# 含模糊参数振动系统的 Taylor 级数展开法

邱志平 刘正权

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

**摘 要**: 为研究模糊参数约束条件下振动结构模糊有限元平衡方程特征值的问题,通过模糊集合理论中隶属度的性质,把振动结构的不确定模糊参量表示成区间形式,得到区间有限元平衡方程,利用所提 Taylor 级数展开法求解可以得到特征值所在的区间集. 将 α 水平截集下得到的区间解,通过模糊分解定理构造出振动结构模糊有限元平衡方程的模糊解,从而可以得到模糊参数约束条件下振动结构的固有频率的变化范围,为结构的模糊可靠性评价奠定了基础. 通过数值算例表明了所提方法的可行性.

**关 键 词**: 泰勒展开; 模糊集; 模糊有限元; 振动分析

**中图分类号**: O 327; O 159

**文献标识码**: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2005)12-1342-05

# Taylor series expansion method for vibration system with fuzzy parameters

Qiu Zhiping Liu Zhengquan

(School of Aeronautic Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract**: To study the eigenvalues problem of vibration structure with fuzzy parameters, the Taylor series expansion method was proposed. Based on the property of membership level, the uncertain fuzzy parameters were expressed in the interval forms, and accordingly the fuzzy finite element equilibrium equation could be expressed by interval finite element equilibrium equation. The Taylor series expansion method was used to compute the eigenvalues interval sets of interval finite element equilibrium equation for the purpose of calculating the eigenvalues variety range of vibration structure with fuzzy parameters. The fuzzy result sets of eigenvalues could be constructed by interval result sets gained from computing the interval finite element equilibrium equation under every α-level through fuzzy decompose theorem. Consequently the variety range of natural frequencies can be obtained concerning vibration structures with fuzzy parameters and establish the foundation for fuzzy reliability evaluation. A numerical example is considered to illuminate the practicability of the method presented.

**Key words**: Taylor expansion; fuzzy sets; fuzzy finite element method; vibration analysis

由于各种因素的影响,工程计算中所涉及的所有参量都带有某种程度上的不确定性. 如结构的几何尺寸、材料的物理参数、作用载荷、边界条件和系统的失效条件等,这些数据特性上通常是不能精确度量和计算的,而由于这种不确定性所带来的结果往往也不宜用确定性的数据来描述. 根据不确定性的来源、性质及描述方法的不同,目前工程上一般把不确定性分为随机不确定性和模糊不确定性 2 大类,而与之对应的处理方法[1] 主要有概率论和随机过程、模糊集合和模糊逻辑、凸

**收稿日期**: 2004-10-13

**基金项目**: 国家自然科学基金-中国工程物理研究院联合 NSAF 资助项目(10376002)

**作者简介**: 邱志平(1962–),男,吉林长春人,教授, zpqiu@buaa.edu.cn.

模型理论和区间分析等. 而其中模糊集合理论在多个学科领域得到了广泛的应用,尤其在工程应用方面,模糊优化、模糊设计和模糊评判已成为机械和结构工程中处理不确定性的重要工具,结构的模糊有限元计算也是研究者所关注的工程问题之一.

模糊有限元法 FFEM(Fuzzy Finite Element Method)是有限元分析的一个新领域,它起始于 20 世纪 90 年代早期,S. S. Rao[2,3] 等人提出了对工程系统进行静态分析和振动分析的模糊有限元方法. 文献[4]提出了另外一种基于有限元理论的静态分析方法,解决了弹性模型和只把泊松比看作模糊数的问题. 国内也有学者对模糊有限元问题做了一定的研究[5~7].

