Udimet 720 Li 高温变形特性的粘塑性本构建模研究

石多奇 杨晓光 王延荣
(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100083)

摘 要: 采用 Chaboche 统一粘塑性本构方程, 对 Udimet 720 Li 在 700℃时的单调拉伸、循环加载及蠕变特性等复杂的高温变形现象进行了建模研究. 探讨了 Chaboche 本构理论对这些变形现象进行建模的形式, 并特别针对快速各向同性软化和非对称循环加载时的平均应力松弛现象, 对 Chaboche 本构理论进行了修正和变化. 将经过修正的 Chaboche 本构理论, 与 Levenberg-Marquadt 非线性优化算法相结合, 编制了材料参数优化程序, 得到了材料参数值. 研究表明, 经过修正的 Chaboche 本构模型可较好地建模镍基高温合金 Udimet 720 Li 在高温下的各种变形行为.

关 键 词: 粘塑性; 本构方程; 循环棘轮; 平均应力松弛; 高温合金; 参数优化
中图分类号: TB 125; TH 132.3
文献标识码: A 文 章 编 号: 1001-5965(2004)08-0727-05

Visco-plastic constitutive modeling of inelastic deformation of Udimet 720 Li at high temperature

Shi Duoqi Yang Xiaoguang Wang Yanrong
(School of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The mechanical deformations of a Nickel-based superalloy Udimet 720 Li was modeled simultaneously by the Chaboche unified viscoplastic constitutive theory under tensile, cyclic and creep loading conditions at 700℃. To describing the phenomena of cyclic relaxation of mean stress under strain controlled cyclic loading and fast isotropic softening during unloading, the equations of internal variables of the theory were modified. A program code of parameter optimization was compiled with 1-dimentional Chaboche model by Levenberg-Marquadt nonlinear algorithm. A global strategy for model parameters optimization was proposed, which produced good results. The numerical simulations showed that this modified Chaboche model has sufficient capability of modeling various mechanical behaviors under complex loading conditions.

Key words: viscoplasticity; constitutive equations; ratchetting; cyclic relaxation of mean stress; superalloy; parameter optimization

现代航空发动机的热端部件, 在工作时经历着非常复杂的载荷工况, 而大量用于其中的镍基高温合金材料, 在发动机典型的载荷谱下, 除了呈现与时间不相关的非弹性变形, 如率相关的拉伸、对称循环硬化/软化及与时间相关的非弹性变形(蠕变)外, 在发动机的启动和停车过程中, 将出现多轴非比例及非等温的加载情况, 特别是在发动机典型的 0—max—0 的循环载荷下, 在转子叶片中将会出现控制应力条件下的 Ratchetting 现象(棘轮), 在涡轮盘、燃烧室和静子叶片中将会出现控制应变条件下的平均应力松弛现象, 这将极大地影响这些部件寿命预测的准确性. 而研究在复杂载荷下对高温合金材料力学行为的准确建模, 就成为开展这类结构强度寿命设计及分析的重要基础.

但是, 经典的弹塑性和蠕变理论已不能很好地模拟材料在这类载荷条件下的变形. 因此, 需要

收稿日期: 2003-05-06
基金项目: 欧盟 FP5 框架 E3E 中德 JET 项目(E01100302)
作者简介: 石多奇(1975-), 男, 内蒙古临河人, 博士生, shdq@buaa.edu.cn.

采用先进的本构理论. 目前一类基于内变量理论的粘塑性本构理论在这方面开始得到广泛的应用, 在针对高温材料方面, Chaboche[1,2], B-P[3~5]及Walker[6]型本构模型应用得最为广泛. 特别是Chaboche模型, 由于其理论所具有的层次结构, 采用A-F非线性硬化模型[7], 使得模型可针对从简单到复杂的力学现象进行剪裁, 使之能够适应很广泛的变形现象进行建模. 因此, 本文针对Udimet 720 Li材料在700℃时的实验结果, 开展了采用Chaboche统一型粘塑性本构方程同时对单调拉伸、循环加载及蠕变进行建模的研究; 特别是对控制应变下非对称循环的平均应力松弛现象, 采用Ohno/Wang修正形式[8,9]进行建模研究. 对于Udimet 720 Li所表现出的快速各向同性软化现象, 在建模时也给予了特别的考虑.

