一种新的频域自适应算法

蒲晓霖 李景文

(北京航空航天大学 电子信息工程学院, 北京 100083)

摘 要: 分析了现有自适应滤波算法,并且提出了在有色噪声背景下能够快速收敛的频域自适应新算法. 使用牛顿法搜索性能表面和近似于递归最小二乘(RLS)算法的结构,利用现有的拟牛顿 QN(Quasi-Newton)时域自适应算法原理,通过快速傅里叶变换(FFT)将其应用于频域. 结合快速块最小均方自适应滤波算法 FBLMS(Fast Block Least Mean Square)中的并行处理方法对算法的运算过程进行了改进. 由于调整了数据格式和增益矩阵的系数加快了迭代过程的收敛,并且提高了信号处理的效率. 附加的计算机仿真结果分别给出了在白噪声和有色噪声输入相同汉明窗条件下,新算法、LMS 算法和拟牛顿算法 QN 的自适应系统辨识的效果比较图,表明新算法能有效用于色噪声下的自适应滤波.

关 键 词: 自适应滤波; 自适应系统; 快速傅里叶变换; 递归方程

中图分类号: TN 957

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2005)12-1347-04

New frequency domain adaptive filtering algorithm

Pu Xiaolin Li Jingwen

(School of Electronics and Information Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: After analyzing existing adaptive algorithms, a new frequency adaptive algorithm was proposed which can achieve faster convergence speed under the color noise background. It uses the Newton-type algorithm searching the performance surface and uses the similar structure of recursive least-squares (RLS) adaptive filtering algorithm. The time domain quasi-Newton adaptive algorithm to the frequency domain was applied by using fast fourier transform (FFT), and the whole calculating duration according to the parallel method using in fast block least mean square(FBLMS) adaptive filtering algorithm. Because of changing the format of the input signal and the coefficients of the gain-matrix, the speed of the recursive procession convergence and the efficiency of the signal procession were increased. Additive computer simulation results present the comparison of the adaptive system identify effect after using LMS algorithm, QN algorithm and the new algorithm respectively, which is separately passed the same hamming window with the white noise and color noise inputs. The results indicate the new algorithm can be efficiently applied to adaptive filtering with color noise.

Key words: adaptive filters; adaptive systems; fast Fourier transform; recursive functions

频域自适应算法是基于快速傅里叶变换(FFT)和反快速傅里叶变换(IFFT),旨在通过将输入信号变换到频率域之后针对其特点完成性能表面寻优的自适应算法. 通常的频域自适应算法都是源于最小均方(LMS)算法[1,2]的快速块最小均方(FBLMS)算法[1,3~5]. 但因为 LMS 算法自身是采用最速下降梯度搜索法[1,2],所以导致 FBLMS 算法的寻优过程相对缓慢. 相对于最速下降法,牛顿梯度搜索法[6]能够在很多种性能表面上快速地收敛到最佳值,只是由于它需要相当准

收稿日期: 2004-09-27

作者简介: 蒲晓霖(1980-),男,陕西安康人,硕士生, puxl@haier-ic.com.

确的输入信号的先验知识,因而在实际中往往不常使用. 如果能够采用类似于 RLS 算法[1,2]的迭代方式将前次的结果作为先验知识,再应用牛顿法搜索性能表面,则能在保证收敛的前提下大大提高收敛速度. 本文将按照这个思路,提出一种新的应用于频域的自适应算法.

1 QN 算法

QN 自适应滤波算法[2,5](Quasi-Newton Adaptive Filtering Algorithm)是一种拟牛顿搜索法的自适应算法. 它借用了前次迭代的相关矩阵的结果作为当前输入的先验知识. 进而使用牛顿法来迭代计算权值及相关矩阵,并且估计调整收敛系数,从而保证了自适应过程的收敛和稳定.

下面给出 QN 算法的主要结论,其详细的算法表述请参阅相关文献.