对于大多数工程结构振动问题,人们难以求解结构的固有频率或特征值的精确解而只能求得其近似解. 这样无论从理论上,还是实用中都希望能给出结构固有频率的上下界. 邱志平等[8~10] 曾经从区间数学的观点系统研究了有界参数结构固有频率变化范围问题. 本文提出一种求解模糊有限元平衡方程的区间解法,所提方法根据隶属函数的隶属度,结合区间数学的知识,可求出结构响应(振动频率)的区间分布. 本文最后给出的数值算例说明了该方法的可行性和实用性.

## 1　模糊数的区间表示

1965 年,美国加利福尼亚大学控制论专家 L. A. Zadeh[11] 教授在其著名论文"模糊集合"中首次并明确提出了模糊集合的概念,将普通集合的特征函数从{0,1}推广到闭区间[0,1],得到了模糊集合的定义,从而开创了模糊数学这门数学分支. 下面给出模糊数学的基本概念和模糊数的区间形式.

### 1.1　模糊数和隶属函数

**定义 1**　设在论域 $\boldsymbol{U}$ 上定义了从 $\boldsymbol{U}$ 到[0,1]的一个映射 $\mu_{\tilde{A}}$:

$$\left.\begin{aligned}&\mu_{\tilde{A}}:\boldsymbol{U}\to[0,1]\\&u\mid\to\tilde{\boldsymbol{A}}(u)\in[0,1]\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

则称 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{U}$ 上的模糊集(fuzzy set),称 $\tilde{\boldsymbol{A}}(u)$ 为 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的隶属函数,也可记做 $\mu_{\tilde{A}}(u)$,它称作 $u$ 关于 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的隶属度,表示 $u$ 属于 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的程度.

模糊子集 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 完全由其隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(u)$ 所刻画. 当 $\mu_{\tilde{A}}(u)$ 仅取 0 或 1 时,模糊集合 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 就退化为普通子集 $\boldsymbol{A}$,而隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}(u)$ 就退化为 $\boldsymbol{A}$ 的特征函数 $\mu(u)$. 可见普通集合仅是模糊集合的特例,模糊集合可以包含普通集合,是普通集合概念的推广. 隶属程度(隶属度)的思想反映了模糊性的中间过程,是贯穿整个模糊数学及应用模糊数学进行工程设计的基本思想.

模糊集合可以看作普通集合的一种扩展,它的隶属函数被定义为在[0,1]之间,而取代实数的 0 或 1. 对于数学应用来说,它和普遍集合间的关系可由截集的概念及分解定理和扩展原理等描述,模糊集合 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的 $\alpha$ 水平截集可由下式定义.

**定义 2**　设给定模糊集合 $\tilde{\boldsymbol{A}}$,其隶属函数为 $\mu_{\tilde{A}}(u)$,对任意[0,1]闭区间实数 $\alpha$(记作 $\alpha\in[0,1]$),称集合

$$\boldsymbol{A}_\alpha=\{u\in\boldsymbol{U},\mu_{\tilde{A}}(u)\geqslant\alpha\}\tag{2}$$

为 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的 $\alpha$ 水平截集.

对于第 $i$ 个 $\alpha$ 水平截集,上下界为 $(\underline{a},\overline{a})$

$$\left.\begin{aligned}\underline{a}&=\min\{a:a\in\boldsymbol{A}_\alpha\}\\\overline{a}&=\max\{a:a\in\boldsymbol{A}_\alpha\}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

如果在一个问题中,为所有的模糊量构造一个 $n$ 维的 $\alpha$ 水平集合,则每一个量都可以用一个 $2\times n$ 矩阵表示,如图 1 所示.

$$\boldsymbol{A}=\{(\underline{a},\overline{a})_{\alpha_1},(\underline{a},\overline{a})_{\alpha_2},\cdots,(\underline{a},\overline{a})_{\alpha_n}\}\tag{4}$$

另外,每一个模糊数都具有 2 个特性:凸集性和正态性. 凸集性要求隶属函数的形状为凸状的,正态性则表明模糊函数隶属度最高为 1.

