Hermite 算法的收敛性分析及其改进

王瑞秋 边永梅

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院, 北京 100083) (安徽理工大学 机械工程系, 淮南 232001)

陈五一

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院, 北京 100083)

摘 要: 为了提高多点切触加工算法的计算效率,对其中的 Hermite 算法进行了改进,并且对改进后的 Hermite 算法的收敛性进行了理论分析,推导了改进后算法的局部收敛条件,同时给出算法的 Steffensen 加速迭代公式并新提出了一种基于试算的待定系数迭代法. 分析和实例表明,改进后的 Hermite 算法属于线性收敛的算法,而待定系数迭代法则有接近二阶的收敛速度. 综合应用上述算法,可以满足一般性自由曲面多点切触加工刀位计算的要求.

关 键 词: 数值方法收敛性; 算法; 刀具控制; 加工; 计算机辅助制造; 迭代方法

中图分类号: TH 112

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2006)02-0239-05

Hermite method convergence analyses and improvement

Wang Ruiqiu

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Bian Yongmei

(Department of Mechanical Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China)

Chen Wuyi

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: To make multi-points tangent contact machining have higher computational efficiency, an improved algorithm based on Hermite method was proposed. Theoretical analyses were given on the convergence of the improved algorithm, and the constraints for local convergence of the new algorithm were also derived. Then the formula of steffensen accelerated iterative method was applied on the algorithm. Another novel algorithm called iterative method of undetermined coefficient based on trial method was developed. The results show that the improved algorithm based on Hermite method acts as a linear convergence method, while the iterative method of undetermined coefficient algorithm has the same convergence speed with square convergence method approximately. Then it can meet the demand for the tool path generating computation of general sculpture surface by combining all the above-mentioned algorithms applied on them.

Key words: convergence of numerical methods; algorithms; cutting tools control; machining; computer aided manufacturing; iterative methods

收稿日期: 2004-11-22

基金项目: 中国航空第一集团创新基金资助项目(CX03007)

作者简介: 王瑞秋(1981-),男,安徽淮北人,博士生, wrq _ work@126. com.

多点切触加工算法是从上个世纪90年代中期发展而来的一种新型的数控加工算法. 多点切触加工中刀具和工件有两个切触点,从而比单一切触点的传统数控加工算法更能使刀具和工件紧密接触. 在多点切触加工中,最根本的思想是采用了数值迭代计算而不是用微分几何计算刀位和控制加工误差. 因此多点切触加工能够得到较宽的加工带宽,但是它同时也存在计算耗时较长、效率较低的缺点. 为了得到在加工误差允许下的最大加工带宽,Hermite 算法[1] 采用 Hermite 插值原理推导了数值迭代求解刀位的算法. 本文对 Hermite 算法进行了改进,并对改进后的 Hermite 算法的收敛性进行了分析,给出了其 Steffensen 加速迭代公式,最后提出了一种基于试算的待定系数迭代算法,给出了相应的计算实例,对于一般平缓曲面的多点切触加工刀位的数值计算,可以运用上述理论成果,得到一些快速、有效的迭代收敛算法.

1 多点切触加工中加工带宽控制

多点切触加工中,刀具和工件有两个切触点: $P_1(u_1,v_1)$、$P_2(u_2,v_2)$,它们除了需要满足一定的约束条件以外,还要使两个切触点之间刀具和工件的加工误差控制在加工误差带范围之内. 两个切触点之间的刀具和工件的最大欠切误差 $E_{\max}$ 和两个切触点之间的距离密切相关. 对于较为平坦的开敞曲面,两个切触点之间的距离可以近似用两点的参数插值圆半径 ρ 代替;同时最大欠切误差 $E_{\max}$ 随着 ρ 的增大而增大. 为了获得允许加工误差下的最大加工带宽,使最大欠切误差 $E_{\max}$ 等于允许加工误差 e 是多点切触加工中加工带宽控制的基本原则. 而在一定条件下,$E_{\max}$ 是 ρ 的单调函数,故可以定义函数方程

$$F(\rho) = E_{\max}(\rho) - e = 0 \qquad (1)$$

函数方程的解 $\rho=\rho^*$,即参数差值圆半径取得最佳值时,$E_{\max}(\rho^*)=e$,此时根据多点切触加工约束求得的刀位就是多点加工算法可以获得的没有过切误差,且有最大加工带宽的刀位.

