基于自相关函数的自然纹理图像分形维数的估计

王 华 王 祁 孙金玮
(哈尔滨工业大学 自动化测试与控制系, 哈尔滨 150001)

摘 要: 提出了一种估计分形维数的新方法,并利用该方法估计自然纹理图像的分形维数. 分形维数是描述图像粗糙程度的主要参数. 将分数布朗运动推广到离散情况,研究离散高斯噪声的自相关函数的性质. 根据自相关函数的性质,获得估计分形维数的自相关函数方法. 合成分形图像和自然纹理图像被用来检验该方法的准确性,并与计盒方法进行了比较,结果显示自相关法是准确的和有效的.

关 键 词: 自相关函数; 分形维数; 分数布朗运动; 自然纹理
中图分类号: TP 391
文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2004)08-0718-05

Auto-correlation function based estimation of the fractal dimension of natural texture images

Wang Hua Wang Qi Sun Jinwei
(Dept. of Automatic Measurement and Control, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: A novel method for estimating the fractal dimension has been proposed and the method has been applied to estimate the fractal dimension in natural texture images. Fractal dimension is an important parameter to characterize roughness in an image. Extending the basic theory of fractional Brownian motion to the discrete case, the characteristics of auto-correlation function of fractional Gauss noise has been studied. Based on the characteristics, an auto-correlation function method is obtained to estimate fractal dimension. Both synthesis images of fractal and natural texture images are used to test the proposed method. The method is compared with the box-counting method and the results show that the auto-correlation function method is accurate and efficient.

Key words: autocorrelation functions; fractal dimension; fractional Brownian motion; natural texture

纹理是自然物体表面的重要特征之一. 在图像中,纹理被定义为图像像素灰度值间的空间关系. 纹理描述和分析已经应用到了如自然景物描述、卫星和遥感图像识别以及生物医学图像的分析等诸多领域. 在近几十年里,提出了许多自然纹理的描述方法,如灰度差分法、灰度共生矩阵法、功率谱法、纹理能量法等[1,2]. 根据自然纹理的分形特征,应用分形维数描述和分析纹理图像的方法也被提出[3~6].

分形的概念是 Mandelbrot[7,8] 提出的,其定义是 Hausdorff-Besicovich 维数严格大于拓扑维数的数学集合. 分形维数是分形理论中重要的参数之一. 分形维数被用来描述曲线或曲面的粗糙程度. Pentland[3] 研究了应用三维分形模型对纹理图像实现分割和分类的频域方法,并证明了分形表面的图像仍是分形的,反之亦然. 在估计分形维数的方法中,计盒方法是普遍应用的方法. 计盒方法是由 Gangepain 和 Roques-Carmes[9] 提出的, Voss[10] 利用 incorporating probability 理论对该方法进行改进. 在该方法的基础上, Sarkar 和 Chaudhuri[11,12] 提出了差分计盒方法.

本文基于分数布朗运动理论及其离散形式,

收稿日期: 2003-05-26
作者简介: 王 华(1975-),男,黑龙江讷河人,讲师, hitwh@hit.edu.cn.

研究离散高斯噪声的自相关函数与距离的关系,在此基础上,提出了利用最小二乘拟合估计 Hurst 系数 H,然后根据 $2-H$(曲线)或 $3-H$(曲面)求得分形维数方法. Lundahl[13,14] 等人和 Wen[15] 等人分别在空间域和频率域应用离散高斯噪声的自相关函数,采用最大似然估计的方法估计分形维数. 由于最大似然函数估计不是显式的,求得最大值需要采用数值搜索的方法,这增加了维数估计的复杂性. 本文还讨论了将自相关函数方法分别用于估计合成分形图像和自然纹理的分形维数的结果,比较了该方法与计盒方法在估计合成和自然纹理分形维数的准确性和拟合误差等方面的差异.