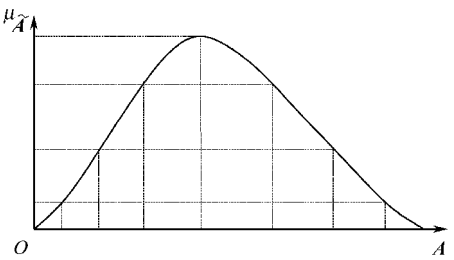


图 1　模糊集合的隶属度

### 1.2　模糊数的区间形式

设模糊数的隶属函数定义为

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}f_A(x) & a\leqslant x\leqslant b\\1 & b\leqslant x\leqslant c\\g_A(x) & c\leqslant x\leqslant d\end{cases}\tag{5}$$

若 $f_A(x)$ 和 $g_A(x)$ 分别为 $x$ 的单调递增函数和递减函数,则模糊数 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的 $\alpha$ 水平截集 $\boldsymbol{A}_\alpha$ 为一具有明确上下界的闭区间,其上下界分别为 $\overline{a}(\alpha)$ 和 $\underline{a}(\alpha)$,即:

$$\left.\begin{aligned}\bar{a}(\alpha)&=\max\{a:a\in A_\alpha,\alpha\in[0,1]\}\\ \underline{a}(\alpha)&=\min\{a:a\in A_\alpha,\alpha\in[0,1]\}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

若已知模糊数 $\tilde{A}$ 的任意 $\alpha$ 水平截集 $[\bar{a}(\alpha),\underline{a}(\alpha)]$,则此模糊数可表示为

$$\tilde{A}(\alpha)=\{[\bar{a}(\alpha),\underline{a}(\alpha)],\alpha\in[0,1]\}\quad(7)$$

当模糊数表示为区间的形式时,模糊运算可由每一 $\alpha$ 水平截集的区间运算导出.

## 2 振动问题的模糊有限元平衡方程

### 2.1 模糊有限元平衡方程

一个振动结构的固有频率是该结构的总体刚度矩阵和总体质量矩阵的函数. 而结构的刚度矩阵和质量矩阵是结构参数的函数,当结构参数如几何参数、物理参数是模糊数时,结构的总体刚度矩阵和总体质量矩阵也是模糊的,则所求得的结构的固有振动频率也是模糊数. 于是,可以得到模糊参数振动问题的有限元平衡方程:

$$\tilde{K}\tilde{u}=\tilde{\lambda}\tilde{M}\tilde{u}\quad(8)$$

式中,$\tilde{K}$ 表示传统结构的模糊总体刚度矩阵;$\tilde{M}$ 表示结构的模糊总体质量矩阵;$\tilde{\lambda}=\tilde{\omega}^2$ 是结构的模糊特征值($\tilde{\omega}$ 表示结构的模糊固有振动频率);$\tilde{u}$ 为其模糊特征向量. 在有限元方法中,总体刚度矩阵和总体质量矩阵可表示为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{K}&=\sum_{e=1}^{n}\tilde{K}^e\\ \tilde{M}&=\sum_{e=1}^{n}\tilde{M}^e\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

式中,$\tilde{K}^e$ 和 $\tilde{M}^e$ 表示第 $e$ 个单元的模糊单元刚度矩阵和模糊单元质量矩阵;$n$ 为总体单元数.

### 2.2 模糊有限元方程转化为区间有限元方程

在结构的模糊参数约束下,考虑结构固有振动的特征值问题. 当把结构的物理参数和几何参数看作结构参数时,总体刚度矩阵和总体质量矩阵则是结构参数 $\tilde{b}=[\tilde{b}_1\quad\tilde{b}_2\quad\cdots\quad\tilde{b}_m]^{\mathrm{T}}$ 的函数

$$\left.\begin{aligned}K&=K(\tilde{b})\\ M&=M(\tilde{b})\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