设 k 时刻输入信号为 $\boldsymbol{X}_k=[x_{k1}\ x_{k2}\cdots x_{kN}]^{\mathrm{T}}$,同一时刻的期待响应为 d_k,权向量为 $\boldsymbol{A}_k=[a_{k1}\quad a_{k2}\quad\cdots\quad a_{kN}]^{\mathrm{T}}$,三者确定的性能表面 ξ_k 为

$$\xi_k=|\varepsilon_k|^2 \tag{1}$$

其中先验输出误差:

$$\varepsilon_k=d_k-\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_k \tag{2}$$

后面的计算中还要用到后验输出误差为

$$\varepsilon'_k=d_k-\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_k \tag{3}$$

QN 算法的权向量迭代式可以表示为

$$\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}_{k-1}+2\mu_k\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk-1}^{-1}\varepsilon_k\boldsymbol{X}_k^* \tag{4}$$

式中,μ_k 是自适应增益系数;$\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk-1}^{-1}$ 是输入向量 $\boldsymbol{X}_{k-1}$ 的相关矩阵逆矩阵估计;其迭代关系式为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk}^{-1}=\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk-1}^{-1}+\frac{[\Delta\boldsymbol{A}_k-\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk-1}^{-1}\boldsymbol{C}_k][\Delta\boldsymbol{A}_k-\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk-1}^{-1}\boldsymbol{C}_k]^{\mathrm{H}}}{[\Delta\boldsymbol{A}_k-\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk-1}^{-1}\boldsymbol{C}_k]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_k^*} \tag{5}$$

其中

$$\Delta\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{A}_{k-1} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C}_k=-2(\varepsilon'_k-\varepsilon_k)\boldsymbol{X}_k^* \tag{7}$$

令

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{X0}^{-1}=\alpha\boldsymbol{I} \tag{8}$$

式中,α 为大于零的常数. μ_k 修正是通过对 $|\varepsilon'_k|^2$ 求导并令导数为零得到,即

$$\mu_k=\frac{1}{2[\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk-1}^{-1}\boldsymbol{X}_k^*]} \tag{9}$$

本文针对这种应用于时域的算法,利用 FFT 和 FBLMS 运算迅速的特点对其加以改造并应用于频域滤波,就提出一种新的频域自适应算法,称之为频域块拟牛顿算法 FBQN(Frequency Block Quasi-Newton Adaptive Filtering Algorithm). 通过计算机仿真结果可以看到这种算法的优越性.

2 FBQN 算法

设期待响应为 $\boldsymbol{d}_k=(d_{k1}\quad d_{k2}\quad\cdots\quad d_{kN})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{S}_k$ 和 $\boldsymbol{D}_k$ 分别是 $\boldsymbol{X}_k$ 和 $\boldsymbol{d}_k$ 的离散傅里叶变换(DFT)形式. 另外重新定义频域内权向量为 $\boldsymbol{W}_k=(w_{k1}\ w_{k2}\quad\cdots\quad w_{kN})^{\mathrm{T}}$,输出 $\boldsymbol{Y}_k$ 以及 2 个变换矩阵:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}&=\boldsymbol{F}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{F}^{-1}\\ \boldsymbol{T}_{\mathrm{L}}&=\boldsymbol{F}\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{F}^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}$ 称为前向变换阵;$\boldsymbol{T}_{\mathrm{L}}$ 成为后向变换阵,由于期待响应向量化之后物理量的计算都成为矩阵运算,采用式(10)可以清楚展现各个量之间的关系. 其具体含义将在算法推导完毕之后予以进一步说明. 其中,$\boldsymbol{F}$ 是 $N\times N$ 维的 FFT 矩阵,$\boldsymbol{F}^{-1}$ 是 $N\times N$ 维的逆离散傅里叶变换(IFFT)矩阵,且 $\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{F}^*/N$,由 FFT 的正交性易证二者互为逆矩阵. $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Pi}$ 称为对角窗矩阵. 算法采用与 FBLMS 类似的结构框图,如图 1 所示.

