

北京航空航天大学学报
Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics
ISSN 1001-5965,CN 11-2625/V

《北京航空航天大学学报》网络首发论文

题目：带激活时延的 K-混合冗余可修系统可靠性评估
作者：高延富，刘宝亮，温艳清，邱青安，张磊
DOI：10.13700/j.bh.1001-5965.2026.0574
收稿日期：2026-08-16
网络首发日期：2026-11-13
引用格式：高延富，刘宝亮，温艳清，邱青安，张磊．带激活时延的 K-混合冗余可修系统可靠性评估[J/OL]．北京航空航天大学学报．https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2026.0574



网络首发：在编辑部工作流程中，稿件从录用到出版要经历录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿等阶段。录用定稿指内容已经确定，且通过同行评议、主编终审同意刊用的稿件。排版定稿指录用定稿按照期刊特定版式（包括网络呈现版式）排版后的稿件，可暂不确定出版年、卷、期和页码。整期汇编定稿指出版年、卷、期、页码均已确定的印刷或数字出版的整期汇编稿件。录用定稿网络首发稿件内容必须符合《出版管理条例》和《期刊出版管理规定》的有关规定；学术研究成果具有创新性、科学性和先进性，符合编辑部对刊文的录用要求，不存在学术不端行为及其他侵权行为；稿件内容应基本符合国家有关书刊编辑、出版的技术标准，正确使用和统一规范语言文字、符号、数字、外文字母、法定计量单位及地图标注等。为确保录用定稿网络首发的严肃性，录用定稿一经发布，不得修改论文题目、作者、机构名称和学术内容，只可基于编辑规范进行少量文字的修改。

出版确认：纸质期刊编辑部通过与《中国学术期刊（光盘版）》电子杂志社有限公司签约，在《中国学术期刊（网络版）》出版传播平台上创办与纸质期刊内容一致的网络版，以单篇或整期出版形式，在印刷出版之前刊发论文的录用定稿、排版定稿、整期汇编定稿。因为《中国学术期刊（网络版）》是国家新闻出版广电总局批准的网络连续型出版物（ISSN 2096-4188，CN 11-6037/Z），所以签约期刊的网络版上网络首发论文视为正式出版。

带激活时延的 K-混合冗余可修系统可靠性评估

高延富[1]，刘宝亮[1]✉，温艳清[1]，邱青安[2]，张磊[1]

(1. 山西大同大学数学与统计学院，山西 大同 037009; 2. 北京理工大学管理学院，北京 100081)
*通信作者 Email: baoliang521@163.com

摘要 针对传统指数分布模型难以刻画高端设备 K-混合冗余系统寿命、激活时延与维修时间的非指数分布特征这一工程问题，构建了考虑 K-混合冗余策略的可修系统模型。本文采用相位型分布(phase-type distribution，PH)分布统一描述组件工作寿命、冷贮备激活时间与维修时间，基于连续时间马尔可夫链(continuous time Markov chain，CTMC)定义系统状态空间与转移规则，推导无穷小生成元矩阵并开展可靠性分析。以矿用高压二组合变频器为工程实例，对比分析不同在线-冷贮备配比方案的可靠性差异，并对最优配置开展参数敏感性分析。研究表明：系统可靠性由在线与冷贮备配比的均衡性决定，均衡配置可实现性能最优；组件寿命和冷贮备激活时间对系统可靠性影响显著，延长组件寿命、缩短冷贮备激活时间可有效提升系统稳态性能与无故障运行能力。

关键词 K-混合冗余；激活时延；相位型分布；连续时间马尔可夫链；可靠性评估
中图分类号 O213；O211.62 文献标志码 A DOI: 10.13700/j.bh.1001-5965.2026.0574

Reliability evaluation of K-mixed redundant repairable systems with activation delay

Gao Yanfu[1] , Liu Baoliang[1] ✉, Wen Yanqing[1], Qiu Qing’ an[2] , Zhang Lei[1]

(1.College of Mathematics and Statistics, Shanxi Datong University, Datong 037009, China;

2.School of Management, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)
*E-mail: baoliang521@163.com

Abstract To address the engineering challenge that traditional exponential distribution models struggle to capture the non-exponential distribution characteristics of component lifetime, activation delay, and maintenance time in K-mixed redundancy systems for high-end equipment, this study constructs a repairable system model incorporating the K-mixed redundancy strategy. In this work, the Phase-type (PH) distribution is employed to uniformly describe the operational lifetime of components, the activation time of cold standby units, and their maintenance durations. Based on a continuous-time Markov chain (CTMC), the system's state space and transition rules are defined, the infinitesimal generator matrix is derived, and reliability analyses are conducted. Using a mining-grade high-voltage dual-inverter system as an engineering case study, this paper comparatively analyzes the reliability differences across various online-to-cold-standby configuration schemes, and performs parameter sensitivity analysis on the optimal configuration. The results demonstrate that system reliability is determined by the balance of the online and cold-standby configurations, and that a balanced configuration can achieve optimal performance; furthermore, component lifetime and cold-standby activation time exert significant influence on system reliability, and extending component lifetime while shortening cold-standby activation time can effectively enhance both steady-state performance and fault-free operation capability of the system.

Key words K-mixed redundancy; activation delay; phase-type distribution; continuous-time Markov chain; reliability assessment

随着高端设备向高可靠、长寿命、强冗余方向迭代，冷热协同 K-混合冗余可修系统已成为船舶

收稿日期：2026-08-16
基金项目：国家自然科学基金(72371030, 71601101)；山西省基础研究计划资助项目(20210302124310)；全国统计科学研究资助项目(2025LY049)
Fund： National Natural Science Foundation of China (72371030, 71601101); Fund Project of Basic Research Plan of Shanxi Province (20210302124310); National Statistical Science Research Funding Project ((2025LY049)
网络首发时间： 2026-11-13 16:41:36 网络首发地址： https://link.cnki.net/urlid/11.2625.v.20261113.1434.004

动力、轨道交通、风电、核电等关键设备保障连续运行的核心架构。纯热备用组件可瞬时切换但长期带电运行产生老化与额外能耗；纯冷备用组件无通电损耗但切换时存在不可忽略的激活时延。为兼顾响应速度、可靠性与经济性，工程中大量采用热冷备用协同配置，其状态转移机制复杂，对精准可靠性建模与参数优化提出了更高要求。

传统可修系统研究多基于指数分布假设，难以刻画高端设备寿命、激活及维修时间的非指数、多阶段随机特征。PH 分布能以任意精度逼近所有非负连续型随机分布，且在卷积、混合、更新运算下保持闭包，是复杂可修系统建模的理想工具。Liu 等[1]将 PH 分布与矩阵解析法引入含切换失效的多状态 K-混合冗余系统；Dao Thi 等[2]提出基于张量运算的乘积形式分解方法，为大规模状态空间降维提供了理论框架，二者为 PH 分布与连续时间马尔可夫链(CTMC)结合分析混合冗余系统奠定了基础。

针对冷贮备系统，Wu 等[3]与 Ma 等[4]分别推导了多失效模式冷贮备系统的马尔可夫更新解析指标、建立了带维修重试的离散时间冷贮备模型；Liu 等[5]构建冷贮备系统等价模型，给出了串联、并联及 k/n 表决等典型构型的可靠度与剩余寿命函数；Wang 等[6]提出了考虑切换非完美的大规模 n 中取 k 冷贮备系统可靠度高效近似方法；Eryilmaz[7]与 Dembińska 等[8]刻画了含冷贮备单元的 n 中取 k 表决系统的可靠性及备件配置优化。然而，冷贮备切换投运并非瞬时完成：Finkelstein 等[9]在退化冷贮备系统中给出考虑非瞬时切换的最优预防切换策略；Yang 等[10]表明备件激活时机与时延显著影响系统可靠性。冷贮备激活涉及启动检测、参数初始化、负载接管等多阶段，持续时间呈非指数特征，忽略激活时延或以指数分布近似将导致可靠性评估偏差，且冷贮备比例越高偏差越显著。

针对混合冗余系统，Ardakan 和 Hamadani[11]将冷贮备策略引入可靠性-冗余分配问题；Kim[12]基于马尔可夫过程求解了混合冗余系统的冗余分配；Wen 等[13]采用矩阵解析法对带维修工多重休假的 K-混合冗余 $k/n:G$ 可修系统进行了可靠性建模。此外，Liu 等[14]、Jiang 和 Jia[15]、Liang 等[16]、Gan 与 Tang[17]分别围绕冲击-退化耦合、疲劳退化、动态环境多状态系统及变失效阈值退化开展了可靠性分析；Colquhoun 与 Hawkes[18]奠定了马尔可夫过程随机特性分析基础；Wu 等[19]、Yuan[20]、Zhang 等[21]分别研究了维修工单重休假、多重休假及关停规则下的可修系统可靠性。