1 Chaboche粘塑性本构理论基本方程

有关Chaboche粘塑性本构理论的详细内容可参见文献[1]. 下面给出其理论的主要内容.

1) 非弹性(粘塑性)应变率

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = \frac{3}{2}\left\langle \frac{J(\sigma'_{ij} - X'_{ij}) - R - k_0}{K} \right\rangle^n \cdot \frac{\sigma'_{ij} - X'_{ij}}{J(\sigma'_{ij} - X'_{ij})} \tag{1}$$

此处, 变量上面加"·"表示对时间的导数(下同); $\langle u \rangle = uH(u)$, $H(u)$是Haviside函数($u \leqslant 0$, $H(u) = 0$; $u > 0, H(u) = 1$); K和n都是与温度有关的材料参数; $J(\sigma'_{ij} - X'_{ij})$取Mises形式, σ'_{ij}和X'_{ij}分别是σ_{ij}和X_{ij}的偏量; k_0是与加载速率相关的初始屈服应力; R是一个描述各向同性硬化的标量; X_{ij}是描述运动硬化的张量, 又称为背应力, 表示屈服中心的运动轨迹. 在Chaboche理论中, R和X即是内变量, 均为非弹性应变的函数, 有各自的演化方程.

2) 各向同性硬化变量R的演化方程

率形式的各向同性硬化演化方程为

$$\dot{R} = b(Q - R)\dot{p} + \gamma \left| Q_r - R \right|^{m-1}(Q_r - R) \tag{2}$$

其中 Q, Q_r, b, m, γ是材料参数; 累积非弹性应变率$\dot{p} = (2/3\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in})^{1/2}$. 方程(2)的右端第2项为热恢复项, 当不考虑热恢复时, R在稳态时达到渐近值Q; $Q + k_0$是屈服面尺寸的渐近值. 如果不能忽略热恢复, R达到稳态时, 其渐近值在Q和Q_r之间. 方程(2)通过R随着p增加而增加或减少的变化, 描述了循环硬化或软化现象. 根据Chaboche理论, 若材料有塑性应变记忆效应, Q和Q_r可为塑性应变范围的函数[1].

3) 运动硬化变量X_{ij}的演化方程

$$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3}c a \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - c X_{ij}\dot{p} - \beta \left| J(X_{ij}) \right|^{r-1} X_{ij} \tag{3}$$

c, a, β, r为材料常数. 方程(3)右端第1和第2项即为由Armstrong和Frederick提出的经典的A-F模型[7], 可用于描述材料单调加载时的应变硬化和循环加载时的硬化; 第3项为时间(热)恢复项, 可考虑高温热恢复, 常用于描述材料蠕变. 为了扩大模型的适用范围, 可以将运动硬化变量分为几个分量, 每个分量都遵从相同的演化规律. 通常2个运动硬化变量就可以很好地描述材料的变形. 这样, 总的运动硬化变量为

$$X_{ij} = \sum_{k=1}^{M} X_{ij}^k \tag{4}$$

对有些材料, 可以观察到在循环加载时屈服后的切线模量是增加的, 这可以通过引入某个函数$\Phi(p)$来描述这种现象[10]:

$$\Phi(p) = \Phi_s + (1 - \Phi_s)e^{-\varphi p} \tag{5}$$

参数Φ_s是与应变范围无关的常数. 显然, 切线模量的增加由小于1的Φ_s给出, 则方程(3)成为

$$\dot{X}_{ij}^k = \frac{2}{3}c_k a_k \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - c_k \Phi(p) X_{ij}^k \dot{p} - \beta_k \left| J(X_{ij}^k) \right|^{r_k - 1} X_{ij}^k \tag{6}$$

上述方程很容易退化到一维(单轴)情形, 此处不再赘述.