结构的模糊参数 $\tilde{b}=[\tilde{b}_1\quad\tilde{b}_2\quad\cdots\quad\tilde{b}_m]^{\mathrm{T}}$ 按照1.2节所提模糊数的区间表示的方法,在特定的 $\alpha$ 水平截集下化为区间数的形式:

$$\left.\begin{aligned}b^{\mathrm{I}}&=(b_i^{\mathrm{I}})\\ b_i^{\mathrm{I}}&=[\underline{b}_i,\bar{b}_i]\\ i&=1,2,\cdots,m\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

于是特征值问题式(8)形式上可以表示为

$$K(b^{\mathrm{I}})u=\lambda M(b^{\mathrm{I}})u\quad(12)$$

式(12)可以称为区间参数特征值问题. 所以,模糊有限元方程就转化为区间有限元方程,问题就是求特征值 $\lambda=(\lambda_i)$ 的集合:

$$\Gamma=\{\lambda:\lambda\in R,K(b)u=\lambda M(b)u,b\in[\underline{b},\bar{b}]\}\quad(13)$$

的上界和下界所组成的区间:

$$\lambda_i\in\lambda_i^{\mathrm{I}}=[\underline{\lambda}_i,\bar{\lambda}_i],i=1,2,\cdots,n\quad(14)$$

即

$$\left.\begin{aligned}\underline{\lambda}_i&=\min_{b\in b^{\mathrm{I}}}\lambda_i(<K(b),M(b)>)\\ \bar{\lambda}_i&=\max_{b\in b^{\mathrm{I}}}\lambda_i(<K(b),M(b)>)\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

其中

$$\lambda_i(<K(b),M(b)>)=\min_{\Phi_i\subset R^n}\max_{\substack{u\in\Phi_i\\ u\neq0}}\frac{u^{\mathrm{T}}Ku}{u^{\mathrm{T}}Mu}\quad(16)$$

式中,$\Phi_i$ 为 $n$ 维实数空间 $\mathbf{R}^n$ 的任意 $i$ 维子空间.

## 3 求解

### 3.1 Taylor 级数展开法

考虑基于 $m$ 维结构参数 $b_i,i=1,2,\cdots,m$ 的特征值 $\lambda_i=\lambda_i(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,通过 Taylor 级数展开:

$$\begin{aligned}\lambda_i(b_1,b_2,\cdots,b_m)&=\lambda_i(b_{1c},b_{2c},\cdots,b_{mc})+\\ &\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\lambda_i(b_{1c},b_{2c},\cdots,b_{mc})}{\partial b_j}(b_j-b_{jc})+\\ &\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}\frac{\partial^2\lambda_i(b_{1c},b_{2c},\cdots,b_{mc})}{\partial b_k\partial b_l}(b_k-b_{kc})(b_l-b_{lc})\end{aligned}\quad(17)$$

式中,$b_{ic},i=1,2,\cdots,m$ 为结构参数 $b_i$ 的名义值. 为了表示的方便,定义:

$$\varphi^{\mathrm{T}}=\left(\frac{\partial\lambda_i(b_c)}{\partial b_1},\frac{\partial\lambda_i(b_c)}{\partial b_2},\cdots,\frac{\partial\lambda_i(b_c)}{\partial b_m}\right)=\left(\frac{\partial\lambda_{ic}}{\partial b_1},\frac{\partial\lambda_{ic}}{\partial b_2},\cdots,\frac{\partial\lambda_{ic}}{\partial b_m}\right)\quad(18)$$

和

$$\Psi=\left(\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_k\partial b_l}\right)_{m\times m}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_1\partial b_1}&\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_1\partial b_2}&\cdots&\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_1\partial b_m}\\ \frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_2\partial b_1}&\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_2\partial b_2}&\cdots&\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_2\partial b_m}\\ \vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\ \frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_m\partial b_1}&\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_m\partial b_2}&\cdots&\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_m\partial b_m}\end{pmatrix}\quad(19)$$