然而，上述研究尚未在 K-混合冗余框架下将激活时延与非指数寿命、单维修工约束统一耦合建模。为此，本文以 Wen 等[22,23]的研究为基础，将激活时延、单维修工约束、PH 分布与 K-混合冗余策略统一纳入 $k/n:G$ 可修系统建模框架，克服瞬时切换与指数分布假设局限[24]，以 PH 分布统一描述工作寿命、激活时间与维修时间，基于 CTMC 推导无穷小生成元矩阵并建立可靠性指标体系，通过数值算例揭示在线-冷贮备配比与组件寿命对可靠性的影响，为冗余配置优化提供依据。

1 系统描述与模型假设

为了对组件寿命、冷贮备激活延迟及维修时间等非指数型随机变量进行刻画，本研究引入相位型(PH)分布刻画随机时间的分布。PH 分布的定义如下[22]：令 $H(\cdot)$ 是一个非负连续随机变量的分布函数，若该分布对应于一个有限状态马尔可夫过程在进入吸收态前时间的分布，则称之为连续相位型(PH)分布。马尔可夫过程状态空间为 $\{1,2,\ldots,m,m+1\}$，其中 $\{1,2,\ldots,m\}$ 为瞬过状态，状态 $m+1$ 是吸收态，转移率矩阵为：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{S}^0\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

其中，初始概率向量为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_{m+1})$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 m 阶的行向量。矩阵 $\boldsymbol{S}$ 是一个阶数为 m 的非奇异矩阵，它的对角线都为负，非对角线元素都是非负的，表示这 m 个瞬过状态之间的转移率；列向量 $\boldsymbol{S}^0$ 的阶数为 m，它的元素表示瞬过状态到吸收状态的吸收率。容易得到，$-\boldsymbol{eS}=\boldsymbol{S}^0\geq 0$，$\boldsymbol{e}$ 代表元素全为

1 的列向量，这个相位型分布记为 $PH(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{S})$，分布函数为 $H(x)=1-\boldsymbol{\alpha}\exp(\boldsymbol{S}x)\boldsymbol{e}$。

1.1 系统基本假设

本文研究了配有一个维修工的 $k/n:G$ 冗余可修系统，该系统由 n 个同型组件组成，其中至少有 k 个($k\geq 1$)组件运行才能保证系统正常工作，在所提系统中，采用了 K-混合冗余策略，其中 n_0、n_r $(n_0+n_r=n)$ 分别表示处于在线运行组件和备用组件的数量，系统模型基于以下假设条件建立。

在 $t=0$ 时刻，系统中 $n_0(n_0>k)$ 个组件同时启动运行，而剩余的 n_r 个组件则暂时处于冷贮备待机状态。一旦运行中的组件发生故障，备用组件启动激活程序，待激活完成后切换至正常运行状态，从而保证系统中有 n_0 个组件处于运行状态，在此刻之后，系统变为 $k/n:G$ 系统，随着组件持续失效，当运行组件数少于 k 时，系统失效。

1)组件故障仅由于自身的退化引起，各在线组件的退化失效过程相互独立，在线组件的寿命服从阶数为 ω 的 PH 分布；

2)系统配置 1 名修理工，修理工有空闲和维修两种状态，对故障组件的维修遵循“先到先服务”的规则，维修完成后将组件功能恢复至初始状态；激活程序和维修过程可同时进行，故障组件维修时间服从阶数为 m 的 PH 分布；

3)当在线组件失效时，冷贮备组件立即启动激活程序，冷贮备激活过程存在固有时延，该激活时延是系统的内在演化要素，并非理想瞬时切换；冷贮备激活时间服从阶数为 s 的 PH 分布，激活的完整相位演化过程嵌入马尔可夫状态转移，直接参与系统状态演化计算。只有激活相位全部完成后，冷贮备组件才能够切换为在线工作组件。

4)维修完成后组件直接进入冷贮备池，排队等待下一次在线组件失效后激活；

5)在线组件寿命服从阶数为 ω 的 PH 分布，$y(t)$ 表示 t 时刻组件运行相位，其中 $1\leq y(t)\leq \omega$；冷贮备激活时间服从阶数为 s 的 PH 分布，$z(t)$ 表示 t 时刻激活时间的相位，其中 $1\leq z(t)\leq s$；组件维修时间服从阶数为 v 的 PH 分布，$m(t)$ 表示 t 时刻维修时间的相位，其中 $1\leq m(t)\leq v$；所有随机变量相互独立。

1.2 模型分析

设 $n_0'(t)$, $n_s'(t)$ 和 $n_r'(t)$ 分别表示系统在时刻 t 的运行组件数，激活组件数和冷贮备组件的数，则 $n_0'(t)=n_0,n_0-1,\ldots,k,k-1$; $n_s'(t)=n_0,n_0-1,\ldots 1,0$; $n_r'(t)=n_r,n_r-1,\ldots,1,0$。假设 $M(t)$ 表示维修人员在时刻 t 的状态，则

$$M(t)=\begin{cases}0, \text{维修人员处于空闲状态},\\ 1, \text{维修人员处于维修状态}。\end{cases}$$

因此，所提出的系统可由一个连续时间的马尔可夫过程 $\{X(t),t\geq 0\}=\{n_0'(t),n_s'(t),n_r'(t),M(t),Y(t),Z(t),m(t),t\geq 0\}$ 进行建模，其中 $Y(t)$ 和 $Z(t)$ 满足：

$$Y(t)=(y_1,y_2,\ldots,y_{n_0}),\ Z(t)=(z_1,z_2,\ldots,z_{n_0}),$$

且 $Y(t)$ 表示系统在时刻 t 在线工作部件数，是一个非负整数随机变量，它描述当前处于运行状态的部件数量，反映系统的瞬时工作能力与容错水平。$Z(t)$ 表示系统在时刻 t 冷贮备部件数，也是一个非负整数随机变量，它描述当前处于冷贮备状态且未投入运行的部件数，反映系统的长期冗余与故障兜底能力。

注：构造状态空间时，组件寿命、冷贮备激活时间、维修时间对应的 PH 相位排列顺序为建模约定，该顺序可交换。调换它们的顺序不改变系统可靠性指标的计算结果，本文采用固定顺序仅为状态

编码统一。

系统的有限状态空间为 $\boldsymbol{\Omega}=\{\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5\}$，且状态空间 $\boldsymbol{\Omega}$ 中的每个状态如下：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_0&=\{(n_0',n_s',n_r',M,Y,Z,m):n_0'=n_0;n_s'=0;n_r'=n_r;M=0,\\
&\quad 1\le y(t)\le\omega\},\\
\boldsymbol{S}_1&=\{(n_0',n_s',n_r',M,Y,Z,m):n_0'=n_0-1,\ldots,k;n_s'=n_0-n_0';n_r'\ge 1;M=1,\\
&\quad \text{或 } n_0'+n_s'+n_r'=n;M=0,y\in[1,\omega],z\in[1,s],m\in[1,v]\},\\
\boldsymbol{S}_2&=\{(n_0',n_s',n_r',M,Y,Z,m):n_0'=n_0-1,\ldots,k;n_s'\ge 1;n_r'=0;M=1;\\
&\quad y\in[1,\omega],z\in[1,s],m\in[1,v]\},\\
\boldsymbol{S}_3&=\{(n_0',n_s',n_r',M,Y,Z,m):n_0'=n_0-1,\ldots,k;n_s'=0;n_r'=0;\\
&\quad M=1;\ y\in[1,\omega],z\in[1,s],m\in[1,v]\},\\
\boldsymbol{S}_4&=\{(n_0',n_s',n_r',M,Y,Z,m):n_0'=k-1;n_s'\ge 1;n_r'\ge 0;M=1,\\
&\quad z\in[1,s],m\in[1,v]\},\\
\boldsymbol{S}_5&=\{(n_0',n_s',n_r',M,Y,Z,m):n_0'=k-1;n_s'=0;n_r'=0;M=1,\\
&\quad z\in[1,s],m\in[1,v]\},
\end{aligned}$$