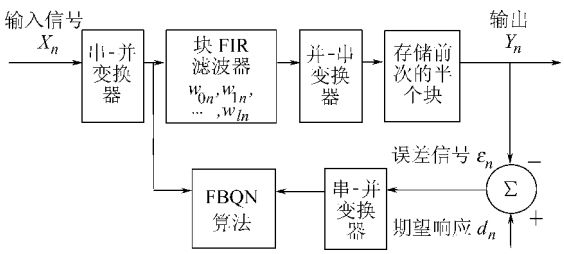

图 1 FBQN 算法框图

FBQN 算法同样使用了 QN 算法中通过“先验输出误差”来定义性能表面,更新相关矩阵的时候利用“后验输出误差”的方法. 其不同之处则是把原来的单个数据处理扩展为向量的并行处理. 性能表面定义为

$$\psi_k=\boldsymbol{E}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{E}_k \tag{11}$$

其中误差向量:

$$\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{T}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{D}_k-\tilde{\boldsymbol{S}}_k\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}\boldsymbol{W}_{k-1}) \tag{12}$$

以上所有矩阵上方的波纹表示将原向量的元素放到对角线上的对角阵(下同). 式(12)中使用了前一次得到的权向量结果. 而后验输出误差则是使用第 k 次迭代完成之后得到的权向量计算误差,即

$$\boldsymbol{E}'_k=\boldsymbol{T}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{D}_k-\tilde{\boldsymbol{S}}_k\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}\boldsymbol{W}_k) \tag{13}$$

梯度估计向量是

$$\boldsymbol{G}_k=-2\tilde{\boldsymbol{S}}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{E}_k \tag{14}$$

$$\boldsymbol{G}'_k=-2\tilde{\boldsymbol{S}}_k^{\mathrm{H}}\boldsymbol{E}'_k \tag{15}$$

因为定义了与 QN 算法相同的性能表面,因此 FBQN 算法的迭代式同样可以表示为

$$\boldsymbol{W}_k=\boldsymbol{W}_{k-1}-\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}\tilde{\boldsymbol{M}}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1}\boldsymbol{G}_k \tag{16}$$

式中,$\tilde{\boldsymbol{M}}_k$ 是时变对角阵,称为自适应增益系数矩

阵;$\hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1}$是频域输入 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{k-1}$的相关矩阵逆矩阵估计. 式(5)是根据最优化理论[7]得出,与时频域范围无关,又 $\hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1}$与 $\hat{\boldsymbol{R}}_{Xk-1}^{-1}$的定义相近,故采用相同的迭代关系式来求 $\hat{\boldsymbol{R}}_{Sk}^{-1}$,即

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{Sk}^{-1} = \hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1} + \frac{[\Delta \boldsymbol{W}_k - \hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1}\Delta \boldsymbol{G}_k][\Delta \boldsymbol{W}_k - \hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1}\Delta \boldsymbol{G}_k]^{\mathrm{H}}}{[\Delta \boldsymbol{W}_k - \hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1}\Delta \boldsymbol{G}_k]^{\mathrm{T}}\Delta \boldsymbol{G}_k^{*}} \tag{17}$$

其中

$$\Delta \boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{W}_k - \boldsymbol{W}_{k-1} \tag{18}$$

$$\Delta \boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{G}'_k - \boldsymbol{G}_k \tag{19}$$

令

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{S0}^{-1} = \delta \boldsymbol{I} \tag{20}$$

式中,δ 为常数,且 $\delta>0$. $\tilde{\boldsymbol{M}}_k$的修正若按照式(9)对 $\boldsymbol{E}'^{\mathrm{H}}_k\boldsymbol{E}'_k$ 求导并令导数为零将得到:

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_k = \frac{1}{2}[\boldsymbol{T}_{\mathrm{L}}\tilde{\boldsymbol{S}}_k\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}\hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_k^{\mathrm{H}}]^{-1} \tag{21}$$