则,式(17)可写作:

$$\lambda_i(\boldsymbol{b}) = \lambda_i(\boldsymbol{b}_c + \mathrm{d}\boldsymbol{b}) = \lambda_{ic} + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}\mathrm{d}\boldsymbol{b} \tag{20}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{ic} &= \lambda_i(\boldsymbol{b}_c) = \lambda_i[b_{1c} \quad b_{2c} \quad \cdots \quad b_{mc}]\\ \mathrm{d}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} &= [\mathrm{d}b_1 \quad \mathrm{d}b_2 \quad \cdots \quad \mathrm{d}b_m]\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

又设

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{I}} = [-\Delta\boldsymbol{b}, \Delta\boldsymbol{b}] = \{\mathrm{d}\boldsymbol{b}: -\Delta\boldsymbol{b} \leqslant \mathrm{d}\boldsymbol{b} \leqslant \Delta\boldsymbol{b}\}\\ &\Delta b_i^{\mathrm{I}} = [-\Delta b_i, \Delta b_i] = \{\mathrm{d}b_i: -\Delta b_i \leqslant \mathrm{d}b_i \leqslant \Delta b_i\}\\ &i = 1,2,\cdots,m\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$\Delta\boldsymbol{b} = (\Delta\boldsymbol{b}_j)$ 是一非负常量,问题即转化为求解结构参数变动属于集合 $\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{I}}$ 的特征值的区间,也就是求解特征值的极值问题

$$\lambda_{i\max} = \max_{\mathrm{d}\boldsymbol{b} \in \Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{I}} = [-\Delta\boldsymbol{b}, \Delta\boldsymbol{b}]} (\lambda_{ic} + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}\mathrm{d}\boldsymbol{b}) \tag{23a}$$

$$\lambda_{i\min} = \min_{\mathrm{d}\boldsymbol{b} \in \Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{I}} = [-\Delta\boldsymbol{b}, \Delta\boldsymbol{b}]} (\lambda_{ic} + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}\mathrm{d}\boldsymbol{b}) \tag{23b}$$

式(23)中,$\lambda_i$ 是不确定变量 $\mathrm{d}\boldsymbol{b}$ 的函数,通过自然区间扩张,得到:

$$\lambda_i^{\mathrm{I}} = [\underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i] = \lambda_{ic} + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}(\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{I}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{I}} \tag{24}$$

由区间运算,有

$$\begin{aligned}\lambda_i^{\mathrm{I}} &= [\underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i] =\\ &\lambda_{ic} + [-|\boldsymbol{\varphi}|^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{b}, |\boldsymbol{\varphi}|^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{b}] +\\ &\left[-\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{\Psi}|\Delta\boldsymbol{b}, \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{\Psi}|\Delta\boldsymbol{b}\right] =\\ &\left[\lambda_{ic} - |\boldsymbol{\varphi}|^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{\Psi}|\Delta\boldsymbol{b},\right.\\ &\left.\lambda_{ic} + |\boldsymbol{\varphi}|^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{b} + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}|\boldsymbol{\Psi}|\Delta\boldsymbol{b}\right]\end{aligned} \tag{25}$$

结合式(18)和式(19),可得:

$$\left.\begin{aligned}\underline{\lambda}_i &= \lambda_{ic} - \sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial\lambda_{ic}}{\partial b_j}\right|\Delta b_j - \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}\left|\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_k\partial b_l}\right|\Delta b_k\Delta b_l\\ \overline{\lambda}_i &= \lambda_{ic} - \sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial\lambda_{ic}}{\partial b_j}\right|\Delta b_j + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{m}\left|\frac{\partial^2\lambda_i(b_c)}{\partial b_k\partial b_l}\right|\Delta b_k\Delta b_l\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

即得到特征值的区间:

$$\lambda_i \in \lambda_i^{\mathrm{I}} = [\underline{\lambda}_i, \overline{\lambda}_i], i = 1,2,\cdots,n \tag{27}$$

### 3.2　区间解构造模糊解

综上所述,由结构的模糊参数确定的特征值问题,通过模糊数的隶属函数及隶属度的概念,结合 $\alpha$ 水平截集的性质,转化为区间数的运算,利用结构振动问题的 Taylor 级数展开法,并由区间解构造出模糊解,从而可求得模糊参量确定的结构的特征值,即可以得到结构的固有振动频率区间.