2 Hermite 算法的改进和分析

2.1 Hermite 算法的改进

在多点切触加工中,刀具和工件之间的加工误差沿着圆环面刀具的环心圆方向近似呈"W"状,Hermite 算法利用这一特性,采用了 Hermite 插值函数估计当前刀位的加工误差,并且进一步用迭代循环计算得到优化刀位时的参数差值圆半径 ρ^*. 为了讨论算法的收敛性,本文将之归纳为解函数方程(1)数值方法中的一种.

对于迭代过程中的任意确定的一个刀位,为了求解迭代过程中方程(1)的最大欠切误差 $E_{\max}$,通常采用对圆环面刀具进行离散的方法求解. 由于圆环面刀具本身的特性,刀具上任意一点到工件曲面的最短距离线总是通过该点对应的环心圆上的点. 将环心圆进行离散成一系列点,对于每一点可以求该点到工件曲面的最短距离线,这些最短距离线和刀具的圆环面有很多交点. 这些交点到工件曲面的那部分最短距离线就可以看作当前刀位在沿着刀具圆环方向的加工误差. 而且,这些交点和被离散的圆环环心圆上的点一一对应,它们可以用对应环心圆上点的弧长或者圆心角参数表示. 显然刀具上的两个切触点是属于这些最短距离线和刀具圆环面的交点中的两个. 通过 Hermite 算法的分析,可以得到如下的迭代计算过程:

$$\rho(k+1) = \frac{2(t^*(k) - t_1(k))}{(t_2(k) - t_1(k))} \cdot \left(\frac{e}{E_{\max}(k)}\right)^{1/4} \cdot \rho(k) \qquad k = 0,1,2,\cdots \quad (2)$$

其中,$t_1(k)$ 和 $t_2(k)$ 是迭代过程中的刀具上两个切触点对应的环心圆的圆心角参数(通常可以取 $t_1(k)=0$);$t^*(k)$ 为最大欠切误差刀具上点对应的环心圆的圆心角参数. 迭代循环的终止条件为 $\left|\frac{E_{\max}(\rho(k))-e}{e}\right|<\varepsilon$,$E_{\max}(\rho(k))$ 为刀具和工件的最大欠切误差. 在设定刀具几何形状和当前刀位的第一切触点的情况下,t^* 和 $E_{\max}$ 只与当前迭代循环中的 $\rho(k)$ 有关. 从函数的观点上看,可以定义函数 $\varphi_1(\rho)=\frac{2(t^*-t_1)}{(t_2-t_1)}$ 和 $\varphi_2(\rho)=\left(\frac{e}{E_{\max}}\right)^{1/4}$,并且定义迭代函数 $\varphi(\rho)=\varphi_1(\rho)\varphi_2(\rho)\cdot\rho$,则迭代过程式(2)可以转变成为

$$\rho(k+1) = \varphi(\rho(k)) \qquad (3)$$

这正是用不动点迭代法计算非线性方程(1)的求解公式.

在实际的求解过程中,通过迭代公式(2)求解函数方程(1)时,在 ε 值较小时($\varepsilon<0.01$),运用 Matlab 计算的实例很难达到收敛要求. 多点加工算法中,对于每次迭代过程,当前刀位的加工误差 E 沿着刀具的环心圆圆心角参数 t 可以用 Hermite 插值公式表示

$$E(t) = \frac{E^4(\xi)}{4!}(t-t_1)^2(t-t_2)^2 + O(t-t_1)^5 \qquad (4)$$

其中 $t_1<\xi<t_2$,通过对上式和实际运算实例[2]进行分析,当 $E(t^*)=E_{\max}$ 时,即有 $t^*\approx\frac{t_2+t_1}{2}$. 从而有迭代函数 $\varphi_1(\rho)\equiv1$,$\varphi(\rho)=\varphi_2(\rho)\rho$;迭代公式(2)简化成

$$\rho(k+1)=\left(\frac{e}{E_{\max}(\rho(k))}\right)^{1/4}\cdot\rho(k)$$
$$k=0,1,2,\cdots \tag{5}$$

这就是改进后的 Hermite 迭代算法. 通过计算实例发现,当 ε 取值较小的时候($\varepsilon<0.01$),迭代公式(5)比迭代公式(2)能更好地收敛到 ρ^*.