当 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Pi}$ 都为单位阵的时候,则 FBQN 算法与 QN 算法在表述上没有区别,只是将信号变换到频率域中运算而已. 但是由于在频率域内的乘法运算将导致时域内的卷积运算,而数字信号又将产生循环卷积,使得运算量增大[8]. 因此,为了保证时域卷积的线性,要让输入的 $\boldsymbol{X}_k$ 和 $\boldsymbol{d}_k$ 每$\frac{N}{2}$个样本就更新一次. 故此时定义对角窗矩阵[5,9]为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{\Pi} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式(22)是频域块处理的一个重要特点. 可以明显看出 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}$ 和 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{L}}$ 的含义:$\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}$ 表示对 IFFT 之后的向量取其前$\frac{N}{2}$个元素进行 FFT 运算,故称为前向变换矩阵;$\boldsymbol{T}_{\mathrm{L}}$ 则表示反变换之后取最后$\frac{N}{2}$个元素进行正变换. 由于转换矩阵的奇异性,将导致相关矩阵奇异,故要得到 $\tilde{\boldsymbol{M}}_k$ 将计算广义逆.

为了避免产生上述复杂的计算,可以采用 FBLMS 算法中利用跨频率柜(bin)作为系数的方法来补偿平均信号功率的变化[2],即令

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_k = \mathrm{diag}(\cdots \quad P_{i,k}^{-1} \quad \cdots)\Big|_{i=1}^{N} = \mathrm{diag}(\cdots \quad (\gamma P_{i,(k-1)} + (1-\gamma)|s_{i,k}|^2)^{-1} \quad \cdots)\Big|_{i=1}^{N} \tag{23}$$

式中,P_i 是第 i 个频率柜的平均功率估计;$s_{i,k}$是 $\tilde{\boldsymbol{S}}_k$ 对角线上的第 i 个元素;γ 是一个常数,且 $0<\gamma<1$. 当 $0<(1-\gamma)\ll 1$ 时,式(23)可以近似表示为

$$\tilde{\boldsymbol{M}}_k \approx \mathrm{diag}(\cdots \quad P_{i,k-1}^{-1} \quad \cdots)\Big|_{i=1}^{N} + \beta\mathrm{diag}(\cdots \quad (|s_{i,k}|^2)^{-1} \quad \cdots)\Big|_{i=1}^{N} = \tilde{\boldsymbol{M}}_{k-1} + \beta\mathrm{diag}^{-1}(\cdots \quad |s_{i,k}|^2 \quad \cdots)\Big|_{i=1}^{N} = \tilde{\boldsymbol{M}}_{k-1} + \beta(\tilde{\boldsymbol{S}}_k^{\mathrm{H}}\tilde{\boldsymbol{S}}_k)^{-1} \tag{24}$$

式中,β 称为 FBQN 算法的遗忘因子,且 $0<\beta\ll 1$,$\tilde{\boldsymbol{M}}_0 = \beta\boldsymbol{I}$. 则式(15)就相应变为

$$\boldsymbol{W}_k = \boldsymbol{W}_{k-1} - \alpha\boldsymbol{T}_{\mathrm{F}}\tilde{\boldsymbol{M}}_k\hat{\boldsymbol{R}}_{Sk-1}^{-1}\boldsymbol{G}_{k-1} \tag{25}$$

式中,α 为收敛因子,且 $0<\alpha\ll 1$.

3　仿真结果

将对比时域 LMS 算法、RLS 算法、QN 算法和 FBQN 算法. 期望响应为输入通过一个 34 阶低通汉明窗函数之后形成的信号,输入信号分别采用白噪声信号和一个有色信号,其中有色信号是将白噪声通过另一个用 MATLAB 设计的窄带低通滤波器产生的. 自适应滤波器定为 32 阶. 图 2 和图 3 分别给出了 3 种算法下自适应滤波器的冲击响应和汉明窗的冲击响应之间的最小均方误差 E_{nee}[8]. 一般地,可以将其表示为

$$E_{\mathrm{nee}} = \frac{\int_{\omega=0}^{\omega=\pi}|F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) - A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\mathrm{d}\omega}{\int_{\omega=0}^{\omega=\pi}|F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\mathrm{d}\omega} \tag{26}$$

式中,$F(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$为被控系统的冲击响应;$A(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$为自适应滤波器的冲击响应.