1　理　论

1.1　分数布朗运动模型

布朗运动是植物学家 R. 布朗在 1827 年发现悬浮在液体里的微小颗粒不规则的轨道运动,这种运动被解释为微粒间分子碰撞的结果. 1923 年,Wiener 对布朗运动提出了严格的数学模型. Mandelbrot 在 1968 年对布朗运动进行推广,提出分数布朗运动的概念[16],其定义如下.

在某概率空间上,指数为 $H(0<H<1)$ 的随机过程 X,满足:

1) 以概率 1 有 $X(0)=0$,且 $X(t)$ 为 t 的连续函数;

2) 对任何 $t\geqslant 0$ 和 $\Delta r>0$,增量 $X(t+\Delta r)-X(t)$ 服从均值是零,方差是 Δr^{2H} 的正态分布,所以

$$P(X(t+\Delta r)-X(t)\leqslant x)=(2\pi)^{\frac{1}{2}}(\Delta r)^{-H}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(\frac{-u^2}{2(\Delta r)^{2H}}\right)\mathrm{d}u \quad (1)$$

由式(1)可知,增量 $X(t+\Delta r)-X(t)$ 是稳定的,它的方差与 Δr^{2H} 成比例,即:

$$E[X(t+\Delta r)-X(t)]^2\propto\Delta r^{2H} \quad (2)$$

其中 H 叫做 Hurst 系数,当 $H=1/2$ 时,就是典型布朗运动的情形.

Falconer[17] 已经证明 Hurst 系数为 H 的分数布朗运动曲线的分形维数是 $2-H$,曲面的分形维数是 $3-H$. 所以纹理图像的分形维数估计可以通过估计 H 得到.

1.2　离散分数高斯噪声及其自相关函数

在离散情况下,设 $B(n)$ 和 $B(n-m)$ 分别是 n,$n-m$ 时刻的离散值,则离散分数高斯噪声定义为

$$I_m(n)=B(n)-B(n-m) \quad (3)$$

则根据式(2),可以得到:

$$E[B(n)-B(n-m)]^2=c[n-(n-m)]^{2H} \quad (4)$$

其中 c 为常数. 将式(3)代入式(4),得:

$$E[I_m(n)]^2=c[n-(n-m)]^{2H}=cm^{2H} \quad (5)$$

由于 $I_m(n)$ 服从均值为 0,方差为 σ^2m^{2H} 的平稳随机过程,则在式(5)中,若取 $m=1$,

$$E[I(n)]^2=c(1)^{2H}=c \quad (6)$$

又因为离散分数高斯噪声的方差 $\sigma^2=E[I(n)]^2$,所以式(6)可以写为

$$c=\sigma^2 \qquad 当\ m=1 \quad (7)$$

下面讨论 Hurst 系数 H 与离散分数高斯噪声的关系. 设 $R_m(n+k,n)$ 为自相关函数,则:

$$R_m(n+k,n)=E[I_m(n+k)I_m(n)] \quad (8)$$

将式(8)右边的式子展开,并整理可得[18]:

$$R_m(n+k,n)=\frac{\sigma^2}{2}[(k+m)^{2H}-2k^{2H}+(k-m)^{2H}] \quad (9)$$

观察式(9),可以发现式中自相关函数 $R_m(n+k,n)$ 与 n 无关,这是因为离散分数高斯噪声是平稳的,即与位置无关,而与两点距离 k 有关. 所以式(9)可以改写为

$$R_m(k)=\frac{\sigma^2}{2}[(k+m)^{2H}-2k^{2H}+(k-m)^{2H}] \quad (10)$$

1.3　自相关函数的计算

为了获得图像的自相关函数,先设图像大小为 $M\times M$,$B(i,j)$ 是图像在 (i,j) 位置处的像素值,其中 $1\leqslant i,j\leqslant M$,则距离为 m 的图像像素差值,即离散分数高斯噪声,可以通过计算各像素与其相邻的 4 个像素的平均值之差得到,具体如下式:

$$I_m(i,j)=B(i,j)-[B(i-m,j)+B(i+m,j)+B(i,j-m)+B(i,j+m)]/4 \quad (11)$$

为了进一步计算离散分数高斯噪声的自相关函数,首先将 $I_m(i,j)$ 与其 4 个相邻数值的平均值相乘,该步骤遍历整幅图像后,求出自相关函数的平均值,其计算公式如下:

$$R(m)=\frac{1}{M^2}\sum_{i,j=1}^{N(m)}[I_m(i,j)\times(I_m(i-m,j)+I_m(i+m,j)+I_m(i,j-m)+I_m(i,j+m))/4] \quad (12)$$

1.4　分形维数的估计

分析式(10)可见,离散分数高斯噪声的自相关函数 $R_m(k)$ 与 Hurst 系数 H 是非线性关系. 若设 $k=m$,则式(10)为

$$R(m)=\frac{\sigma^2}{2}[(2m)^{2H}-2m^{2H}]=\frac{\sigma^2}{2}(2^{2H}-2)m^{2H} \quad (13)$$

式(13)对于 H 仍为非线性的. 若取 $m=1$,则根据式(13),可得:

$$R(1)=\frac{\sigma^2}{2}(2^{2H}-2) \tag{14}$$

将式(14)代入式(13),得:

$$R(m)=R(1)m^{2H} \tag{15}$$

式(15)两边同取对数,并整理可得:

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{R(m)}{R(1)}\right)=H\cdot\log(m) \tag{16}$$

由式(16)可知,可以通过计算不同 m 和对应的 $\frac{R(m)}{R(1)}$的对数的最小二乘拟和,其斜率就是 H,而分形维数从 2-H(曲线)或 3-H(曲面)得到.

2 实验及讨论

2.1 实验图像

在实验中,用一组不同维数的合成图像和含 16 种自然纹理图像,对利用自相关函数法估计的分形维数进行验证. 合成的分形图像采用 Kaplan[19] 的方法合成,合成图像的分形维数分别是 2.1,2.2,…,2.9,即维数间隔 0.1,共选取 2.1 ~ 2.9 维中的 9 个维数. 而每相同维数又用不同的随机种子合成 9 幅图像,图像大小为 256×256. 则合成 9×9 共 81 幅分形图像. 图 1 是在相同随机种子下,合成的 9 幅不同维数的分形图像. 实验所用的自然纹理图像均取自 Brodatz 纹理集[20],如图 2 所示,为了实验和讨论方便,16 种纹理图像被依次编号. 每幅纹理图像大小为 384×384 像素,灰度级为 256. 在每幅图像中,间隔 64 像素提取 256×256 大小的图像,共 9 幅,则用于实验的自然纹理图像共计 144 幅.

为了不失一般性,合成的 81 幅分形图像和 144 幅自然纹理图像,在计算分形维数时,按下式将灰度值归一化到[0,1]区间:

$$B(i,j)=G(i,j)\cdot\frac{0.5}{\max|G(i,j)|}+0.5 \tag{17}$$

其中 $G(i,j)$ 为原图像像素灰度值;$B(i,j)$ 为归一化后的值;运算 max|·| 为取绝对值最大.