2 Udimet 720 Li高温变形特征本构建模

考虑到航空发动机涡轮盘的载荷工况, 在700℃下, 采用标准的试样, 对Udimet 720 Li材料进行了4种类型的高温单轴力学试验: ①率相关的单调拉伸试验, 应变率$\dot{\varepsilon} = 0.01/s, 0.001/s$; ②对称循环试验, $\dot{\varepsilon} = 0.001/s$, 应变范围$\Delta\varepsilon = \pm 0.8\%$, 以了解材料循环硬化特征; ③非对称循环试验, 0—max—0加载类型, $\varepsilon_{max} = 1.5\%$, $\dot{\varepsilon} = 0.001/s$, 以了解材料平均应力松弛特性; ④蠕变试验(载荷为700 MPa, 800 MPa). 试验结果如图1至图5所示. 据此, 采用Chaboche粘塑性本构理论对Udimet 720 Li材料的力学现象进行建模, 并且考虑到这些现象的不同和特殊性, 对理论进行适当修正.

2.1 单调拉伸特性的本构建模

材料的单调拉伸及率相关特性是材料最简单

也是最基础的性能, 可用简单形式的 Chaboche 理论加以描述. 通常可做如下假设: ①当$\dot{\varepsilon}>0.0001/s$ 时, 所有的热恢复效应可忽略; ②各向同性硬化应变 R 主要考虑循环加载时的循环硬化/软化现象, 因此对单调加载的现象可忽略; 基于同样的原因, $\Phi(p)$ 假设为 1; ③采用两个运动硬化变量. 因此, 简化的一维 Chaboche 粘塑性本构理论为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varepsilon}^{in} &= \left\langle\frac{|\sigma - X| - k_0}{K}\right\rangle^n \\ \dot{X}_i &= a_i c_i \dot{\varepsilon}^{in} - c_i X_i \dot{p} \qquad i = 1, 2\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

经过优化的材料参数见表 1. 此简化的方程可很好地建模材料的单调拉伸力学现象, 如图 1 所示.

表 **1**　仅建模单调拉伸的本构方程参数

a_1/MPa	c_1	a_2/MPa	c_2	K/MPa	n	k_0/MPa	E/MPa
150	1989	190	137	545	20.3	425	183405

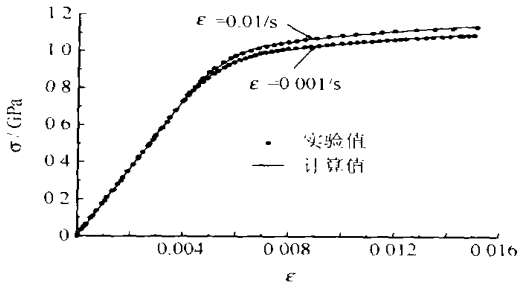


图 1　对不同拉伸应变率的单调拉伸模拟结果

2.2　快速各向同性软化现象的建模

Udimet 720 Li 材料在反向加载时显示出与一般镍基高温合金材料不同的力学现象, 即快速各向同性软化, 表现为反向屈服在正应力时就出现, 反向加载直线段远小于 2 倍 $\sigma_{0.2}$. 通常经典的弹塑性理论无法描述该现象, 即使粘塑性本构理论也不能直接建模该现象, 必需对其进行修正. 为了建模该力学现象, 唯一的办法是用各向同性变量 R. 由于快速各向同性软化出现较早, 所以 R 很快就会达到它的饱和值. 但是 R 的引入有可能使对拉伸曲线的建模变坏, 因而必须增加一个 X_3 以补偿 R 在拉伸时产生的效应, 为此可使 $b \approx c_3$ 和 $Q \approx -a_3$. 保持(7) 式不变, 引入一组成对出现的变量 R 和 X_3:

$$\left.\begin{aligned}\dot{R} &= b(Q - R)\dot{p} \\ \dot{X}_3 &= c_3(a_3 - X_3)\dot{\varepsilon}^{in}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由式(7)、式(8) 组成的 Chaboche 本构理论可很好地建模快速各向同性软化现象, 如图 2 所示. 经过整体优化的材料参数(表 2), 在加进 R 和 X_3 的参数后, 并没有破坏对单调拉伸的建模, 结果仍如图 1 所示.

