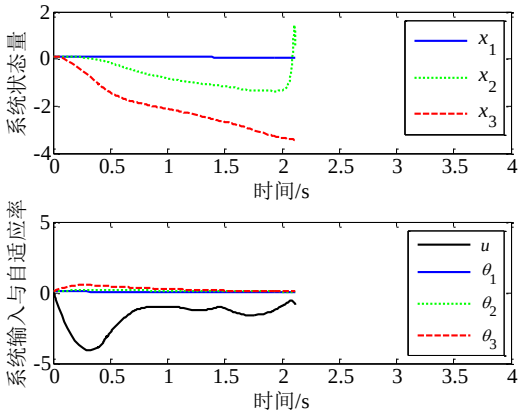

图 7 Apde 近似法的各信号轨迹
Fig.7 Signal trajectories of Apde method

针对相同系统和参数配置，本文进一步采用文献[36]中基于渐进稳定控制理论的方法进行仿真，结果如图 8 所示，该方法可确保闭环系统中所有信号满足半全局一致最终有界性(SGUUB,semi-globally uniformly ultimate boundedness)。通过对比图 2 与图 8 的信号轨迹，可评估两种控制策略的动态性能。由图 2 可见，系统状态变量呈单调变化趋势，约在 50s 左右平滑收敛至平衡点。而图 8 中系统的动态性能明显较差，状态变量的过渡阶段出现周期性振荡，振幅较大，调节时间超过 70 秒且仍有波动。相比之下，图 2 所对应的本文算法在收敛速度上较图 8 提升近 30%，同时在振荡抑制和超调控制方面均表现出显著优势，充分验证了本文控制策略应对系统动态变化时的有效性。

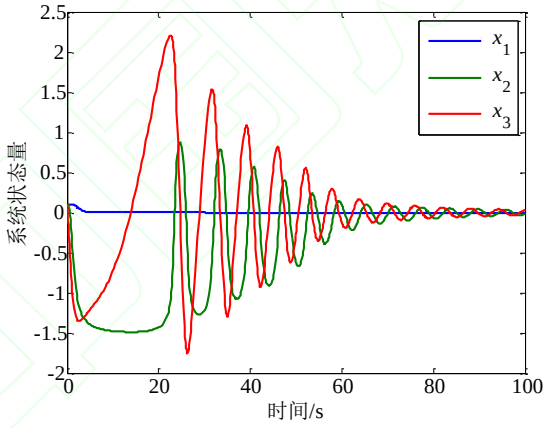

图 8 系统状态 x_i 的轨迹(SGUUB)
Fig.8 Trajectories of system state(SGUUB)

备注 4：图 2-图 8 仿真算例属于抽象数值验证，并未对应具体实际物理对象，因此纵坐标未标注物理单位。

为了进一步验证文中所提控制方案的有效性，将所得主要结论用于同步发电机励磁控制设计。考虑如下单机系统中发电机的三阶动态模型：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = c_0 x_2 + c_1 P_m + c_2 (x_3 + E'_{q0}) \sin(x_1 + \delta_0) + \\ \quad c_3 \sin 2(x_1 + \delta_0) + d_1 \\ \dot{x}_3 = c_4 (x_3 + E'_{q0}) + c_5 \cos(x_1 + \delta_0) + u + d_2 \end{cases}$$

系统状态量 $x_1 = \delta - \delta_0$， $x_2 = \omega - \omega_0$， $x_3 = E'_q - E'_{q0}$，其中 δ_0、ω_0 和 E'_{q0} 是系统稳态运行点的基准

值。控制信号 $u=E_f/T'_{d0}$。$c_0\sim c_5$ 是与系统运行状态有关的已知参量，分别定义如下：

$$c_0=-\frac{D}{H},c_1=\frac{\omega_0}{H},c_2=\frac{\omega_0 V_s}{HX'_{d\Sigma}},c_3=\frac{\omega_0 V_s^2(X'_{d\Sigma}-X_{d\Sigma})}{2HX'_{d\Sigma}X_{q\Sigma}},$$

$$c_4=\frac{X_{d\Sigma}}{T'_{d0}X'_{d\Sigma}},c_5=\frac{(X'_{d\Sigma}-X_{d\Sigma})V_s}{T'_{d0}X'_{d\Sigma}},$$