宏状态 $\boldsymbol{S}_0$ 表示系统处于初始正常运行状态，在线组件满配置，冷贮备组件充足，没有失效组件，维修工处于空闲状态。

宏状态 $\boldsymbol{S}_1$ 表示系统仍正常工作，在线组件数 $k\le n_0'\le n_0-1$，此时维修工有两种状态，其中一个状态是处于维修状态，已有 1 个组件失效进入维修队列，维修工正在维修；另一个状态是维修工处于空闲状态，但维修工两种状态中冷贮备组件仍有剩余，可随时激活补充。

宏状态 $\boldsymbol{S}_2$ 表示系统仍正常工作，在线组件数 $k\le n_0'\le n_0-1$，已有 1 个组件失效进入维修队列，维修工正在维修，冷备用组件已耗尽，但仍有若干组件处于激活阶段尚未完成并入在线运行。

宏状态 $\boldsymbol{S}_3$ 表示系统仍正常运行，维修工忙碌，但冷备用组件数和激活中组件数均为 0，系统已无任何备用补充能力，处于临界正常状态。

宏状态 $\boldsymbol{S}_4$ 表示在线组件数降至 $k-1$，系统失效，维修工仍在维修故障组件；此时冷贮备组件数 $n_r'\ge 0$ 和激活中组件数 $n_s'\ge 1$(即可能仍有备用/激活组件，但已来不及补充在线运行，无法改变系统失效的状态)。

宏状态 $\boldsymbol{S}_5$ 表示系统完全失效：在线组件数降至 k−1(低于系统正常工作所需的 k 个)，系统已无任何备用补充能力，维修工仍在维修故障组件，为计算系统可靠度时的吸收状态。

因此，系统运行状态集为 $\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3\}$，失效状态集为 $\boldsymbol{F}=\{\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5\}$，图 1 为系统状态间的转移图。

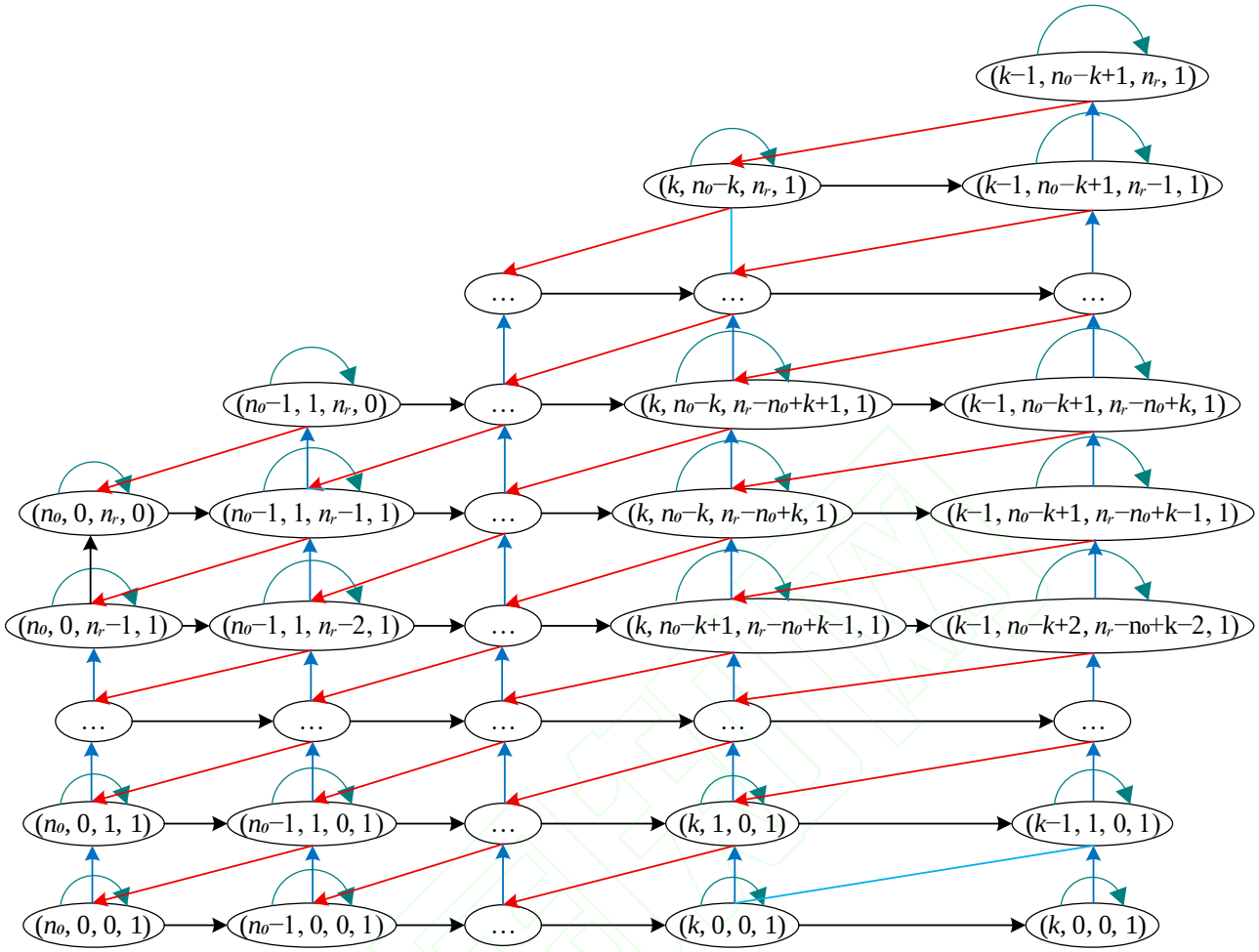

图 1　系统状态转移图

Fig. 1 System state transition diagram

1.3 Q 矩阵建模示例

基于上述状态转移过程，由转移率构成的无穷小生成元矩阵 Q 可以被构建。该矩阵的结构与系统在线组件 n_0，冷备用组件的数量 n_r，及系统正常运行所需至少在线组件数 k 直接相关。为更清晰地解释 Q 矩阵的构建过程，本节以 $n_0=2$，$n_r=3$，$k=1$ 的 K-混合冗余系统为例展开分析：系统需至少保持 1 个组件正常运行，因此所有满足运行条件的状态构成状态空间为 $\Omega=\{S_0,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\}$。每个宏观状态由寿命、激活、维修三类 PH 分布的相位过程耦合构成，矩阵 Q 的阶数为所有状态内部阶数之和，具体取决于三类过程的 PH 阶数 ω、s 和 m，其分块结构可通过状态间的转移关系明确推导。

根据 1.1 节的假设，为清晰表示模型的状态转移过程，系统的联合状态变量简化为：(n_0,n_s,n_r,M)，系统由 n 个同型组件组成，其中 n_0 个处于在线运行状态，且 n_s,n_r 分别表示冷储备待激活个数和冷贮备个数，$M(t)$ 表示在 t 时刻维修工状态，其中，$M(t)=0$ 表示维修工在 t 时刻处于空闲状态，$M(t)=1$ 表示维修工在 t 时刻正在维修。具体状态转移图如图 2，其中黑色箭头表示组件自身退化导致的故障转移，红色箭头表示冷贮备组件激活成功并投入在线运行，深蓝色箭头表示故障组件维修成功并恢复至冷贮备状态，浅蓝色箭头表示组件自身的退化过程。

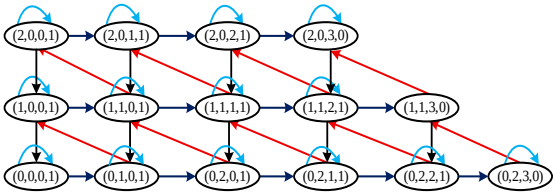

图 2 系统具体示例的状态转移图

Fig. 2 State transition diagram of a specific system example

根据状态转移图，构建无穷小生成元矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的详细模块如表 1 所示。

其中无穷小生成元矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的分块矩阵元素具体公式如下：

$$\boldsymbol{A}_1=\bigoplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i,\ \boldsymbol{B}_1=(\bigoplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i^{0})\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\beta};$$