## 4　数值算例

考虑如图 2 所示的变截面悬臂梁的弯曲自由振动问题. 梁有 3 个均匀段,长度分别为 $l_1$,$l_2$ 和 $l_3$,梁截面为矩形,其高度分别为 $h_1$,$h_2$ 和 $h_3$,宽度分别为 $b_1$,$b_2$ 和 $b_3$,杨氏模量为 $E$ 和材料密度为 $\rho$,除梁截面宽度外均为模糊值,详见表 1.

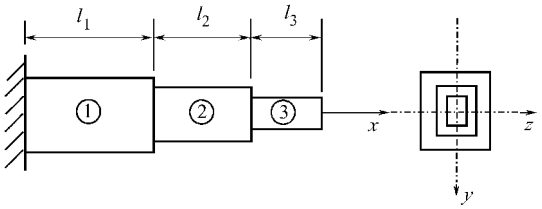


图 2　变截面悬臂梁

**表 1　变截面悬臂梁的模糊参数**

| 参数 | 值 | 参数 | 值 |
|---|---|---|---|
| $l_1$/m | (1.99, 2.00, 2.01) | $h_1$/m | (0.16, 0.18, 0.20) |
| $l_2$/m | (1.49, 1.50, 1.51) | $h_2$/m | (0.12, 0.13,0.14) |
| $l_3$/m | (0.59, 0.60, 0.61) | $h_3$/m | (0.06, 0.07, 0.08) |
| $E$/(N·m$^{-3}$) | (1.9,2,2.1)×10$^{11}$ | $\rho$/(kg·m$^{-3}$) | (7.79, 7.8, 7.81)×10$^3$ |

考虑模糊参数 $l_1$,$l_2$,$l_3$,$h_1$,$h_2$,$h_3$,$E$ 和 $\rho$ 约束条件下无阻尼振动系统的固有频率 $\omega$ 的范围. 由模糊参数 Taylor 级数展开法所求得的频率 $\omega_1$ 和 $\omega_4$ 的取值范围如图 3、图 4 所示.

从图 3、图 4 中可以看出固有频率的上下界的距离都不大,且当模糊参数在一定范围变化时,结构的固有频率也必然在一定范围内变化,而且随着结构参数模糊程度的增加,其频率的变化范围相应的变大.