上述表达式中与电力系统相关的各个符号有其通用意义，不再赘述[36]。系统初始条件都选为0.1。系统的运行参数分别选择为 ω_0=314.19 rad/s，H=3.5 s，T_{d0}'=11 s，V_s=1 pu，D=5 pu，$X_{d\Sigma}$=3.36 pu，$X_{q\Sigma}$=3.32 pu，$X_{d\Sigma}'$=0.35 pu。d_1=0.05cos$t$，d_2=-0.05sin$t$ 代表外部未知有界干扰。发电机模型参数取自电力系统标准三阶励磁模型通用基准参数，符合实际电力系统运行工况。输入时滞为 0.05，其他设计参数为 $\gamma=100/101$，$k_1=k_2=0.15$，$k_3=0.45$，$a_i=2,\sigma_i=1,r_i=1,p_i=1$。仿真结果如图 9-12 所示。由此可见，系统内所有信号均未出现发散，从而有力地证明了控制方法的有效性。

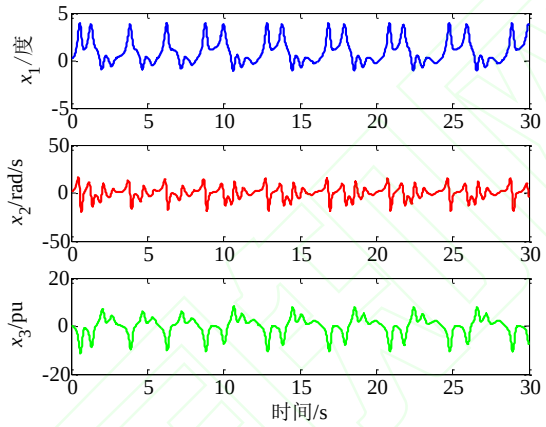

图 9　x_i 的轨迹

Fig.9 Trajectories of x_i

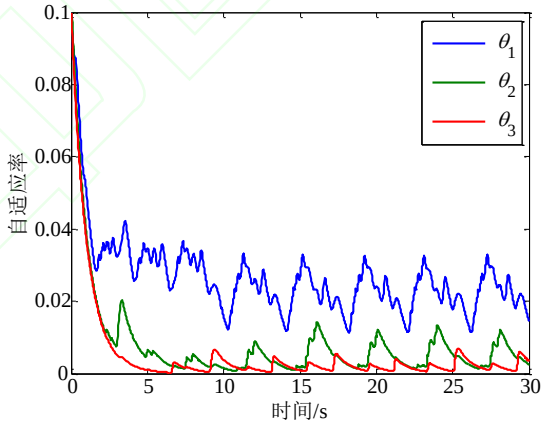

图 10　θ_i 的轨迹

Fig.10 Trajectories of θ_i

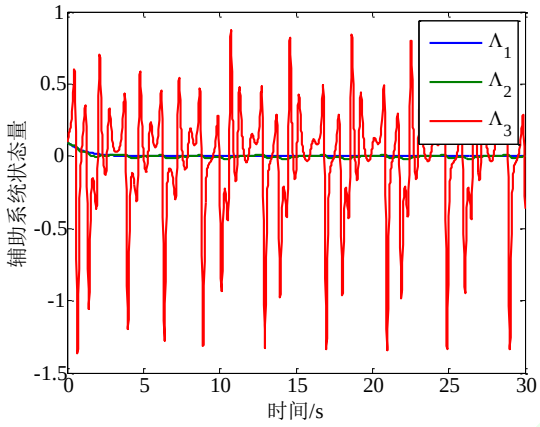

图 11 Λ_i 的轨迹

Fig.11 Trajectories of Λ_i

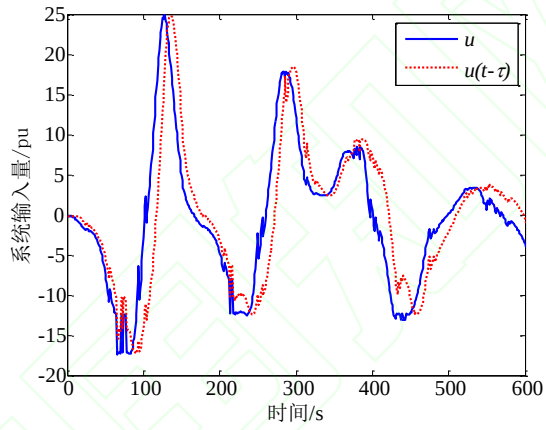

图 12 u 和 $u(t-\tau)$的轨迹

Fig.12 Trajectories of u and $u(t-\tau)$

4 结论

本文针对同时存在未知非线性与输入时滞时非线性系统，研究了其实用有限时间控制问题。通过构造辅助系统，在不依赖 Pade 近似或积分变换的情况下实现对输入时滞的补偿，从根本上消除了近似误差。融合神经网络的万能逼近能力、自适应反步法以及实用有限时间 Lyapunov 稳定判据，实现了对复杂未知非线性的在线辨识与控制器设计。理论分析表明，该方案可保证闭环系统所有信号满足半全局实用有限时间稳定性，可实现状态轨迹向原点小邻域的有限时间收敛。