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^{0},\ \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{S},\ \boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{W}^{(0)}\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\beta};$$

$$\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^{0},\ \boldsymbol{B}_3=\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{C}_3=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^{0}\otimes\boldsymbol{I}_m,\ \boldsymbol{D}_3=\boldsymbol{W}^{(0)}\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{I}_m;$$

$$\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{M}^{0},\ \boldsymbol{B}_4=(\bigoplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i)\oplus\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{C}_4=(\bigoplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i^{(0)})\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{I}_m,\ \boldsymbol{D}_4=\boldsymbol{W}^{(0)}\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{I}_m;$$

$$\boldsymbol{A}_5=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{B}_5=\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{C}_5=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^{0}\otimes\boldsymbol{I}_m;$$

$$\boldsymbol{A}_6=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{B}_6=(\bigoplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i)\oplus\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{C}_6=(\bigoplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i^{(0)})\otimes\delta\otimes I_m;$$

$$\boldsymbol{A}_7=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{B}_7=\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{C}_7=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^{0}\otimes\boldsymbol{I}_m,\ \boldsymbol{D}_7=\boldsymbol{W}^{(0)}\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_m;$$

$$\boldsymbol{A}_8=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{B}_8=(\bigoplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i)\oplus\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{C}_8=(\bigoplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i^{(0)})\otimes\boldsymbol{I}_m;$$

$$\boldsymbol{A}_9=\boldsymbol{I}_{\omega}\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{B}_9=\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{C}_9=\boldsymbol{W}^{(0)}\otimes\boldsymbol{I}_m;$$

$$\boldsymbol{A}_{10}=\boldsymbol{\alpha}\otimes(\boldsymbol{S}^{0}\oplus\boldsymbol{S}^{0}),\ \boldsymbol{B}_{10}=\boldsymbol{S};$$

$$\boldsymbol{A}_{11}=\boldsymbol{\alpha}\otimes(\boldsymbol{S}^{0}\oplus\boldsymbol{S}^{0})\otimes\boldsymbol{I}_m,\ \boldsymbol{B}_{11}=\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^{0},\ \boldsymbol{C}_{11}=\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M};$$

$$\boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{\alpha}\otimes(\boldsymbol{S}^{0}\oplus\boldsymbol{S}^{0})\otimes\boldsymbol{I}_m,\ \boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{C}_{12}=\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M};$$

$$\boldsymbol{A}_{13}=\boldsymbol{\alpha}\otimes(\boldsymbol{S}^{0}\oplus\boldsymbol{S}^{0})\otimes\boldsymbol{I}_m,\ \boldsymbol{B}_{13}=\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{C}_{13}=\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M};$$

$$\boldsymbol{A}_{14}=\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^{0}\otimes\boldsymbol{I}_m,\ \boldsymbol{B}_{14}=\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{C}_{14}=\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M};$$

$$\boldsymbol{A}_{15}=\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{M}^{0}\boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{B}_{15}=\boldsymbol{M}.$$

基于上述各子矩阵的递推公式，可将不同状态间的转移率按克罗内克积 $\otimes$ 与克罗内克和 $\oplus$ 的形式统一表达，从而直接得到系统的无穷小生成元矩阵 $\boldsymbol{Q}$。该矩阵完整刻画了 K-混合冗余可修系统在工作、待机、维修及切换过程中的全部状态转移特性，为后续稳态概率求解、可靠性指标计算及敏感性分析提供了基础。

2 系统性能指标

在工程实践中，系统管理者能够通过度量若干关键可靠性指标，来精准评估系统可靠性，进而为系统设计与维护方案的制定给予决策支持。本节分别计算所提系统的瞬态性能指标和稳态性能指标。

2.1 瞬态性能指标

为了获取该系统模型 $\{X(t),t\geq 0\}$ 在有限的状态空间 $\boldsymbol{\Omega}=\{\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5\}$ 内的性能指标，需要引入聚合随机过程理论相关的基础结果。设 $\boldsymbol{P}(t)=(\boldsymbol{p}_{ij}(t))$，其中 $\boldsymbol{p}_{ij}(t)=P\{X(t)=\boldsymbol{S}_j\,|\,X(0)=\boldsymbol{S}_i\}$ 表示 $t=0$ 系统处于宏状态 $\boldsymbol{S}_i$ 时，在时刻 t 处于宏状态 $\boldsymbol{S}_j$ 的概率。根据 Kolmogorov 的微分方程 $\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$ 和 Colquhoun 和 Hawkes[18]的研究结论，系统的状态转移概率矩阵可表示为：

$$\boldsymbol{P}(t)=\left(\boldsymbol{p}_{ij}(t)\right)=\exp(\boldsymbol{Q}t),\tag{1}$$

其中，$\exp(\boldsymbol{Q}t)$ 为矩阵指数函数，并且满足下式：

$$\exp(\boldsymbol{Q}t)=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}t+\frac{(\boldsymbol{Q}t)^2}{2!}+\ldots \tag{2}$$

进一步定义概率向量 $\bar{\boldsymbol{P}}(t)=\left(\boldsymbol{p}_i(t)\right)_{1\times|\boldsymbol{\Omega}|}$，其中 $\boldsymbol{p}_i(t)=P\{X(t)=\boldsymbol{S}_i\}$ 表示系统在时刻 t 处于宏状态 S_i 的概率，结合 Colquhoun 和 Hawkes[18]的研究，得到：

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{P}}(t)&=\left(\boldsymbol{p}_i(t)\right)_{1\times|\boldsymbol{\Omega}|}=(\boldsymbol{p}_0(0),\boldsymbol{p}_1(0),\ldots,\boldsymbol{p}_5(0))\exp(\boldsymbol{Q}t)\\&=(\boldsymbol{p}_0(0),\boldsymbol{p}_1(0),\ldots,\boldsymbol{p}_5(0))\boldsymbol{P}(t),\end{aligned}$$

其中，$(\boldsymbol{p}_0(0),\boldsymbol{p}_1(0),\ldots,\boldsymbol{p}_5(0))$ 表示初始概率向量。

2.1.1 瞬时可用度

在 $t=0$ 时，系统中所有组件是新的，其中 n_0 个在线运行，维修人员处于空闲状态，系统初始概率向量为 $\pi(0)=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\alpha}}_{n_0},\boldsymbol{0})$。式中：$\alpha$ 为单个组件寿命分布的初始概率向量；符号 $\otimes$ 代表克罗内克积；$\underbrace{\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\alpha}}_{n_0}$ 表示 n_0 个在线组件各自 PH 分布初始概率向量做克罗内克积，表征系统在初始时刻分别处于宏状态 $\boldsymbol{S}_0$ 中各个状态的概率；$\boldsymbol{0}$ 为零向量，表征系统在初始时刻分别处于宏状态 $\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5$ 的概率，在 $t=0$ 时刻的概率全为零。

系统的运行状态集为 $\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3\}$，故障状态集为 $\boldsymbol{F}=\{\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5\}$，系统的可用度可通过如下公式计算：

$$A(t)=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\alpha}}_{n_0},0)\exp(\boldsymbol{Q}t)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5}, \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5}$ 是与无穷小生成元矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 阶数对应的列向量，且相应于状态 $\boldsymbol{S}_4$ 和 $\boldsymbol{S}_5$ 的位置其元素值为 0，其他元素为 1。

表1 无穷小生成矩阵Q的块结构

Table 1 Block structure of the infinitesimal generator matrix Q

状态	(2,0,3,0)	(1,1,3,0)	(1,1,2,1)	(2,0,2,1)	(1,1,1,1)	(2,0,1,1)	(1,1,0,1)	(2,0,0,1)	(1,0,0,1)	(0,2,3,0)	(0,2,2,1)	(0,2,1,1)	(0,2,0,1)	(0,1,0,1)	(0,0,0,1)
(2,0,3,0)	$\boldsymbol{A}_1$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_1$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(1,1,3,0)	$\boldsymbol{A}_2$	$\boldsymbol{B}_2$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(1,1,2,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_3$	$\boldsymbol{B}_3$	$\boldsymbol{C}_3$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{C}_2$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(2,0,2,1)	$\boldsymbol{A}_4$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_4$	$\boldsymbol{C}_4$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(1,1,1,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_5$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_5$	$\boldsymbol{C}_5$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{D}_4$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(2,0,1,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_6$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_6$	$\boldsymbol{C}_6$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(1,1,0,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_7$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_7$	$\boldsymbol{C}_7$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{D}_7$	$\boldsymbol{0}$
(2,0,0,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_8$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_8$	$\boldsymbol{C}_8$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(1,0,0,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_9$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_9$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{C}_9$
(0,2,3,0)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_{10}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_{10}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(0,2,2,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_{11}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_{11}$	$\boldsymbol{C}_{11}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$

(0,2,1,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_{12}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_{12}$	$\boldsymbol{C}_{12}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(0,2,0,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$		$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_{13}$	$\boldsymbol{B}_{13}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
(0,1,0,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_{14}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{B}_{14}$	$\boldsymbol{C}_{14}$	$\boldsymbol{0}$
(0,0,0,1)	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{A}_{15}$	$\boldsymbol{B}_{15}$