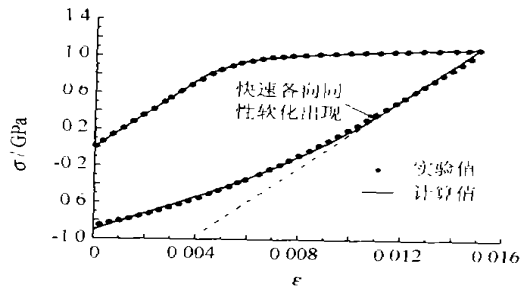


图 2　快速各向同性软化建模结果

2.3　对称循环下循环硬化现象的建模

循环硬化现象可由应力范围与循环次数的关系曲线($\Delta\sigma$-N) 来表示. 由于原 Chaboche 理论中用于建模循环硬化的 R 已用于建模快速各向同性软化, 因此, 只能采用 $\Phi(p)$ 来建模循环硬化现象, 这时的本构方程为

$$\dot{X}_{ij}^k = \frac{2}{3}c_k a_k \dot{\varepsilon}_{ij}^{in} - c_k \Phi(p) X_{ij}^k \dot{p}$$

$$k = 1, 2, 3 \tag{9}$$

$$\dot{R} = b(Q - R)\dot{p} \tag{10}$$

表 **2**　优化得到的本构方程参数

参数	a_1/MPa	c_1	a_2/MPa	c_2	K/MPa	n
数值	185	1709	158	86	545	20.3
参数	a_3/MPa	c_3	Q/MPa	b	k_0/MPa	E/MPa
数值	358	447	-341	527	425	183485

由于本构理论要考虑建模更多新的力学现象, 同时又不破坏已建模的力学现象, 需要对材料参数进行整体的优化以拟合所有的试验曲线, 这是一个十分复杂的工作. 本节对新加进的材料参数 Φ_s 和 b 进行优化, 这时固定表 2 的材料参数, 仅只拟合 $\Delta\sigma$-N 曲线以得到优化的参数 Φ_s 和 b. 但这时 Φ_s 和 b 的值有可能破坏了对单调拉伸曲线的模拟, 因此参数 a_1, a_2, c_1, c_2 要重新优化拟合单调拉伸曲线, 最后, 所有的参数 a_1, a_2, c_1, c_2, E, K, k_0, n, a_3, c_3, b, Q, Φ_s, ω 再重新优化来拟合单调拉伸、反向加载和 $\Delta\sigma$-N 实验曲线, 得到的参数值见表 3, 拟合的曲线见图 3. 同时该组参数并不破坏图 1 和图 2 对试验曲线的模拟.

表 **3**　优化曲线得到的材料参数

参数	a_1/MPa	c_1	a_2/MPa	c_2	K/MPa	n	Φ_s
数值	176	1626	65	225	545	20.3	0.685
参数	a_3/MPa	c_3	Q/MPa	b	k_0/MPa	ω	E/MPa
数值	398	397	-381	427	425	30	183485