2.2　改进后的 Hermite 算法的收敛性分析

由于多点切触加工的对象为开敞平缓曲面,因此函数 $\varphi(\rho)=\varphi_2(\rho)\rho=\left(\frac{e}{E_{\max}}\right)^{1/4}\rho$ 是关于 ρ 的连续函数,同时对于不动点迭代,根据不动点迭代原理[3],要保证迭代循环式(5)收敛于不动点 ρ^*,必须要求 $|\varphi(\rho^*)|<1$;当 $0<|\varphi(\rho^*)|<1$ 时,式(5)改进的 Hermite 算法是线性收敛的,当 $\varphi(\rho^*)=0$ 时,算法是超线性收敛的. 对于整个曲面来说,很难保证在每一个刀位点都有 $\varphi(\rho^*)=0$,因此总体来说改进后的 Hermite 算法是一种线性收敛的算法.

$$\varphi'(\rho)=\left(\frac{e}{E_{\max}(\rho)}\right)^{1/4}-\frac{\rho}{4}\left(\frac{e}{E_{\max}(\rho)}\right)^{-3/4}\cdot\frac{e}{(E_{\max}(\rho))^2}\cdot E'_{\max}(\rho) \tag{6}$$

在上式中代入 $\rho=\rho^*$,同时注意到 $E_{\max}(\rho^*)=e$,由此可以得到迭代函数在不动点 ρ^* 处的导数

$$\varphi'(\rho^*)=1-\frac{\rho^*}{4\cdot e}\cdot E'_{\max}(\rho^*) \tag{7}$$

在一般的数控加工刀位计算的过程中,最大欠切误差 $E_{\max}$ 随着参数插值圆半径 ρ 的增大而增大,因此总有 $E'_{\max}(\rho)>0$,故 $\varphi'(\rho^*)<1$,又由于 $\varphi'(\rho^*)>-1$,可以得到采用改进后的 Hermite 循环迭代算法计算 ρ^* 的局部收敛的条件

$$\rho^*\cdot E'_{\max}(\rho^*)<8\cdot e \tag{8}$$

同时可以发现,要使迭代循环式(5)很快收敛到不动点 ρ^*,则 $\varphi(\rho^*)\approx0$,从而得到

$$\rho^*\cdot E'_{\max}(\rho^*)\approx4\cdot e \tag{9}$$

对于确定的一个刀位点来说,设置不同的加工精度,e 值是不同的,而不同的 e 可以得到不同的参数差值圆半径 ρ^*,可以假设它们之间存在函数 $\rho^*(e)$. 为了保证改进后的 Hermite 算法在选择不同的 e 值时候仍然可以局部收敛于不动点. 这样通过式(7),可以得到在当前刀位点时,改进后 Hermite 迭代循环收敛性分析函数 $\varphi'(\rho^*(e))$.

$$\varphi'(\rho^*(e))=1-\frac{\rho^*(e)}{4\cdot e}\cdot E'_{\max}(\rho^*(e)) \tag{10}$$

如果对于不同的加工允许误差 e,都有 $|\varphi'(\rho^*(e))|<1$,则在整体上,用改进的 Hermite 算法计算当前刀位时迭代收敛,而且函数曲线越接近于 0 值,算法的收敛性越好.

2.3　Hermite 算法的 Steffensen 迭代加速

由以上的分析可以得到,Hermite 算法总体上是一种线性收敛的算法,同时为了保证 Hermite 算法局部收敛,必须要求 $\rho^*\cdot E'_{\max}(\rho^*)<8\cdot e$,为了提高迭代算法的收敛速度,放宽收敛条件,可以 Hermite 算法采用 Aitken 加速收敛技术或者称为 Steffensen 加速迭代的方法.