2.1.2 系统可靠度和连续故障间隔平均时间

所提系统的可靠度定义为在时间间隔$[0,t]$内系统一直处于运行状态集$\boldsymbol{U}=\{\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3\}$中的概率。通过重新排列转移率矩阵$\boldsymbol{Q}$中元素的位置，可以得到以下新的转移率矩阵：

$$\boldsymbol{Q}=\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{U} \\ \boldsymbol{F} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{U} & \boldsymbol{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{UU} & \boldsymbol{Q}_{UF} \\ \boldsymbol{Q}_{FU} & \boldsymbol{Q}_{FF} \end{pmatrix} \end{array}.$$

根据 Colquhoun 和 Hawkes[16]，可靠度计算公式为：

$$R(t)=(\underbrace{\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\alpha}}_{n_0},\boldsymbol{0})\exp(\boldsymbol{Q}_{UU}t)\boldsymbol{e}_{|U|}. \tag{4}$$

系统连续故障之间的时间服从 PH 分布，记为$PH((\underbrace{\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\alpha}}_{n_0},\boldsymbol{0}),\boldsymbol{Q}_{UU})$，其维度为$|\boldsymbol{U}|$。

因此，连续系统故障的平均间隔时间如下：

$$\mu=-(\underbrace{\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{\alpha}}_{n_0},\boldsymbol{0})\boldsymbol{Q}_{UU}^{-1}\boldsymbol{e}_{|U|}. \tag{5}$$

2.2 稳态性能指标

稳态性能指标能够揭示系统在长期运行中的行为，本节将计算系统在稳态下的性能指标。

设$\boldsymbol{\pi}=(\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_0},\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1},\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_2},\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_3},\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4},\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_5})$为稳态概率向量，其中，向量$\boldsymbol{\pi}_i,i\in\{\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5\}$表示系统稳态时处于宏状态$\boldsymbol{S}_i$的概率向量。向量$\boldsymbol{\pi}$的元素满足矩阵方程：$\boldsymbol{\pi Q}=\boldsymbol{0}$，同时服从归一化条件：$\boldsymbol{\pi e}=\boldsymbol{1}$。向量$\boldsymbol{e}$为一列向量，其元素均为 1，具体阶数由上下文确定。因此，包含$n_0=2$、$n_r=3$和$k=1$的系统方程可表述如下：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_0}(\oplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i)+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{M}^0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{S}),\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^0\otimes\boldsymbol{I}_s,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_0}((\oplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i^0)\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M},\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta})\\
&+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^0\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^0\otimes\boldsymbol{I}_m,(\oplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i)\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},(\oplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i)\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M},\boldsymbol{0})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_2}(\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta})\\
&+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^0\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^0\otimes\boldsymbol{I}_m,(\oplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i)\oplus\boldsymbol{M})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_2}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},(\oplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i)\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{I}_m))+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_2}(\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_3}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{I}_\omega\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta})\\
&+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^0\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_3}((\oplus_{i=1}^{2}\boldsymbol{W}_i^0)\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{W}\oplus\boldsymbol{M})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}\otimes\boldsymbol{S}^0\otimes\boldsymbol{I}_m)=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{S},\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^0,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{W}^0\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M},\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{W}^0\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M},\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{W}^0\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{0})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M},\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_3}(\boldsymbol{W}^0\otimes\boldsymbol{I}_s\otimes\boldsymbol{I}_m,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{S}\oplus\boldsymbol{M})+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_5}(\boldsymbol{\delta}\otimes\boldsymbol{M}^0\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_3}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{W}^0\otimes\boldsymbol{I}_m)+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_5}(\boldsymbol{M})=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_1}\boldsymbol{e}_{(n_5+1)mn_1}+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_2}\boldsymbol{e}_{(n_A-k)mn_1}+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_3}\boldsymbol{e}_{n_1}+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_4}\boldsymbol{e}_{n_5mn_2}+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_5}\boldsymbol{e}_{(n_A-k)mn_2}+\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}_6}\boldsymbol{e}_{n_2}=1。
\end{aligned}$$

当系统中涉及的参数确定后，利用 MATLAB 软件即可求得该方程的数值解。因此，处于宏状态$\boldsymbol{S}_i$的概率可通过$\boldsymbol{\pi}_i\boldsymbol{e}_{\pi_i}$计算得出。

稳态可用度表示系统在长期运行中处于正常运行状态的时间占比。在本文模型中，当系统处于宏状态 $\boldsymbol{S}_0,\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3$ 时，均满足系统功能要求，视为正常运行状态；当 $\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{S}_5$ 时，系统发生故障停机。因此，稳态可用度可通过对处于正常状态的稳态概率求和计算，公式为：

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\boldsymbol{\pi}_0\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\pi}_0}+\boldsymbol{\pi}_1\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\pi}_1}+\boldsymbol{\pi}_2\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\pi}_2}+\boldsymbol{\pi}_3\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\pi}_3}=1-\boldsymbol{\pi}_4\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\pi}_4}-\boldsymbol{\pi}_5\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\pi}_5}. \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{\pi}_i$ 为系统处于宏状态 $\boldsymbol{S}_i$ 的概率向量，$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{\pi}_i}$ 为所有元素都为 1 且阶数为 $|\boldsymbol{S}_i|$ 的列向量。

3　数值算例

本节以矿用高压二组合变频器为典型工程对象进行可靠性评估和优化。在煤矿综采工作面，高压变频器是驱动核心设备的“动力心脏”，其运行可靠性关乎矿井安全生产。一旦变频器故障停机，会引发工作面“断电停机”连锁反应，造成巨大经济损失，甚至引发次生灾害。据文献[25]山西潞安郭庄煤业统计，2023 年供电系统故障引发非计划停电停机 63 次，单次事故直接经济损失超 50 万元，全年累计损失数千万元。高压变频器通信信号丢失会触发保护跳闸，刮板输送机因变频驱动故障停机后，断链处理需一个半小时以上，其间工作面“三机”瘫痪。高压变频器故障占井下机电设备非计划停机比重超 30%，传统运行模式难以满足现代化矿井生产需求。因此，高压变频器故障成为制约矿井连续化生产的系统性风险，构建高可靠性冗余供电体系，将故障处理从“被动抢修”变为“主动容错”，是降低停机损失、保障矿井安全和稳产高产的必然选择。该变频器系统满足 1/n: G 准则，采用在线工作+冷贮备冗余结构，其物理结构如图 3 所示，符合带激活时延、单维修工、混合冗余可修系统假设。

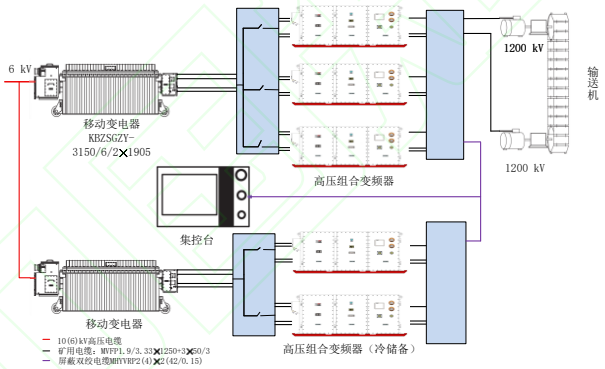

图 3 矿用高压组合变频器供电与驱动系统原理图

Fig. 3 Power supply and drive system diagram of mine-used high-voltage combined frequency converter

基于此，本节以矿用二组合高压变频器组为对象，设定总组件数为 5，选取 4 种典型在线—冷贮备配比方案，采用 2 阶 PH 分布与连续时间马尔可夫过程进行数值计算与对比分析，既验证理论模型有效性，又指导煤矿关键设备冗余设计与运维优化。基于连续时间马尔可夫过程理论，结合组件寿命与维修的 PH 分布特性，构造四种方案对应的高维状态转移率矩阵，并求解系统瞬态状态概率。表 2 是各方案参数值，在 3.1 节中研究新提出的 K 混合冗余策略效率及所提系统与传统 k/n: G 可修系统性能并比较分析；3.2 小节探讨方案 2 中，系统可靠性对 $\boldsymbol{W}$ 参数的敏感性分析；3.3 小节探讨方案 2 中，系统可靠性对 $\boldsymbol{S}$ 参数的敏感性分析。