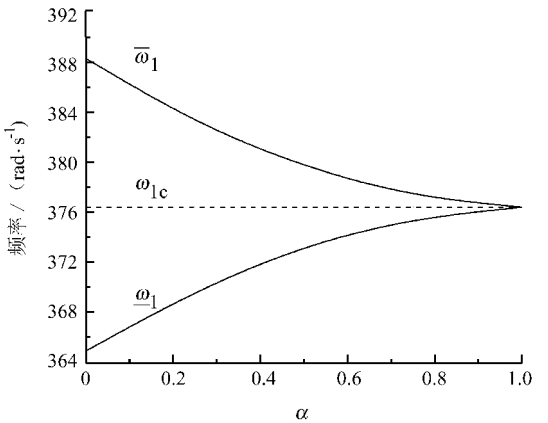


图 3　变截面悬臂梁 $\omega_1$ 的上下界

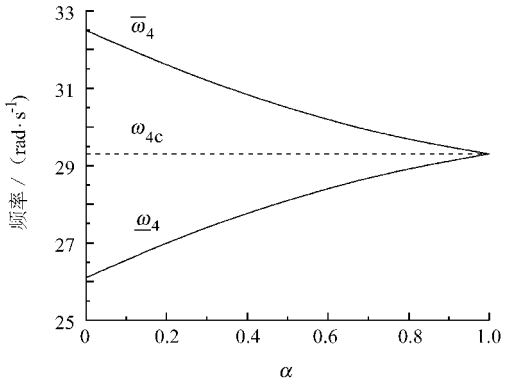


图 4 变截面悬臂梁 $\omega_4$ 的上下界

## 5 结 论

在实际工程中,由于问题的复杂性,可得到的数据信息常存在一定的模糊性,将传统的有限元方法和模糊理论相结合,是计算模糊结构响应的有效途径,计算的关键在于模糊有限元平衡方程的求解. 本文用模糊变量表达结构参量的不确定性,基于区间运算和区间有限元理论,提出了模糊有限元无阻尼振动方程的求解方法——模糊参数 Taylor 级数展开法. 本文方法在结构的模糊参数已知的情况下,都能计算出结构固有频率或特征值的变化范围,从而可以为进一步的结构模糊可靠性评估奠定基础. 数值算例表明本文所提方法易于编程计算,实用且有效.

## 参考文献（**References**）

[1] Elishakoff I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from A. M. Freudenthal's criticisms to modern convex modeling[J]. Computers and Structures, 1995, 56(6): 871 ~ 895

[2] Rao S S, Sawyer J P. A fuzzy element approach for the analysis of imprecisely-defined system[J]. AIAA, 1995, 33(12): 2364 ~ 2370

[3] Chen L, Rao S S. Fuzzy finite-element approach for the vibration analysis of imprecisely-defined system[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 1997, 27: 69 ~ 83

[4] Valliappan S, Pham T. Fuzzy finite element analysis of a foundation on an elastic soil medium[J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1993, 17(11): 771 ~ 789

[5] Wang G Y, Ou J P. Theory of fuzzy random vibration with fuzzy parameters[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1990, 36: 103 ~ 112

[6] 郭书祥, 吕震宙, 冯立富. 模糊运算和模糊有限元静力控制方程的求解[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(9): 936 ~ 942
Guo Shuxiang, Lü Zhenzhou, Feng Lifu. Fuzzy arithmetic and solving of the static governing equations of fuzzy finite element method[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2002, 23(9): 936 ~ 942(in Chinese)

[7] 禹智涛, 吕恩琳, 王彩华. 结构模糊有限元平衡方程的一种解法[J]. 重庆大学学报(自然科学版), 1996, 19(1): 53 ~ 58
Yu Zhitao, Lü Enlin, Wang Caihua. A method of solving the structural fuzzy[J]. Journal of Chongqing University (Natural Science Edition), 1996, 19(1): 53 ~ 58 (in Chinese)

[8] 邱志平. 不确定参数结构静力响应和特征值问题的区间分析方法[D]. 长春:吉林工业大学应用力学系, 1994
Qiu Zhiping. Interval analysis for static response and eigenvalues problem of structures with uncertain parameters[D]. Changchun: Department of Applied Mechanics. Jilin University of Technology, 1994(in Chinese)

[9] Qiu Z P, Wang X J. Comparison of dynamic response of structures with uncertain-but-bounded parameters using non-probabilistic interval analysis method and probabilistic approach[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(20): 5423 ~ 5439

[10] 邱志平, 王晓军, 马 一. 不确定结构复特征值问题的区间 Taylor 级数方法[A]. 固体力学会议论文集[C]. 北京, 2003. 1 ~ 6
Qiu Zhiping, Wang Xiaojun, Ma Yi. Interval Taylor series method for complex eigenvalues of structures with uncertain parameters[A]. Solid Mechanics Conference[C]. Beijing, 2003. 1 ~ 6(in Chinese)

[11] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8: 338 ~ 353