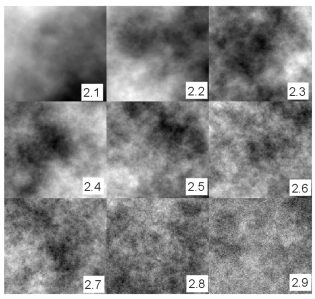


图 1 合成的不同维数分形图像

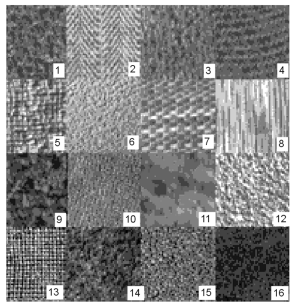


图 2 用于实验的 16 幅自然纹理图像

2.2 分形维数的估计及讨论

在利用合成图像和图 2 的自然纹理图像进行维数估计,应用式(11)和式(12)分别计算不同距离 m 时 $R(m)$,这里取 $m=1,2,\cdots,7$,即用 7 组数据进行直线拟合,求得斜率即为 Hurst 系数. 若设 $y=kx+c$ 为最小二乘拟合后的直线,则 y_m 对应为 $\frac{1}{2}\log\left(\frac{R(m)}{R(1)}\right)$,$x_m$ 对应为 $\log(m)$,拟合直线的斜率 k 即为 Hurst 系数. 根据式(16)可知,若为理想情况,拟合直线的截距 c 应为 0,但实际拟合时 c 并不会为 0,这是因为实际图像并不是理想分形的,或不完全符合分数布朗运动模型. 为了评价自相关函数法求得分形维数的准确性,还采用计盒维数方法[12]分别对上述两组图像计算分形维数. 并对利用自相关法和计盒维数法求得的拟合直线按下式计算拟合误差 E:

$$E=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{(kx_i+c-y_i)^2}{1+m^2}}}{m} \tag{18}$$

根据 E 可以评价拟合的效果,如果 E 的数值越小,则拟合的效果越好,从而说明求得的分形维数更能准确地描述图像的粗糙程度.

图 3 显示了用自相关法和计盒维数法估计合成图像分形维数的结果. 图中每个估计点都是 9 幅估计维数的平均值,这 9 幅图像是在相同分形维数下,用不同随机种子合成的. 从图中可以看出,应用自相关法估计的分形维数与理想维数非常接近,而采用计盒法估计的维数与理想维数相差很大,并且分形维数越高,误差也越大. 在维数是 2.9 时,估计的维数只为 2.54. 两种方法估计的实际维数与理想维数的差如图 4 所示. 图 4 还显示了两种方法在不同理想维数时差值的最大值、最小值和标准差. 从图 4 可以发现,自相关函数法不但估计的维数值与理想维数差距小,其估计误差与计盒方法比也要小,并且差值在不同维

数下基本保持不变的,这不同于计盒方法在高维时维数差值增大的现象. 同时分析维数差值的最大、最小值和标准差也可以发现,应用自相关法其估计的维数变化小,数值相对集中.

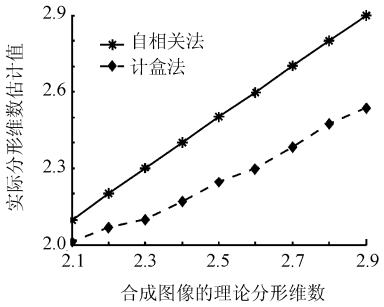


图 3　用自相关法和计盒维数估计合成图像的分形维数

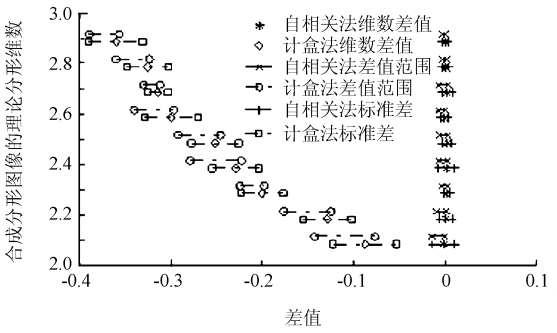
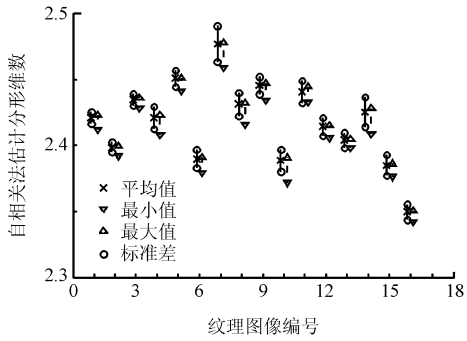