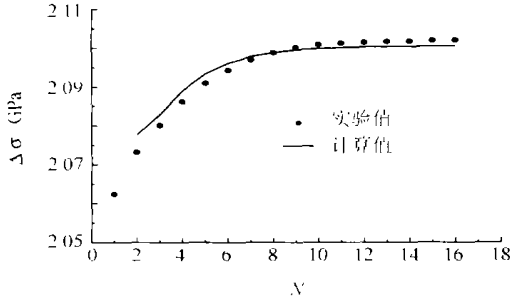


图3 循环硬化曲线建模结果

2.4 非对称循环下平均应力松弛现象的建模

在非对称循环加载下, 材料将表现附加的力学特性, 如在控制应力的 0—max—0 脉动循环加载下, 材料在高温下将明显表现有 Ratchetting 现象, 相对应的在控制应变的 0—max—0 脉动循环加载下, 材料将明显表现有平均应力松弛现象. 在 Chaboche 本构理论中, 当采用 A-F 非线性硬化模型来模拟这类现象时, 已有的研究已表明[2,8,9]: 该模型将过大地预测 Ratchetting 应变, 特别是单轴 Ratchetting 现象. 因为在这种类型的背应力演化方程中, 硬化和动态恢复是成比例变化的, 这就使得迟滞环不可能闭合; 由于迟滞环根本不会闭合, 随着载荷循环次数的增加, 累积的 Ratchetting 应变就会越来越大.

为了能够比较准确地描述 Ratchetting 现象, 已有很多改进的 A-F 模型; 其中, Ohno/Wang 修正被认为是比较成功的. 为了克服 A-F 模型会产生过多 Ratchetting 应变这样的缺陷, Ohno/Wang 假定当 X 接近其临界面 $f=0$ 时, $\boldsymbol{X}$ 的动态恢复项会具有明显的非线性特征[8,9]:

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{ij} = c\left(\frac{2}{3}a\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} - \left(\frac{J(\boldsymbol{X}_{ij})}{a}\right)^{m}\dot{p}\boldsymbol{X}_{ij}\right) \tag{11}$$

这里 f 和 $J(\boldsymbol{X})$ 分别被定义为

$$\left.\begin{aligned} f &= J(\boldsymbol{X}) - a^2 \\ J(\boldsymbol{X}) &= \frac{3}{2}\boldsymbol{X}:\boldsymbol{X} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

如果再考虑到切线模量和稳态恢复的影响, 则 $\boldsymbol{X}$ 各分量的演化方程可以写成:

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{k}_{ij} = \frac{2}{3}c_k a_k\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} - c_k\Phi(p)\,|\,\Phi(p)\cdot J(\boldsymbol{X}^{k}_{ij})/a_k\,|^{m_k}\boldsymbol{X}^{k}_{ij}\dot{p} \tag{13}$$

由于在控制应变的脉动循环加载下材料的平均应力松弛现象是与 Ratchetting 现象相对应的变形现象, 因此本文对平均应力松弛的建模采用式(13)的形式. 由于在 $\boldsymbol{X}_3$ 的演化方程也引入了 Ohno/Wang 的修正, 而它的出现是为了补偿在建模快速各向同性软化时引入的 R 对单调拉伸的影响, 因此 R 的演化方程也要进行修正, 即 R 的演化方程变为

$$\dot{R} = b(Q - |R/Q|^{m_3}R)\dot{p} \tag{14}$$

新引入的材料参数为 m_1, m_2, m_3, 平均应力松弛现象用平均应力与循环数的关系表示(σ_m-N 曲线). 用 m_1, m_2, m_3(初值为1)拟合 σ_m-N 曲线得到这些参数的优化值. 但是这样有可能破坏前面已模拟好的力学现象, 因此, 所有的材料参数要根据情况重新优化拟合各自对应的试验曲线. 然而实际的优化过程是很难的, 因为参数之间是相互关联和影响的. 所以, 需要对所有参数和所有类型的实验曲线进行整体优化以获得最优结果, 见表4. 平均应力松弛曲线的模拟结果见图4, 同时保证不破坏对其它曲线的模拟, 见图1~图3.