通过 2 个实验结果可以看出:无论在白噪声输入还是色噪声输入的情况下,FBQN 算法拥有比 LMS 算法和 RLS 算法快得多的收敛速度,并且其 E_{nee}明显最小. QN 算法的收敛速度也相对较快,但是波动较大. 这也说明了 FBQN 算法有很好的稳定性. 当然,对于 FBQN 算法依然有很多有待继续考虑的地方. 可以看到计算量比较大的是式

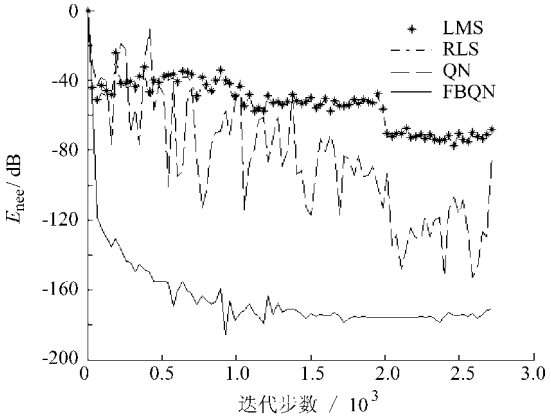

图 2　白噪声输入下的系统辨识 E_{nee}

(12)、式(13)、式(17),因为它们有的涉及 FFT/IFFT 运算,有的则是矩阵乘除运算. 因此如何简化现有的算法仍是该算法应用于实际的关键所在.

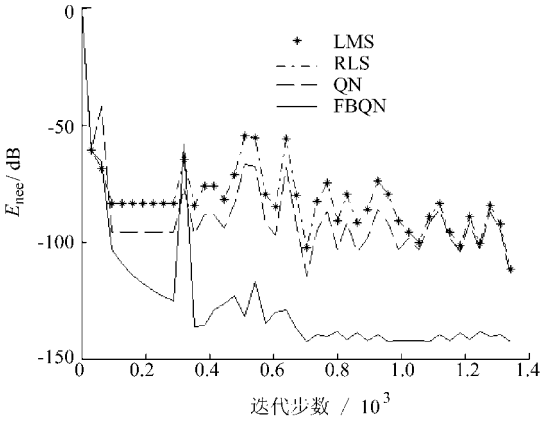

图 3 有色噪声输入下的系统辨识 E_{nee}

4 结束语

本文提出的 FBQN 算法在处理白噪声输入和有色噪声输入时都能够获得很快的收敛速度和较高的稳定性,因此更能适合处理实际问题的需要. 当然,由于这种算法需要重复进行 FFT/IFFT 以及迭代运算,算法结构要比 LMS 算法和 RLS 算法更加复杂,但其计算量在大块数据处理时仍比后两者少得多.

参考文献 (**References**)

[1] Haykin S. Adaptive filter theory [M]. 4th ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2002

[2] 沈福民. 自适应信号处理[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2001
Shen Fumin. Adaptive signal processing[M]. Xi'an: Xi'an Electronics Technology University Publishing House, 2001 (in Chinese)

[3] Ferrara E R. Fast implementation of LMS adaptive filters[J]. IEEE Trans ASSP-28, 1980,4:474 ~ 475

[4] Mikhael W B, Spanias A S. A fast frequency-domain adaptive algorithm[J]. IEEE, 1988, 76: 80 ~ 82

[5] Mikhael W B, Wu F H. Fast algorithms for block FIR adaptive digital filtering[A]. Proc IEEE Trans CAS-34[C]. 1987. 1152

[6] Marcello L R de Campos, Antoniou A. A new quasi-Newton adaptive filtering algorithm[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, 1997,44(11):924 ~ 934

[7] Fletcher R. Practical methods of optimization[M]. 2nd ed. New York: Wiley, 1987

[8] Orfanidis S J. Introduction to signal processing[M]. Photocopy ed. Beijing: Tsinghua University Publishing House, 1998

[9] Deisher M E, Spanias A S. Adaptive noise cancellation using fast optimum block algorithms[J]. IEEE International Symposium,1991,1:698 ~ 701