高超音速热流数值计算中的误差匹配原则

谢锦睿 吴颂平 王 浩

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100083)

摘 要: 通过对粘性边界层的数值模拟和误差分析,提出了差分格式的误差匹配原则. 在边界层内的计算网格一般都具有很大的长宽比,而计算误差与网格长宽比密切相关. 为了使不同坐标方向上的误差保持在同一量级上,需根据误差匹配原则确定计算网格的尺寸. 对绕钝锥的高超音速流动进行了数值模拟,进而计算了钝锥表面的热流分布. 数值计算表明,参照误差匹配原则进行网格划分是有益的,可在保持流场数值计算精度和提高热流计算准确性的同时,使网格的数量和分布更为合理.

关 键 词: 高超音速流; 误差分析; 表面热流

中图分类号: V 211.3

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2005)03-0274-04

Error matching principle for heat transfer calculations in hypersonic flow simulations

Xie Jinrui Wu Songping Wang Hao

(School of Aeronautic Science and Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: An error matching principle, which is base on the error analysis of the computations with high-aspect-ratio grids, is derived for the finite difference simulation of the viscous boundary layer flows. The high-aspect-ratio grids were commonly used in numerical simulations of the viscous boundary layer flows and the main calculation error was always correlated to the aspect ratio of the grids. The principle above could be used to keep the same degree of the calculation error in spatial directions respectively. The error matching principle given was verified by the numerical simulation of the hypersonic flows over a blunt-cone. The flow field and the surface heat transfer rate were calculated in the numerical simulation. The results show that the error matching principle is great benefit to generate optimal grids. The optimal grids followed the error matching principle can minimize the error and improve the computational efficiency. At the same time, the accurate calculation of flow field and the surface heat transfer rate are benefited from the match of errors.

Key words: hypersonic flow; error analysis; surface heat transfer

新一代高超音速飞行器的研制在军事和民用上都具有重要的价值,而在大气层中高超音速飞行,气动加热是重要的问题. 为了实现其可重复使用性能和高机动性,气动加热及热防护的研究成为关键性的问题之一. 对于跨大气层再入飞行,气动加热将成为严重问题[1],甚至成为飞行器能否生存的关键. 开展气动热研究,地面实验存在着成本高,周期长,且很难模拟实际的飞行环境等实际困难. 因而,数值模拟就成为高超音速飞行器气动热特性研究中必不可少的重要手段.

飞行器表面热流的确定对于再入飞行的安全、准确是至关重要的. 首先,气动加热对飞行器周围的流场会产生显著的影响,导致飞行器飞行姿态和轨迹的改变;其次,表面热流分布对于飞行器的热结构布置和热防护设计具有指导意义. 因此热流数值计算是再入飞行器气动热研究的重要

收稿日期: 2003-09-26

作者简介: 谢锦睿(1973-),男,四川成都人,博士生, jinrxie@yahoo.com.

内容. 同时,对于在大气层中以高超音速巡航或滑行的飞行器而言,既需要较高的升阻比,又需要解决防热问题,而且还会遇到比再入飞行器更长时间的气动加热问题,准确的热流计算是解决这些问题的基础和关键.

通过数值模拟,目前已经可以较为准确地给出复杂外形高超音速飞行器的气动特性,但飞行器表面热流的计算则要复杂得多. 影响热流数值模拟结果的因素很多,热流的准确计算具有更大的难度. 仅从数值计算的角度考虑,就有流场计算本身的精度、壁面附近网格的尺寸与分布[2]等多种影响因素.

本文以绕钝锥的高超音速流动为例,开展了流场的数值模拟和表面热流的数值计算. 通过分析边界层内网格长宽比对计算误差的影响,提出了差分格式的误差匹配原则. 数值试验表明,参照误差匹配原则进行网格划分是有益的,可在保持流场数值计算精度和提高热流计算准确性的同时,使网格的数量和分布更为合理.

1　误差匹配原则

对于粘性流动,由于 N-S 方程粘性项中的小参数$\left(\frac{1}{Re}\right)$的影响,在边界层内的计算网格一般都具有很大的长宽比,而计算误差与网格长宽比密切相关. 因此,对于含有边界层的复杂粘性流动,在对数值模拟方法的计算误差进行更为精细的分析时,需将传统的基于网格单元整体尺度的误差分析方法扩展为基于不同坐标方向网格尺度的误差分析方法,文献[3]根据这一思路,对边界层流动的有限元算法进行了误差分析,并认为不同坐标方向上的误差应该保持同一量级上,由此提出了误差匹配原则.