对于不动点迭代函数 $\rho=\varphi(\rho)$ 和迭代公式 $\rho(k+1)=\varphi(\rho(k))$,如果记 $\alpha(k)=\varphi(\rho(k))$,$\beta(k)=\varphi(\alpha(k))$,$k=0,1,2,\cdots$,则有如下的 Steffensen 加速迭代方法

$$\left.\begin{aligned}&\alpha(k)=\varphi(\rho(k))\\&\beta(k)=\varphi(\alpha(k))\\&\rho(k+1)=\rho(k)-\frac{(\alpha(k)-\rho(k))^2}{\beta(k)-2\alpha(k)+\rho(k)}\end{aligned}\right\}$$
$$k=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

理论证明 Steffensen 迭代加速技术的局部收敛条件,仅仅要求 $\varphi(\rho^*)\neq1$,而且即使 $\varphi'(\rho^*)\neq0$,且 $\varphi''(\rho)$ 存在并在 ρ^* 的邻域内连续,则迭代公式(11)是二阶收敛的,并且其收敛极限和迭代公式 $\rho(k+1)=\varphi(\rho(k))$ 收敛极限相同[3].

从式(6)中得到,对改进后的 Hermeite 算法采用 Steffensen 加速,迭代公式(11)的局部收敛条件仅仅是 $E'_{\max}(\rho^*)\neq0$,这种情况除非特殊曲面,在多点切触加工曲面的刀位计算中,基本上不可能发生. 通常情况下,对于开敞平缓曲面,在使用多点切触加工算法计算刀位时,对于当前刀位点的初始迭代值 $\rho_i(0)$,可以选择上一个刀位的最终解 ρ^*_{i-1},可以使当前迭代过程中满足迭代值 $\rho_i(k)$ 始终处于函数方程(1)的解 ρ^* 的领域,因此采用 Hermite 算法 Steffensen 加速技术的多点切触加工算法基本上都是收敛的.

2.4　实例验证计算

为了验证上述结论,下面将通过多点切触加工的实例,设加工曲面和文献[4]中多点切触加工曲面相同,曲面为三次 Beizer 曲面,曲面的顶点坐标可以由表 1 获得.

表1 Bezier曲面的控制顶点的z坐标值 mm

y	x			
	−60	−30	30	60
60	60	0	0	45
30	25	20	10	55
−30	60	5	5	30
−60	45	5	−10	5

设定允许加工误差 $e=0.02$ mm,取圆环刀具的环心圆半径 $R=10$ mm,圆环的小圆半径 $r=3$ mm,取第一个切触点为 $P_1(u_1,v_1)$ 曲面上参数为 $u_1=0.7$、$v_1=0.4$ 点,取初始的迭代值 $\rho(0)=0.02$,采用 Matlab 编程计算. 当通过式(2)所示迭代算法计算两个切触点 P_1 和 P_2 之间的参数插值圆半径 ρ^* 时,当采用文献[1]中的 Hermite 算法时,取迭代终止条件:$\left|\frac{E_{\max}(\rho(k))-e}{e}\right|<\varepsilon=0.01$ 时,迭代过程已经不能收敛了. 当取迭代终止条件 $\varepsilon=1.0\times10^{-8}$ 时,采用本文中改进的 Hermite 迭代公式(5),得到收敛结果 $\rho^*=0.081\ 42$,耗时为 99.954 s;采用 Steffensen 加速以后的迭代公式,耗时为 80.556 s;采用文献[6]提到的割线法求解(收敛速度为 1.618),耗时为 79.504 s. 可以看出改进以后的 Hermite 迭代公式(5)的收敛速度较快,采用 Steffensen 迭代加速的效果不明显(速度只提高了 20%),根据文献[3]中对 Steffensen 加速迭代的讨论,改进以后的 Hermite 算法的迭代收敛速度很高.