为验证理论结果，分别以数值算例与同步发电机励磁系统模型为对象开展仿真实验。仿真结果显示，相较于传统半全局一致最终有界自适应控制，所提方法的系统状态收敛时间缩短近 30%；在输入时滞不超过 0.1s 的区间内，系统始终保持有限时间稳定，仅调节时间略有延长，未出现失稳现象，表现出良好的鲁棒性。结合多控制算法的对比分析及参数敏感度讨论，全面验证了所提方法的有效性与工程可用性。

后续研究工作可以从以下方面开展：引入 Nussbaum 函数以应对增益符号未知的系统；在控制器设计中考虑饱和死区等非光滑特性的补偿；将现有控制方案推广至多输入多输出系统或存在状态受限的复杂非线性系统。

参考文献（References）

[1] WEISS L,INFANTE E F.Finite-time stability under perturbing forces and on product spaces[J],IRE Transactions on Automatic

Control,1961,6(1): 54–59.
[2] WEISS L,INFANTE E F.On the stability of systems defined over a finite time interval[J],Proceedings of the National Academy of Sciences,1965,54(1):44–48.
[3] WEISS L,INFANTE E F.Finite time stability in linear time-invariant systems[J],IEEE Transactions on Automatic Control,1967,12(1):54–59.
[4] BHAT S P,BERNSTEIN D S.Finite-time stability of continuous autonomous systems[J],SIAM Journal on Control and Optimization,2000,38(3):751–766.
[5] HONG Y,WANG J,XI Z, Stabilization of uncertain chaotic systems using non-smooth feedback[C], Proceedings of the American Control Conference, 2002,4:2769–2774.
[6] HONG Y,WANG J.Non-smooth finite-time stabilization for a class of nonlinear systems[J],Science in China Series F: Information Sciences,2006,49(1):80–89.
[7] HONGY,JIANG Z P,FENG G.Finite-time input-to-state stability and applications to finite-time control design[J],SIAM Journal on Control and Optimization,2010,48(7):4395–4418.
[8] 丁世宏，李世华．有限时间控制问题综述[J]．控制与决策，2011，26（2）： 161-169．
DING S,LI S.A survey on finite-time control problems[J].Control and Decision,2011,26(2):161-169(in Chinese).
[9] 刘洋，井元伟，刘晓平，等．非线性系统有限时间控制研究综述[J]．控制理论与应用，2020，37（1）：1-12 ．
LIY Y, JING Y, LIU X, et al. A survey on finite-time control for nonlinear systems[J].Control Theory and Applications, 2020, 37(1):1-12(in Chinese).
[10] LI Y,LIU Z,CHEN C,et al.Adaptive finite-time output feedback control for nonlinear systems with full state constraints[J].Journal of the Franklin Institute,2023,360(18):14190-14207.
[11] 张天平，李晓霞．状态受限不确定非线性系统的有限时间自适应输出反馈控制[J]．控制与决策， 2023，38（5）：1205-1214．
ZHANG T,LI X.Finite-time adaptive output feedback control for state-constrained uncertain nonlinear systems[J].Control and Decision,2023,38(5):1205-1214(in Chinese).
[12] WANG H,JIA S J,LIU S W, LIU X P, Adaptive finite-time optimal control for flexible-joint robots via an identifier-criticactor reinforcement learning algorithm[J].Nonlinear Dynamics,2025,113:32405–32426.
[13] ZHANG J M,ZHANG W J,TONG S C.Fixed-time distributed adaptive neural network hybrid optimal output-feedback formation control for multi-USV systems[J].Ocean Engineer, 2025,343:123421.
[14] MA C,HUO J,DONG D.Adaptive Neural Network Finite-Time Prescribed Performance Consensus Control for a Class of Second-Order Multi-Agent Systems[J].Guidance, Navigation and Control,2024,4(2):2450008.
[15] WANG L, XIN M,NIU J. Adaptive fuzzy predefined-time control for stochastic nonlinear systems against actuator and sensor faults[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. Meas,2025,74(2):9520308.1-9520308.8.
[16] ZHU C, JI Q. LEI X.Finite-Time Adaptive Tracking Control for Quad-Rotor Systems with Safety Constraints[J].Guidance, Navigation and Control,(2026-06-19)[2026-07-01].https://doi.org/doi.org/ 10.1142/S2737480726400066.
[17] WEN G,WANG L,ZHAO D, et al. Attitude Estimation for Rigid Aircraft with Time-Varying Gyro Bias: A Finite-Time Complementary Filtering Approach[J]. Guidance, Navigation and Control, 2025, 5(4): 445-458.
[18] 杨可馨，李永强，侯忠生，等．基于多李雅普诺夫函数的一般非线性系统渐近镇定[J]．自动化学报，2025，51（1）：197-209．
YANG K,LI Y, HOU Z,et al.Asymptotic stabilization of general nonlinear systems based on multiple Lyapunov functions. Acta Automatica Sinica[J].2025, 51(1):197-209(in Chinese)