通过对截断误差的分析,误差匹配的思路和分析方法也同样适用于有限差分方法. 以定常二维边界层流动的动量方程为例,其差分格式的修正方程为

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+R_{x1}+R_{y1}+R_{x2}+R_{y2}$$

其中

$$R_{x1}=\rho u\left[a_1\Delta x^k\frac{\partial^{k+1}u}{\partial x^{k+1}}+a_2\Delta x^k\frac{\partial^{k+2}u}{\partial x^{k+2}}+\cdots\right]$$

$$R_{y1}=\rho v\left[b_1\Delta y^l\frac{\partial^{l+1}u}{\partial x^{l+1}}+b_2\Delta y^{l+1}\frac{\partial^{l+2}u}{\partial y^{l+2}}+\cdots\right]$$

$$R_{x2}=\frac{1}{Re}\left[c_1\Delta x^{2m}\frac{\partial^{2m+2}u}{\partial x^{2m+2}}+c_2\Delta x^{2m+2}\frac{\partial^{2m+4}u}{\partial x^{2m+4}}+\cdots\right]$$

$$R_{y2}=\frac{1}{Re}\left[d_1\Delta y^{2n}\frac{\partial^{2n+2}u}{\partial y^{2n+2}}+d_2\Delta x^{2n+2}\frac{\partial^{2n+4}u}{\partial y^{2n+4}}+\cdots\right]$$

用 δ 表示边界层内流动的特征尺度(边界层厚度),根据边界层理论,在边界层内有

$$u\sim O(1)\qquad\frac{\partial^p u}{\partial x^p}\sim O(1)$$

$$\frac{\partial^q u}{\partial y^q}\sim O(\delta^{-q})\qquad v\sim O(\delta)$$

$$\rho\sim O(1)\qquad\frac{1}{Re}\sim O(\delta^2)$$

所以

$$R_{x1}\sim O(\Delta x^k)$$

$$R_{x2}\sim O(\delta^2\Delta x^{2m})$$

$$R_{y1}\sim O\left(\frac{\Delta y}{\delta}\right)^l\left[\left(1+\frac{\Delta y}{\delta}+\left(\frac{\Delta y}{\delta}\right)^2+\cdots\right)\right]$$

$$R_{y2}\sim O\left(\frac{\Delta y}{\delta}\right)^{2n}\left[\left(1+\left(\frac{\Delta y}{\delta}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\delta}\right)^4+\cdots\right)\right]$$

为了保证数值计算能够分辨边界层内的流动,边界层内法向网格尺度 Δy 应该比 δ 小一个量级以上,因而$\frac{\Delta y}{\delta}$应为小量,从而有

$$R_{y1}\sim O\left(\frac{\Delta y}{\delta}\right)^l$$

$$R_{y2}\sim O\left(\frac{\Delta y}{\delta}\right)^{2n}$$

引入物面法向网格雷诺数 $Re_y=Re\cdot\Delta y$,则 $\frac{\Delta y}{\delta}\sim O(\sqrt{Re_y\Delta y})$,将其代入上式,得

$$R_{y1}\sim O[(Re_y\Delta y)^{l/2}]\qquad R_{y2}\sim O[(Re_y\Delta y)^n]$$

为了保持计算精度,并使两个方向上所选择的网格尺度达到最优,各误差项 R_{x1},R_{x2},R_{y1}和 R_{y2} 应保持为同一量级,这就是误差匹配的思想. 根据这一思路,对以上各误差项之间的关系进行匹配分析,可得出下述结论.

匹配原则 1　y 方向的对流项与粘性项应该采用同阶精度的差分格式($l=2n$)才能保证 R_{y1} 和

R_{y2}匹配. 贺国宏等已经注意到这一事实[4].

再考虑 R_{x1} 与 R_{y2} 的匹配. 定义误差匹配因子

$$\gamma = \frac{R_{y2}}{R_{x1}} \sim \frac{(Re_y \Delta y)^n}{\Delta x^k}$$

当 $k=n$ 时,由误差匹配原则 $\gamma \sim O(1)$,可推出 $\frac{\Delta x}{\Delta y} \sim O(Re_y)$,从而有

匹配原则 2 当 $k=n$ 时,网格长宽比应该与物面法向网格雷诺数同量级才能保证误差 R_{x1} 与 R_{y2} 的匹配. 在 Δy 确定时,若 x 方向采用高阶近似($k>n$),可以放宽对 Δx 的要求;若 y 方向采用高阶近似($n>k$),就要求 Δx 更小. 这些结论与有限元方法中相应的结果类似[3].

最后考虑 R_{x2} 项. 在边界层方程中 $\frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 项为小量,因此差分格式中这一项的截断误差的量级也不应低于其他三项. 比较 R_{x2} 与 R_{x1},有

$$\frac{R_{x2}}{R_{x1}} \sim \frac{O(\delta^2 \Delta x^{2m})}{O(\Delta x^k)} = \frac{1}{Re} O(\Delta x^{2m-k})$$

因而当 $2m-k \geqslant 0$ 时,$\frac{R_{x2}}{R_{x1}} \sim O\left(\frac{1}{Re}\right)$ 为小量.

匹配原则 3 只要 $2m-k \geqslant 0$,在满足前 2 个匹配原则的基础上,R_{x2} 就是高阶小量.