为了进一步考察在此时 Hermite 算法的收敛性,需要得到当前刀位的 $E_{\max}(\rho)$ 和 $\varphi'(\rho^*(e))$ 的曲线,采用离散的办法,设 $\rho\in(0\quad 0.1]$,把(0 0.1]区间等分成 20 份,对于其中的每一个 ρ,计算此时采用多点切触加工算法的刀位,同时计算刀具和工件之间的最大过切误差 $E_{\max}(\rho)$. 得到的最大过切误差随着参数插值圆半径 ρ 变化的曲线如图 1 所示. $E_{\max}(\rho)$ 是一个单调增曲线,因此对于方程(1)来说,只要 e 取值正确(推荐 $e\in[0.002\quad 0.1]$),总是可以得到一个单一的解 ρ^*.

为了进一步的考察改进后的 Hermite 算法总体的收敛性,采用同样的离散的方法得到如图 2 所示的迭代收敛性分析函数曲线 $\varphi'(\rho^*(e))$. 通过图中所示可以看到,当 e 取值合理时,在整体上改进后的 Hermite 算法的收敛性分析函数 $|\varphi'(\rho^*)|<1$,而且总体上 $\varphi'(\rho^*)$ 非常接近于 0,这说明虽然改进后的 Hermite 算法是一阶收敛的,但是由于迭代函数在不动点附近的一阶导数非常小,因此算法仍然有很高的收敛速度.

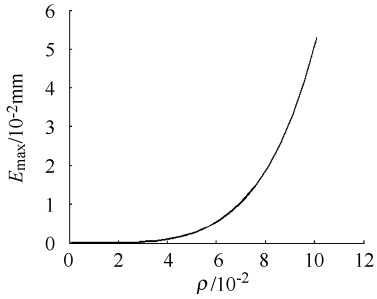


图1 最大过切误差 $E_{\max}$ 随着参数差值圆半径 ρ 变化的曲线

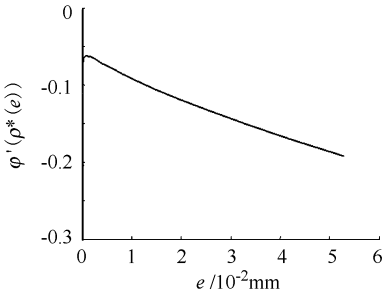


图2 迭代循环式(4)的收敛性分析函数 $\varphi'(\rho^*(e))$

3 待定系数的收敛算法

把改进后的 Hermite 迭代公式(4),进行进一步的改进,设 q 为待定系数,可以假设有如下的迭代公式:

$$\rho(k+1)=\left(\frac{e}{E_{\max}(k)}\right)^q\cdot\rho(k)\qquad k=0,1,2,\cdots \tag{12}$$

对于计算当前($u_1=0.7$,$v_1=0.4$)刀位点的时候,给定一个允许加工误差 e,为了使迭代公式(12)能够更快地收敛到 ρ^*,令

$$\varphi'_1(\rho^*)=1-q\cdot\frac{\rho^*}{e}\cdot E'_{\max}(\rho^*)=0 \tag{13}$$

在上面的实例计算中,$u_1=0.7$,$v_1=0.4$,$e=0.01$ mm 得到 $\rho^*=0.069\ 34$,$E'_{\max}(\rho^*)=0.629\ 9$,从而得到 $q=0.229\ 0$,代入到迭代公式(12),采用初值 $\rho(0)=0.07$,取迭代终止条件:$\varepsilon=1.0\times10^{-8}$,可以得到相同的 ρ^*,所需的迭代时间为 53.449 s,而采用迭代公式(5),所需的迭代时间为 65.083 s,说明在这种情况下,迭代公式(12)比迭代公式(5)有一定的改进,当 e 值稍大的时候,从图 2 看 $\varphi'(\rho^*(e))$ 稍微偏零值更大一些;相应地,采用待定系数的收敛算法更快一些.