[19] YAO L,CUI M,WU Z,FENG L.Adaptive tracking control for a class of random nonlinear systems with input delay and saturation[J].Nonlinear Dynamics,2025,113:23167-23187.
[20] LIU Y J,et al.Adaptive neural control for strict-feedback systems with input delay[J].IEEE Transactions on Cybernetics,2019,49(3):1066-1075.
[21] XIAO X,PAN J,ZHANG T,FANG Y.Command filter based adaptive finite-time dynamic surface control for nonlinear systems with unknown input delay under discontinuous input[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control,2023, 33(6):3889-3907.
[22] LI M, WU L.Fuzzy Adaptive control for strict-Feedback uncertain nonlinear systems with input delays and saturations[J].Engineering Letters, 2025, 33(5):1259-1266.
[23] ZHU B,KARIMI H,ZHANG L,ZHAO X. Neural network-based adaptive reinforcement learning for optimized backstepping tracking control of nonlinear systems with input delay[J].Applied Intelligence,2025,55(2):1-16.
[24] KHARRAT M, MERCORELLI P.Adaptive fuzzy control with predefined-time convergence for high-order nonlinear systems facing input delay and unmodeled dynamics[J].Mathematics, 2026,14(5):765.
[25] ZHAI J,WANG H,TAO J,HE Z.Observer-based adaptive fuzzy finite-time control for non-strict feedback nonlinear systems with unmodeled dynamics and input delay[J]. Nonlinear Dynamics. 2023, 111(2): 1417–1440.
[26] JIANG Y,SU Y.Predefined-time command-filtered adaptive fuzzy tracking control for nonlinear systems with delayed input[J].International Journal of Adaptive Control & Signal Processing, 2025, 39(6):1221-1234.
[27] ZHOU Y, ZHAO W,ZHOU Q.Multi-dimensional Taylor network-based adaptive fixed_time tracking control for a class of nonlinear systems with input delay [J].International Journal of Contro,2025,98(1):56-67.
[28] XU Y,CHEN B,LIN C.Adaptive neural network control for nonlinear non-strict feedback time-delay systems[J].Systems Science & Control Engineering,2021,9(2):81-92.
[29] WANG Y,ZHANG J,ZHANG H,XIE X, Finite-time adaptive neural control for nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with input delay and output constraints[J].Applied Mathematics and Computation,2021,393:125756.
[30] WANG H Q,LIU S W,YANG X.Adaptive neural control for non-strict-feedback nonlinear systems with input delay[J].Information Sciences,2020,514(20):605-616.
[31] LIU D,YANG X,WANG D,WEI Q.Finite-horizon nearoptimal control for nonlinear systems via adaptive dynamic programming[J].Automatica,2022, 135: 109989.
[32] 张猛，王利楠，郑德智，伊枭剑．航天器姿态系统的分数阶滑模容错控制器设计[J]．电子与信息学报，2025，47（6）：1712-1722．
ZHANG M,WANG L,ZHENG D,YI X.Design of fractional-order sliding mode fault-tolerant controller for spacecraft attitude system[J].Journal of Electronics and Information Technology, 2025, 47(6):1712-1722(in Chinese).
[33] LIN Y,WAN H,HE P, et al. Model-free finite-time H_2/H_∞ predictive control for discrete-time systems via Q-learning[J].International Journal of Systmes Scienc,2025,56(15):3718-3729.

[34] JIA X,XU S,MA Q,LI Y,Chu Y,Universal adaptive control of feedforward nonlinear systems with unknown input and state delays[J].International Journal of Control,2016:89:2311-2321.
[35] DINH H. T,FISCHER N,KAMALAPURKAR R,DIXON W,Output feedback control for uncertain nonlinear systems with slowly varying input delay[C].American Control Conference, Washington,USA,2013:1745-1750.
[36] WANG H,CHEN B,LIN C,SUN Y.Observer-based adaptive neural control for a class of nonlinear pure-feedback systems[J]. Neurocomputing,2016,171: 1517–1523.
[37] LEON A,SOLSONA J,VALLA M.Comparison among nonlinear excitation control strategies used for damping a power system oscillations[J].Energy conversion and management,2012,53:55-67.