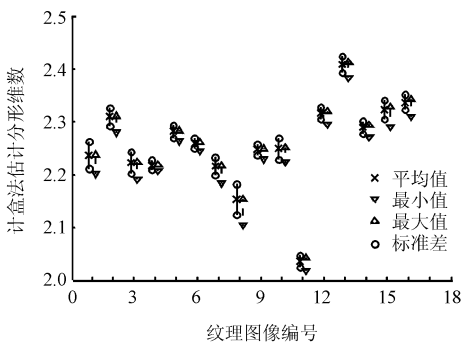
图 4　自相关法和计盒维数法估计的分形维数与理论维数的差值,差值最大、最小值和标准差

图 5 显示了两种方法估计 Hurst 系数 H 时采用最小二乘拟合方法后拟合误差的曲线. 观察图 5 可以看出,计盒方法的拟合误差都大于自相关法. 相同维数时,自相关法的拟合误差的标准差也小于计盒法的标准差. 图 5 说明自相关法拟合的效果要好于计盒方法的拟合效果.

为了进一步分析自相关法在实际纹理图像的估计效果,图 6a 显示了 16 种纹理图像自相关法估计的分形维数,图 6b 显示的是计盒法估计的分形维数. 每种纹理图像都被重叠地取出 9 幅 256×256 大小的图像,分别计算分形维数. 图 6a 和图 6b 的维数都是 9 幅相同纹理图像维数的平均值. 比较图 6a 和图 6b 可以得出,自相关法对纹理维数的估计普遍高于计盒法. 但分析图 7 可知,采用自相关法的拟合误差小于计盒法的拟合误差. 这说明自相关法估计的分形维数更能反映自然纹理实际维数.



a　自相关法



b　计盒法

图 6　两种维数估计方法估计 16 种自然纹理图像的分形维数

3　结　论

本文提出的自相关函数的分形维数的估计方法,基于离散高斯噪声自相关函数在 $k=m$ 时,如式(13)至式(16)所述,自相关函数与 $m(=k)$ 存在对数线性关系的特征,采用最小二乘的方法获

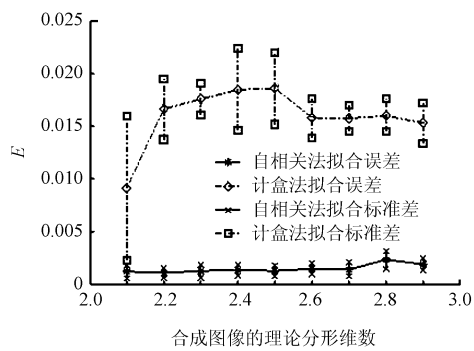


图 5　两种估计方法的拟合误差及误差的标准差

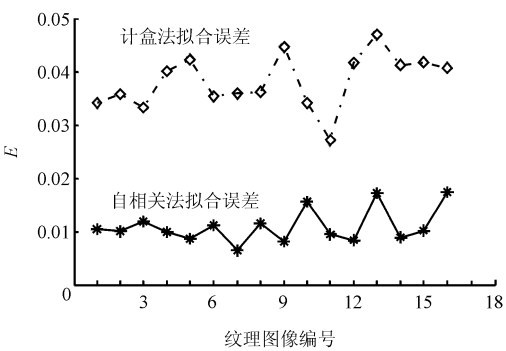


图 7　16 种自然纹理图像拟合误差

得拟合直线的斜率,该斜率即为 Hurst 系数,然后 $3-H$ 求得图像的分形维数. 81 幅合成图像被用来检测该估计方法的准确性. 与普遍应用的计盒方法比较可得,该方法求得的分形维数能够覆盖图像维数范围,如图 3 所示. 直线拟合误差被用来衡量拟合的优劣. 如图 5 所示,自相关方法的拟合效果优于计盒方法. 这说明基于离散高斯噪声自相关函数方法估计的分形维数能准确地描述分形图像的粗糙程度. 该结论同样在 16 种自然纹理图像分形维数估计种得到验证.