表2 四种方案的 n_0 和 n_r 的设置
Table 2 The settings of n_0 and n_r for the four schemes

	n_0	n_r
方案 1	4	1
方案 2	3	2
方案 3	2	3
方案 4	1	4

3.1 系统可靠性对参数 n_0、n_r 的敏感性分析

以矿用高压二组合变频器组为工程载体，设定模块工作寿命、冷贮备激活时间与故障维修时间的 2 阶 PH 分布参数（见表 3）。

表3 矿用高压二组合变频器IGBT模块组参数设置
Table 3 Parameters setting for the IGBT module group of the mining-use high-voltage two-stage inverter converter

组件寿命	冷贮备激活时间	故障组件维修时间
$\mathrm{PH}(\boldsymbol{\alpha}=(1,0),\boldsymbol{W}=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.1\\ 0.1 & -0.3\end{pmatrix})$ $\boldsymbol{W}^0=-\boldsymbol{We}=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.2\end{bmatrix}$	$\mathrm{PH}(\boldsymbol{\delta}=(1,0),\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}-0.5 & 0.2\\ 0.2 & -0.6\end{pmatrix})$ $\boldsymbol{S}^0=-\boldsymbol{Se}=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.4\end{bmatrix}$	$\mathrm{PH}(\boldsymbol{\beta}=(1,0),\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}-0.4 & 0.1\\ 0.1 & -0.5\end{pmatrix})$ $\boldsymbol{M}^0=-\boldsymbol{Me}=\begin{bmatrix}0.3\\ 0.4\end{bmatrix}$
平均寿命：8.00	平均激活时间：3.08	平均维修时间：3.16

本次针对总组件数为 5 个、系统正常工作准则为至少 1 个组件在线运行的 1/n: G 型冷贮备可修系统，开展 4 种在线—冷贮备配比方案的性能对比分析，图 4 为不同初始组件数下系统可用度对比，本图为系统可用度 $A(t)$ 随时间 t 变化的曲线对比，重点探究初始在线工作组件数 n_0 与冷贮备组件数 n_r 的配比变化对系统性能的影响规律。

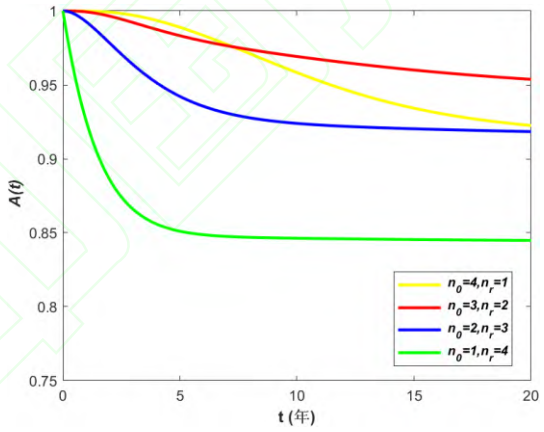

图 4 方案 1-4 中可用度函数的对比图
Fig. 4 The comparison chart of availability functions in schemes 1-4

从全周期可用度数据来看，$t=2$ 运行初期，方案 1 的瞬时可用度达到 0.998，比方案 2 的 0.985 略高，$t<7$ 在相应区间内一直保持短期可用度优势；$t>7$ 之后，方案 2 的可用度持续反超，当 $t=10$ 时，方案 2 的瞬时可用度达 0.960，相较于方案 1 的 0.935、方案 3 的 0.920、方案 4 的 0.845，分别高出 2.5、4、11.5 个百分点。在稳态阶段($t\to\infty$)，方案 2 的可用度达 0.945，为所有方案中最高，比方案 1 和方案 3 的 0.915 高出 3 个百分点，比方案 4 的 0.845 高出 10 个百分点，是兼顾短期运行稳定性与长期可靠性的综合最优配置。方案 4 虽然全周期可用度水平最低，$t=2$ 时刻瞬时可用度仅 0.870，但 $t>5$ 此后便迅速收敛至 0.845 的稳态值，运行过程无明显波动，且仅有 1 个组件在线运行，其余 4 个组件全程处于无劣化、无自发失效的冷贮备状态，组件老化损耗与全生命周期运维成本

远低于另外三组方案，具备专属场景优势。其中，不同分配方案的系统可用度量化对比如表 4。

表4 四种方案系统可用度量化对比

Table 4 The quantitative comparison of the availability of the four schemes

	$t=2$	$t=5$	$t=10$	$t\to\infty$
方案 1	0.988	0.978	0.935	0.915
方案 2	0.985	0.975	0.960	0.945
方案 3	0.950	0.930	0.920	0.915
方案 4	0.870	0.850	0.845	0.845

从图 5 曲线变化趋势与方案特征来看，$t=0$时刻所有方案的系统可靠度均为 1，均处于无故障的完美初始状态；进入极短运行初期后，方案 1 的可靠度小幅领先于其余方案，体现出更多在线工作组件带来的瞬时抗故障优势，而方案 4 的可靠度已出现明显下滑，单在线工作组件无瞬时故障缓冲空间的短板初步凸显。随着运行时间延长，各方案的可靠度分化特征愈发显著；方案 2 的可靠度衰减速率持续放缓，快速完成对方案 1 的反超，该方案通过 3 个在线工作组件保障短期抗故障能力、2 个冷贮备组件提供长期故障兜底，实现了瞬时容错能力与长期冗余能力的最优平衡，全周期可靠度衰减速度最慢，始终保持最高的无故障运行概率；方案 1 因仅配置 1 个冷贮备组件，无法承接多组件连续故障的替换需求，可靠度衰减速率逐步加快，初期的性能优势快速丧失；方案 3 虽配置 3 个冷贮备组件，但仅 2 个在线工作组件导致瞬时故障容错能力不足，可靠度衰减速度显著快于前两组方案，$t=80$时可靠度已降至 0.1 以下；方案 4 的可靠度衰减最为剧烈，$t=30$左右可靠度已趋近于 0，即便配置充足的冷贮备，也无法弥补单在线组件带来的瞬时失效风险，无故障连续运行能力最差。进入$t>100$的长期运行阶段后，所有方案的系统可靠度均逐步向 0 收敛，其中方案 2 仍保有微弱的无故障运行概率，方案 1 紧随其后，方案 3 与方案 4 已完全收敛至 0。整体结果表明，系统的无故障运行能力并非随在线组件数或冷储备数的单一增加而提升，而是取决于二者的配比均衡性，方案 2 的均衡配比兼顾了短期抗故障能力与长期冗余兜底能力，是 4 组方案中可靠性性能最优的配置。

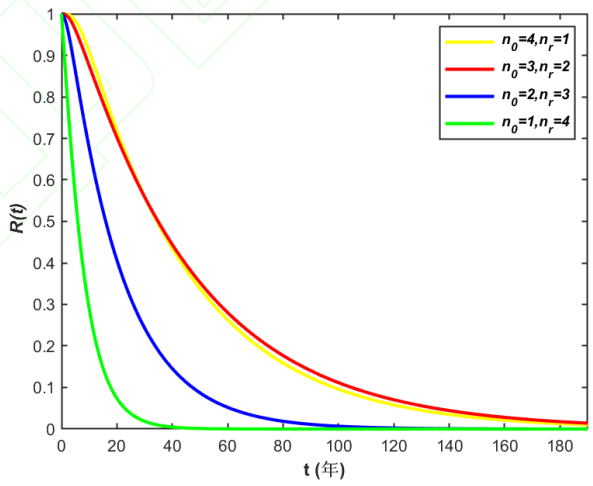

图 5 四种方案可靠度函数的对比曲线

Fig. 5 Comparison curves of the reliability functions of the four schemes

由表 5 数值计算结果可知，4 种在线-冷贮备配比方案的系统平均无故障时间(MTTF，单位为年，对应工程运维周期)存在显著差异：方案 2 的 MTTF 最大，达 0.240，是 4 种方案中无故障连续运行能力最强的配置；方案 1 紧随其后，为 0.232；方案 3 和方案 4 的 MTTF 明显下降，分别为 0.109 和

0.040。分析表明，在线工作组件匮乏引发的瞬时容错能力缺失，是限制系统长期无故障运行的主要瓶颈。综合图 5 与表 5 数据可知，方案 2 在可靠度曲线及 MTTF 指标上均居首位，其配置策略具备显著的工程指导价值，所蕴含的“在线组件维持瞬时容错、冷贮备组件提供长期冗余”的均衡设计理念，为多组件可修系统的可靠性优化提供了重要参考。

表5 四种方案的系统平均无故障时间(MTTF)对比
Table 5 Comparison of the mean time to failures (MTTF) of the four schemes