在实际的刀位计算中,当采用相同的允许加工误差时,每个刀位的 ρ^* 是未知的,而且不同的刀位 $E_{\max}(\rho)$、$\varphi'(\rho^*(e))$ 曲线各不相同. 为了降低数控加工中刀位计算所需的迭代时间,需要取测试点进行试算. 对于比较平缓的开敞曲面,所有

的刀位点的 ρ^* 值变化量很小,如果测试点 ρ^* 附近的 Hermite 迭代函数导数远离零点,可以对所有的测试点用待定系数法求解迭代公式(11)的系数 q,取其平均值,然后用迭代公式(11),计算整个曲面的刀位;如果曲面的曲率变化较大,采用改进后的 Hermite 迭代或者待定系数迭代法,不能处处收敛,或者收敛的速度较慢,此时应当引入 Steffensen 加速技术对改进后的 Hermite 算法或者待定系数迭代法,进行迭代加速,这样一般平坦曲面的多点切触加工刀位的收敛计算都可以实现.

4　结 束 语

本文对多点切触加工的 Hermite 算法进行了改进,并且对改进后的 Hermite 算法的收敛性进行了分析,从理论上阐述了改进后的 Hermite 算法属于线性收敛算法,给出了算法的局部收敛条件. 为了进一步提高算法的收敛速度、扩展局部收敛条件,提出了采用 Steffensen 加速迭代技术进一步完善 Hermite 算法. 文中给出了改进后 Hermite 算法的实例,计算表明,改进后的 Hermite 算法在实例中具有很高的收敛速度. 文章最后,提出了待定系数的迭代收敛算法,在试算的基础上,可以得到近似于二阶的收敛速度,当采用 Hermite 算法的收敛性不高,或者不能收敛时,可以采用待定系数的收敛算法,或者它们与 Steffensen 迭代加速结合的方法解决.

参考文献 (**References**)

[1] Max Engeli, Jorg Waldvogel, Thomas Schnider. Method for processing work pieces by removing material [P]. United States Patent: US 6,485,236,2002-11-26

[2] Wang Ruiqiu, Chen Wuyi. Application of the hermite method on tool path generation [A]. In: Chen Wuyi, Yamane Yasuo, Fan Rui, *et al*, eds. Proceedings of the Seventh International Conference on Progress of Machining Technology[C]. Beijing: Avitation Industry Press, 2004. 943 ~ 948

[3] 封建湖,车刚明,聂玉峰. 数值分析原理 [M]. 北京:科学出版社,2001. 185 ~ 198
Feng Jianhu, Che Gangming, Nie Yufeng. The principle of numerical method analysis [M]. Beijing: Science Press, 2001. 185 ~ 198(in Chinese)

[4] Warkentin A, Ismail F, Bedi S. Multi-point tool positioning strategy for 5-axis machining of sculptured surfaces [J]. Computer Aid Geometric Design, 2000,17: 83 ~ 100

(上接第 223 页)

[9] Agawal R, Aggarwal C, Prased V, *et al*. Depth first generation of long patterns[A]. In: Proceedings of the 6th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining[C]. Boston, 2000. 108 ~ 118

[10] Giannella C, Han J, Pei J, *et al*. Mining frequent patterns in data streams at multiple time granularities[A]. In: Kargupta H, Joshi A, K Sivakumar, *et al*, eds. Proceedings of the NSF Workshop on Next Generation Data Mining[C]. AAAI/MIT, 2003

[11] Grahne G, Zhu Jianfei. High performance mining of maximal frequent itemsets[A]. In: Proceedings of the 6th SIAM International Workshop on High Performance Data Mining [C]. San Francisco, 2003. 311 ~ 337

[12] 颜跃进, 李舟军, 陈火旺. 基于 FP-Tree 有效挖掘最大频繁项集[J]. 软件学报, 2004, 16(2):215 ~ 222
Yan Yuejin, Li Zhoujun, Chen Huowang. Efficiently mining of maximal frequent item sets based on FP-Tree [J]. Journal of Software, 2005, 16(2):215 ~ 222(in Chinese)

[13] Rymon R. Search through systematic set enumeration[A]. In: Proceedings of the 3rd International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning [C]. Cambridge, 1992. 268 ~ 275

[14] Kohavi R, Brodley C, Frasca B, *et al*. KDD-cup 2000 organizer's report: peeling the onion [J]. SIGKDD Explorations, 2000, 2(2):86 ~ 98