表4 **Udimet 720 Li 700**℃时 **Chaboche** 模型材料参数

模型参数	参 数 值
E, K, k_0/MPa	183485, 545, 425
a_1, a_2, a_3, Q/MPa	189, 59, 362, - 380
c_1, c_2, c_3, b	1613, 135, 445, 440
Φ_s, ω, m_1, m_2, m_3, n	0.77, 59, 0.0, 4.36, 13.3, 20.3

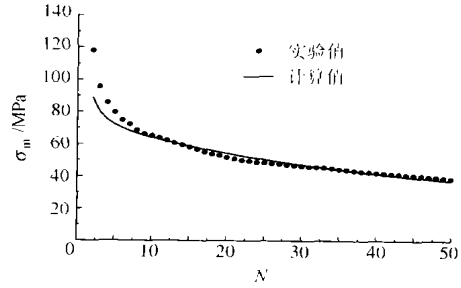


图4 平均应力松弛建模结果

2.5 蠕变现象建模

在内变量演化方程中增加热恢复项来建模蠕变现象, 如下式:

$$\dot{\boldsymbol{X}}^{k}_{ij} = \frac{2}{3}c_k a_k\dot{\varepsilon}^{in}_{ij} - c_k\Phi(p)\,|\,\Phi(p)\cdot J(\boldsymbol{X}^{k}_{ij})/a_k\,|^{m_k}\boldsymbol{X}^{k}_{ij}\dot{p} - \beta_k\,|J(\boldsymbol{X}^{k}_{ij})\,|^{r_k-1}\boldsymbol{X}^{k}_{ij} \tag{15}$$

这样, 又引入6个材料参数 r_1, r_2, r_3, β_1, β_2, β_3. 由于蠕变是长时间的变形效应, 因此这6个材料参数并不影响前面已建模的短时力学现象. 保持其它的材料参数值不变(表4所示), 优化 r_1, r_2, r_3, β_1, β_2, β_3 以拟合不同应力水平的蠕变实验曲线的第1和第2阶段, 所得参数如下: $\beta_1 = 1.0\times10^{-3}$, $\beta_2 = 5.0\times10^{-7}$, $\beta_3 = 2.0\times10^{-5}$, $r_1 = 1.37$, $r_2 = 3.1$, $r_3 = 1.8$. 模拟前10 h的蠕变试验曲线见图5.

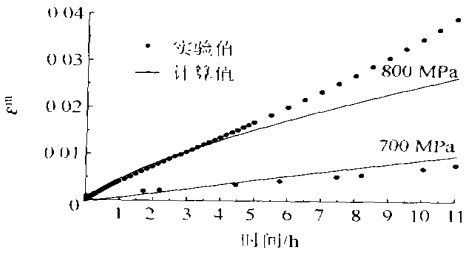


图 5　不同应力水平的蠕变实验建模结果

3　材料参数优化方法

如何利用本构方程成功地实现材料的变形模拟, 关键在于确定方程中的材料参数, 这需要充分利用和选择相应的实验数据来产生理想的结果. 因此, 本构方程的参数识别成为非线性优化问题.

对于 Chaboche 粘塑性本构理论来说, 其部分材料参数的初值可根据本构方程各内变量的意义, 从试验曲线上提取初值, 如 a_1, a_2, c_1, c_2, E, K, k_0, n, a_3, c_3, b, Q; 而某些参数的初值要根据经验和试算来定, 如 Φ_s, ω, r_1, r_2, r_3, β_1, β_2, β_3 及 m_1, m_2, m_3. 一般情况下, 各参数初值是根据各自对应的力学现象提取而得, 在整体上并不能很好地同时模拟各类力学现象. 因此, 必须在各自参数分类优化的基础上, 综合优化拟合各类试验曲线. 根据退化为一维的 Chaboche 本构理论, 采用 Levenberg-Marquadt 非线性优化算法[11], 编制了材料参数优化程序. 假设有 L 条实验曲线, 其中第 $i(i=1,2,\cdots,M)$ 条曲线有 $M(i)$ 个数据点, 若定义所有参数构成的向量为 $\boldsymbol{c}$, 那么本构参数优化的目标函数可以写为

$$Q(\boldsymbol{c}) = \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{M(i)} W_{ij}\left(\frac{\Psi_{ij}^{\text{theory}}(\boldsymbol{c}, t_{ij}) - \Psi_{ij}^{\text{test}}(t_{ij})}{\Psi_{ij}^{\text{test}}}\right)^2$$