参考文献 (**References**)

[1] Haralick R M. Statistical and structural approaches to texture [J]. Proceedings of the IEEE, 1979, 67(5):786 ~ 804

[2] Laws K I. Rapid texture identification[A]. SPIE,1980. 276 ~ 380

[3] Pentland P. Fractal based description of natural scenes[J]. IEEE Transactions on Pattern analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6):661 ~ 674

[4] Chaudhuri B B, Nirupam Sarkar. Texture segmentation using fractal dimension[J]. IEEE Transactions on Pattern analysis and Machine Intelligence, 1995,17(1):72 ~ 77

[5] Aura Conci, Claudia Belmiro Proenca. A fractal image analysis system for fabric inspection based on a box-counting method[J]. Computer Networks and ISDN Systems, 1998, 30(20-21):1887 ~ 1895

[6] 吴高洪,章毓晋,林行刚. 基于分形的自然纹理自相关描述和分类[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2000,40(3):90 ~ 93

Wu Gaohong, Zhang Yujin, Lin Xinggang. Fractal-based autocorrelation description and classification of natural texture images [J]. Journal of Tsinghua University(Science and Technology), 2000, 40(3):90 ~ 93(in Chinese)

[7] Mandelbrot B B. The fractal geometry of nature[M]. New York: Freeman&Co,1982

[8] Mandelbrot B B. Fractals: form, chance and dimension[M]. New York:Freeman&Co, 1977

[9] Gangepain J J, Roques-Carmes C. Fractal approach to two dimensional and three dimensional surface roughness[J]. Wear, 1986,109:119 ~ 126

[10] Voss R. Random fractals: characterization and measurement [M]. In: Pynn R, Skjeltop A, eds. Scaling Phenomena in Disordered Systems, Plenum, New York, 1985

[11] Sarkar H, Chaudhuri B B. An efficient approach to estimate fractal dimension of texture images[J]. Pattern Recognition, 1992,25(9):1035 ~ 1041

[12] Sarkar H, Chaudhuri B B. An efficient differential box-counting fractal dimension of textural images[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1994,24(1):115 ~ 120

[13] Lundahl T, Ohley W J, Kay S M, *et al*. Fractional Brownian motion: a maximum likelihood estimator and its application to image texture[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1986,5(3):152 ~ 161

[14] Lundahl T, Ohley W J, Kay S M, *et al*. Texture analysis of diagnostic xray images by use of fractals[A]. SPIE Visual Communications and Image Processing[C]. 1986,707:23 ~ 30

[15] Wen C Y, Acharya R. Self-similar texture characterization using a Fourier-domain maximum likelihood estimation method [J]. Pattern Recognition Letters, 1998,19:735 ~ 739

[16] Mandelbrot B B, Ness J W Van. Fractional Brownian Motions, fractional noises and applications[J]. SIAM Rev, 1968,10(4):422 ~ 437

[17] [英]肯尼思·法尔科内. 分形几何——数学基础及其应用[M]. 曾文曲,刘世耀,戴连贵,等译. 沈阳:东北大学出版社, 2001

Falconer K. Fractal geometry: Mathematical foundations and applications[M]. Translated by Zeng Wenqu, Liu Shiyue, Dai Liangui, *et al*. Shen Yang:North East University Press, 2001 (in Chinese)

[18] Harsh Potlapalli, Ren C L. Fractal-based classification of natural textures[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1998,45(1):142 ~ 150

[19] Kaplan L M, Jay Kuo C C. An improved method for 2-D self-similar image synthesis[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998,5(5):754 ~ 761

[20] Brodatz P. Textures: A photographic album for artists and designer[M]. New York: Dover, 1966