方案	n_0	n_r	MTTF/年
方案 1	4	1	0.232
方案 2	3	2	0.240
方案 3	2	3	0.109
方案 4	1	4	0.040

从购置成本与组件利用率分析，本算例系统仅需 1 个组件在线即可维持工作，总配置 5 个同型组件，用于对比不同在线-冷贮备配比方案，不代表工程现场必须采用该配置。不同配比组件利用率差异明显：方案 1 在线组件多，利用率最高，冷贮备储备紧张；方案 2 折中利用率与冗余能力；方案 3 在线组件更少，更多模块冷贮备待机；方案 4 仅 1 个模块在线，其余长期冷贮备，利用率最低，但冷贮备模块无带电老化，失效风险更低。

矿用高压变频器是煤矿井下安全关键设备，非计划停机损失远大于模块购置成本，工程设计优先保障可靠性。本文侧重可靠性建模评估，暂未开展可靠性-购置成本多目标优化，后续可引入相关约束开展冗余配置多目标优化。

3.2 系统可靠性对W参数的敏感性分析

冷贮备激活时延是本模型内置的系统内在要素，在 CTMC 状态转移中通过激活 PH 相位过程原生实现，不是事后修正项，可定量刻画备用组件切换的等待时间。

方案 2 是 4 种在线-冷贮备配比方案中兼顾短期抗故障能力与长期冗余兜底能力的最优配置，在煤矿井下长周期连续生产场景下具有最高的工程应用价值。而作为煤矿核心组件的高压二组合变频器，其工作寿命直接决定系统的故障频率与停机风险，是影响煤矿可靠性的关键因素。因此，本节以方案 2 为研究对象，通过调整组件寿命 PH 分布的参数矩阵$\boldsymbol{W}$的取值，分析不同模块寿命水平对系统可用度$A(t)$与可靠度$R(t)$的影响规律，为工程中模块选型、寿命优化与可靠性提升提供量化依据。

以方案 2 为对象，分析组件寿命 PH 分布参数矩阵$\boldsymbol{W}$对系统性能的敏感性，其中$\boldsymbol{W}$取值如下：$W_1=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.1\\ 0.1 & -0.3\end{bmatrix}$、$W_2=\begin{bmatrix}-0.15 & 0.1\\ 0.1 & -0.25\end{bmatrix}$、$W_3=\begin{bmatrix}-0.25 & 0.1\\ 0.1 & -0.35\end{bmatrix}$其中，$W_1,W_2,W_3$分别对应模块寿命的基准工况、提升工况与劣化工况。从系统可用度曲线图 6 可以看出，高压二组合变频器不同寿命水平下的可用度呈现明显分层：寿命提升工况W_2对应的曲线衰减最慢，稳态可用度最高，始终保持在 0.94 以上；基准工况W_1次之；而寿命劣化工况W_3对应的曲线衰减最快，稳态可用度最低，仅维持在 0.88 左右。这说明延长高压二组合变频器的寿命可显著降低故障频率，减少对冷贮备激活与维修资源的占用，有效提升系统长期稳定运行能力。从可靠度曲线图 7 来看，模块寿命对系统无故障运行能力的影响更为显著：寿命劣化工况W_3的可靠度在$t=80$时已趋近于 0，基准工况W_1在$t=120$时也基本衰减为 0；而寿命提升工况W_2的可靠度在$t=200$时仍保持一定水平，衰减速度明显更慢.这表明模块寿命越

长，系统无故障连续运行时间越长，长期服役稳定性越好。

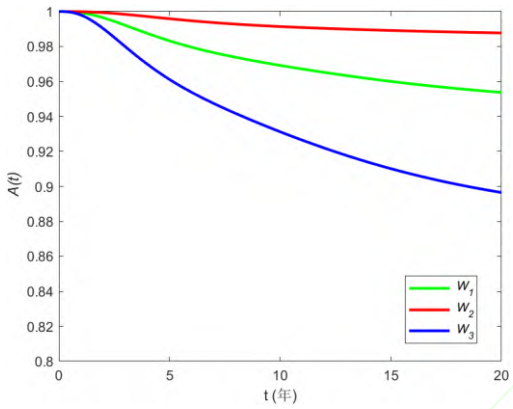

图 6 不同 W 参数下系统可用度变化曲线

Fig. 6 The variation curve of system availability under different W parameters

整体来看，组件寿命参数对方案 2 系统的可用度与可靠度均存在显著正向影响，模块寿命的提升能够同时改善系统的稳态运行能力与无故障服役能力，是工程中提升变频器可靠性的关键抓手。这一结果也为矿用高压变频器的模块选型、寿命优化提供了量化依据，说明在成本与空间约束下，优先选用更高等级、更长寿命的模块，或通过优化散热、降低结温波动等方式延长模块寿命，是提升系统可靠性的有效手段。

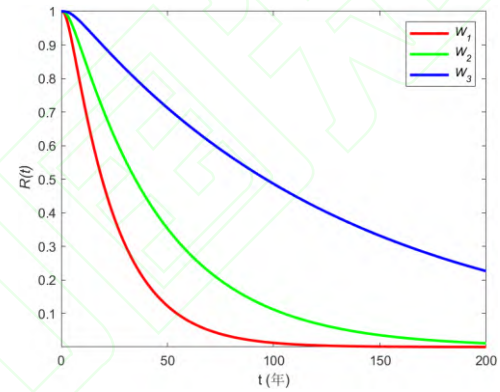

图 7 不同 W 参数下系统可靠度变化曲线

Fig. 7 The variation curve of system reliability under different W parameters

3.3 系统可靠性对 S 参数的敏感性分析

冷贮备系统中，备用单元的激活时延是影响冗余系统动态可靠性特征的关键因素，直接决定冗余备份效能的发挥效果，对系统可靠度、瞬时可用度等核心指标具有显著调控作用。为精准探究激活时延对系统可靠性的敏感性规律，本小节保持部件寿命、维修过程 PH 分布参数恒定不变，设置快速激活、基准激活、慢速激活三种典型工况，对应的激活时延生成元矩阵与平均激活时间参数如表 6 所示。基于三组差异化参数求解系统状态微分方程，绘制不同激活时延下系统瞬时可用度曲线(图 8)与系统可靠度曲线(图 9)，结合图表对比分析激活时延对系统可靠性指标的动态演化规律。

表6 不同激活时延工况PH分布参数及平均激活时间

Table 6 PH distribution parameters and average activation time under different activation delay conditions

工况	激活时延生成元矩阵	平均激活时间
基准激活	$\tilde{S}_1=\begin{bmatrix}-0.5 & 0.2\\ 0.2 & -0.6\end{bmatrix}$	3.077
快速激活	$\tilde{S}_2=\begin{bmatrix}-0.8 & 0.2\\ 0.2 & -0.9\end{bmatrix}$	1.618
慢速激活	$\tilde{S}_3=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.1\\ 0.1 & -0.3\end{bmatrix}$	8.000

由表 6 参数、图 8 可用度曲线与图 9 可靠度曲线可以看出，激活时延对冷贮备冗余系统可靠性存在显著负面影响，系统可靠度和瞬时可用度与平均激活时间呈负相关。随着平均激活时间从 1.618 增大至 8.000，备用单元切换投入工作的耗时大幅增加；图 8 与图 9 曲线反映出，激活时延越长，系统可靠度与瞬时可用度衰减速率越快，同一时刻下可靠性指标越低。快速激活工况 $\tilde{S}_2$ 对应的两条曲线始终位于最上方，备用单元可快速接替故障主单元，充分发挥冗余容错优势；基准激活工况 $\tilde{S}_1$ 指标衰减速度居中；慢速激活工况 $\tilde{S}_3$ 曲线下降最为剧烈，主单元失效后备用单元等待激活时间较长，系统长时间处于功能空缺状态，冗余容错能力被显著削弱，系统失效风险明显升高。

基于图表分析得到如下工程启示：冷贮备冗余系统的可靠性增益高度依赖备用单元的激活切换性能，激活时延是制约系统可靠性提升的核心瓶颈。设备设计阶段应优先优化备用单元启动、切换控制结构，缩短激活时延，最大化冗余带来的可靠性收益；开展可靠性建模评估时，不能直接采用瞬时激活的理想假设，必须把激活时延纳入模型，防止高估系统可靠度与可用度，避免评估偏于危险；运维阶段需定期检测备用单元及切换机构，落实预防性维护，保障备用单元能够快速、可靠完成切换，提升设备长期运行安全水平。