其中　W_{ij} 是加权系数; t_{ij} 是记录时间(真实时间或者循环次数); 对蠕变来说, $\Psi=\varepsilon^{\text{in}}$; 单调拉伸和反向加载时 $\Psi=\sigma$; 对称循环加载时 $\Psi=\Delta\sigma=\sigma_{\max}-\sigma_{\min}$, 即应力范围; 非对称循环加载时 $\Psi=\sigma_{\text{mean}}=(\sigma_{\max}+\sigma_{\min})/2$, 即平均应力.

4　分析讨论及结论

从数值模拟单轴实验结果可以看出, Chaboche 模型的层次结构可以很好地针对 Udimet 720 Li 材料在高温下从简单到复杂的各类力学现象进行建模, 理论具有很好的可剪裁性. Ohno/Wang 对 Chaboche 理论在模拟 Ratchetting 时提出的修正, 可以很好的描述与 Ratchetting 相对应的平均应力松弛现象; 虽然原本用于描述对称循环下循环硬化的各向同性变量 R 被用来描述反向屈服时的快速各向同性软化这一 Udimet 720 Li 材料所表现的特殊变形行为, 但通过与 $\Phi(p)$ 函数的结合, 模型也能够合理地描述应变控制对称循环加载下的循环硬化. 参数优化及计算分析的过程表明: 无论是不同拉伸应变率的单调拉伸、循环硬化、快速各向同性软化与平均应力松弛, 还是不同应力水平的稳定蠕变实验, 本文的参数优化策略及由此而确定的 Chaboche 模型参数都是合理的.

对于内变量统一本构理论来说, 稳定蠕变阶段的主要特征是所有的内变量都停止演化, 这也意味着无损伤的 Chaboche 模型是不能够模拟具有明显损伤的蠕变第 3 阶段, 在蠕变第 2 阶段具有恒定的蠕变速率. 由于蠕变第 3 阶段损伤较大, Chaboche 模型必须耦合损伤理论才能对第 3 阶段的蠕变很好地进行模拟.

参考文献 (**References**)

[1] Chaboche J L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity [J]. Int J of Plasticity, 1989, 5: 247~ 302

[2] Chaboche J L. On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects[J]. Int J of Plasticity, 1991, 7: 661~ 678

[3] Bodner S R, Partom Y. Contitutive equations for elastic-viscoplastic strain hardening materials[J]. ASME J Appl Mech, 1975, 42(6): 385~ 389

[4] Bodner S R, Partom Y, Partom I. Uniaxial cyclic loading of elastic viscoplastic materials [J]. ASME J Appl Mech, 1979, 46(12): 805~ 810

[5] Bodner S R, Partom Y. A large deformation elastic-viscoplastic analysis of a thick-walled spherical shell[J]. ASME J Appl Mech, 1972, 39(9): 751~ 757

[6] Walker K P. Research and development program for non-Linear structural modeling with advanced time-temperature dependent constitutive relationships[R]. NASA-CR-165553, 1981

[7] Amstrong P J, Frederick C O. A mathematical representation of multiaxial Bauschinger effect [R]. CEGB report RD/B/N731, Central Electricity Generating Board, 1966

[8] Ohno N, Wang J D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I : Formulation and basic features for ratchetting behavior [J]. Int J Plasticity, 1993, 9: 375~ 390

[9] Ohno N. Constitutive modeling of cyclic plasticity with emphasis on ratchetting[J]. Int J Mech Sci, 1998, 40(2-3): 251~ 261

[10] Nouailhas D. Unified modeling of cyclic viscoplasticity: application to austenitic stainless steels[J]. Int J Plasticity, 1989, 5: 501~ 520

[11] Moré J J. The Levenberg-Marquadt algorithm: implementation and theory[A]. In: Waston G A. Lecture Notes in Mathematics 630: Numerical Analysis[C]. Berlin: Springer Verlag, 1978. 105~ 116