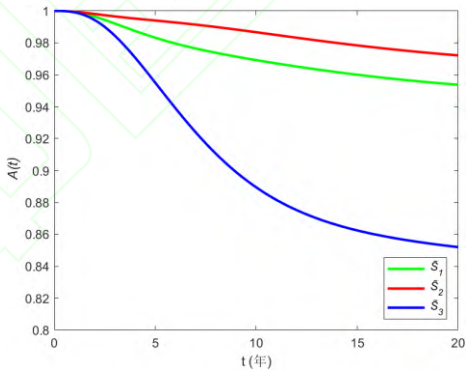

图 8 不同 S 参数下系统可用度变化曲线

Fig. 8 The variation curve of system availability under different S parameters

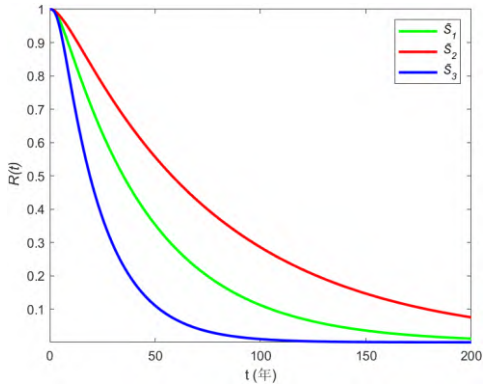

图 9 不同 S 参数下系统可靠度变化曲线
Fig. 9 The variation curve of system reliability under different S parameters

4 结　论

本文针对带激活时延、单维修工、冷贮备混合冗余的可修系统开展可靠性建模与分析，采用相位型 PH 分布统一刻画组件寿命、冷贮备激活时间与维修时间，基于连续时间马尔可夫链(CTMC)构建系统状态转移模型，推导无穷小生成元矩阵并建立瞬时可用度、稳态可用度、可靠度与平均无故障时间(MTTF)等完整可靠性指标体系。通过矿用高压二组合变频器的工程实例开展数值分析，系统分析不同在线—冷贮备配比及组件寿命参数对系统可靠性的影响规律，得到主要结论如下：

1）系统可靠性不取决于单一变量，而由在线与冷贮备部件配比均衡性决定。在线部件过多会降低冗余储备能力，冷贮备过多则会削弱瞬时故障容错能力，均衡配比才能实现性能最优。

2）3 在线+2 贮备为最优冗余配置。该方案在瞬时可用度、稳态可用度、可靠度衰减速度及 MTTF 等指标上均表现最佳，兼顾短期抗故障能力与长期冗余兜底能力，最适合煤矿井下连续生产场景。

3）部件寿命参数 W 对系统可靠性影响显著。延长模块工作寿命可明显降低故障频率、减缓可靠度衰减、提升稳态可用度，是提升设备可靠性的关键技术途径。

4）冷贮备激活时延与维修效率直接决定系统恢复能力。激活时延作为系统内在演化要素，其增大会拉长故障后容错等待窗口；加快冷贮备激活速率、提升维修效率可有效减少停机时间，提高系统稳态可用度与无故障连续运行能力，忽略激活时延将高估系统可靠性。

5）基于 CTMC 与 PH 分布的建模方法适用性强。该方法可准确刻画非指数分布、激活时延、单维修工等工程约束，突破传统指数分布假设局限，可为高可靠冗余系统提供通用分析工具。

未来可进一步构建多维修工、预防性维护、多故障模式耦合的动态冗余模型；结合现场运行数据实现参数动态校准与不确定性分析；开展可靠性–经济性多目标优化；并拓展至多系统联动可靠性分析，为矿井关键设备全生命周期运维提供更完善的理论与方法支撑。

参考文献（References）

[1] Liu B L, Wen Y Q, Qiu Q A, et al. Reliability analysis for multi-state systems under K-mixed redundancy strategy considering switching failure[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2022, 228: 108814.
[2] Dao Thi T H, Fourneau J M. Markovian queueing network with complex synchronizations: Product form and tensor[J]. Performance Evaluation, 2012, 69: 164-186.
[3] Wu W, Xu H, Zheng K, et al. Reliability analysis of a two identical components cold standby system with multiple failure modes[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2026, 55(2): 549-569.
[4] Ma M, Hu L M, Wang L, Yu X Y. Stochastic modeling and optimization of discrete-time cold standby repairable systems with unreliable repair facility and retrial mechanism[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2025, 453: 116134.
[5] Liu L, Ai X C, Wu J. Reliability and residual life of cold standby systems[J]. Mathematics, 2024, 12(10): 1540.
[6] Wang C N, Wang X L, Xing L D, et al. Efficient reliability approximation for large k-out-of-n cold standby systems with position-dependent component lifetime distributions[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2023, 240: 109548.
[7] Eryilmaz S. Reliability and performance evaluation of weighted k-out-of-n:G system consisting of components with discrete lifetimes[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2024, 252: 110484.
[8] Dembińska A, Nikolov N I, Stoimenova E. Reliability properties of k-out-of-n systems with one cold standby unit[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2021, 388: 113289.

[9] Finkelstein M, Cha J H, Langston A. Optimal preventive switching of components in degrading systems[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2022, 219: 108266.
[10] Yang Z W, Ai X C, Liu L L, et al. Research on spare part activation strategy and reliability index calculation of cold standby voting systems under Weibull distribution[J]. Mathematics, 2026, 14(9): 1533.
[11] Ardakan M A, Hamadani A Z. Reliability-redundancy allocation problem with cold-standby redundancy strategy[J]. Simulation Modelling Practice and Theory, 2014, 42: 107-118.
[12] Kim H. Markov-based reliability model for a mixed redundant system and parallel genetic algorithm with knowledge archives for a redundancy allocation problem[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2023, 240: 109585.
[13] Wen Y Q, Liu B L, Qiu Q A, Shang L J, Gao Y F. Matrix-analytic reliability modeling of k-out-of-n: G repairable systems with K-mixed redundancy and repairman's multiple vacations[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2026, 275: 112781.
[14] Liu X, Wu Z, Yuan Y, Sun W, Gao J. Reliability modeling of wind turbine gearbox system considering failure correlation under Shock-Degradation[J]. Sensors, 2025, 25(14): 4425.
[15] Jiang S, Jia X J. Reliability assessment under continuous fatigue degradation and shock based on Markov renewal process[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2024, 248, 110151.
[16] Liang Q Z, Liu S L, Peng C H. Reliability and maintenance analysis of multi-state nuclear systems with multiple components subjected to random shocks under dynamic environments[J]. Annals of Nuclear Energy, 2025, 224:111739.
[17] Gan W, Tang J. Multi-Performance Degradation System Reliability Analysis with Varying Failure Threshold Based on Copulas[J]. Symmetry, 2024, 16(1): 57.
[18] Colquhoun D, Hawks A G. On the stochastic properties of bursts of single ion channel opening and of clusters of bursts[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society London B, 1982, 300: 1-59.
[19] Wu W Q, Tang Y H, Yu M M, Jiang Y. Reliability analysis of a k-out-of-n: G repairable system with single vacation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(24): 6075-6097.
[20] Yuan L. Reliability analysis for a k-out-of-n: G system with redundant dependency and repairmen having multiple vacations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(24): 11959-11969.
[21] Zhang Y Y, Wu W Q, Tang Y H. Analysis of an k-out-of-n: G system with repairman's single vacation and shut off rule[J]. Operations Research Perspectives, 2017, 4: 29-38.
[22] 温艳清． 基于 PH 分布的多状态可修系统建模及可靠性分析[M]． 北京：经济科学出版社， 2023： 13-14．
Wen Y Q. Modeling and reliability analysis of multi-states repairable systems based on PH distributions[M]. Beijing: Economic Science Press, 2023: 13-14. (in Chinese)
[23] 温艳清， 崔利荣， 刘宝亮． 修理工带休假的 n 部件冷贮备可修系统[J]． 北京航空航天大学学报， 2016， 42（3）： 569-575． Wen Y Q， Cui L R， Liu B L． Cold standby n-component repairable system with repairman vacation[J]． Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics， 2016， 42（3）： 569-575． （in Chinese）
[24] Wen Y Q, Liu B L, Zhang Z Q, et al. Modeling and analysis for a repairable system with multi-state components under K-mixed redundancy strategy[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2024, 53(2): 748-764.
[25] 许祥赟． 基于物联云平台的煤矿机电设备供电安全监控优化研究[J]． 山东煤炭科技， 2026， 44（1）： 106-109．