对于三维问题,由于在沿物面的两个切线方向上,截断误差表达式是类似的. 因此,只要将上述结果中的 Δx 换成物面网格的特征尺度(如 $h_\tau = \max(\Delta x, \Delta z)$ 或 $h_\tau = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2}$),就可以以上结果推广到三维边界层流动.

2 计算结果及分析

为了考察表面热流计算精度与边界层内网格尺度与分布的关系,验证误差匹配原则,本文以绕钝锥的高超音速粘性流动为例开展了数值试验,并将数值模拟得到的驻点热流与 Fay-Riddell[5] 公式的计算值进行了比较,还将周向热流分布与实验结果进行了对比.

钝锥外形由半径 0.027 94 m 的球头和半锥角为 15°的锥体组成,钝锥的全长为 0.447 04 m.

流场的数值模拟通过隐式 TVD 格式和 LU 分解算法求解完全气体三维层流 N-S 方程组实现. 数值计算中的流场边界由物面、外边界、对称面和出口流场组成. 对于粘性流动,物面采用无滑移条件,并给定等温壁条件;物面压强关系通过物面法向动量方程得到;在外边界给定超音速自由来流;若侧滑角为 0,只需计算一半的流场,并在对称面上用对称条件处理;在出口边界上用外插处理.

计算中给定的来流参数为 $Ma=10.6$, $Re/L=3.96\times10^6$ m^{-1}, $T_\infty=47.3$ K, $P_\infty=109.9$ Pa,物面温度为 $T_{wall}=294.44$ K,计算攻角为 $\alpha=0°, 20°$. 对此种情形,Fay-Riddell 公式给出的驻点热流为 184.9 kW/m^2,用 $\rho_\infty V_\infty^3$ 无量纲化,相应的无量纲值为 0.007 32.

计算所用的网格采用代数方法生成. 从壁面开始,沿法向按指数分布沿法向向外延伸. 计算的网格数为 97×81×31. 流向和周向网格的尺寸按照误差匹配原则确定. 以球头驻点附近的网格为例,根据上述来流参数所确定的边界层厚度,球头驻点附近的法向网格尺寸取为 $\Delta y=4.2\times10^{-6}$ m,用上面给出的误差匹配原则进行分析,切向网格尺度应取为 $h_\tau=1.397\times10^{-3}$ m.

表 1 给出了零攻角时驻点热流的计算结果. 其中网格 1 即为上面所给的网格,网格 2 则是用于对照的另一套计算网格,其法向网格的数量的分布与网格 1 相同,流向网格数由网格 1 的 97 减少为 76,周向网格数由网格 1 的 31 增至 37,切向网格尺度应取为 $h_\tau=2.15\times10^{-3}$ m,不满足误差匹配原则. 从表中的计算结果可以看出,按照误差匹配原则调整计算网格,保证了流场计算的精度,由此得到的驻点热流更接近于 Fay-Riddell 公式给出的热流值.

表 1 无量纲驻点热流 $q_w/\rho_\infty V_\infty^3$($\alpha=0°$)

类别	$q_w/\rho_\infty V_\infty^3$
网格 1	0.007 17
网格 2	0.009 34
Fay-Riddell 公式	0.007 32

图 1 ~ 图 4 给出的是 20°攻角时钝锥表面热流分布曲线,图中所有的热流值均利用上述零攻角时的驻点热流计算值进行了归一化处理,用 H 表示. 其中图 1 是子午面内表面热流的分布曲线,图 2 ~ 图 4 是 3 个不同的流向站位横截面内表面

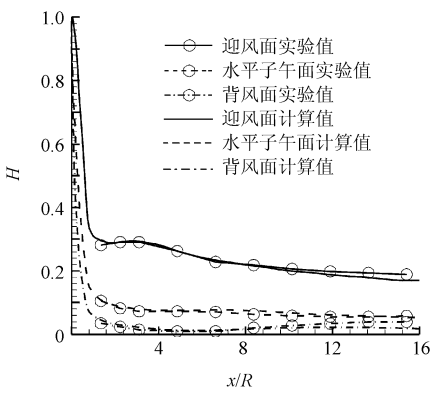

图 1 计算以及实验流向热流的比较(R 为头部半径)

热流的分布曲线(横坐标是周向角度). 这些图中给出的计算结果都与试验数据吻合.

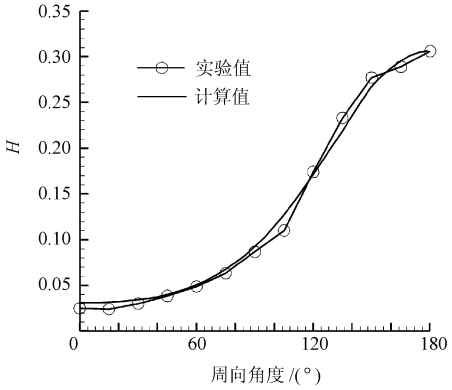

图 2　计算周向热流与实验数据的比较(2.23 倍半径处)

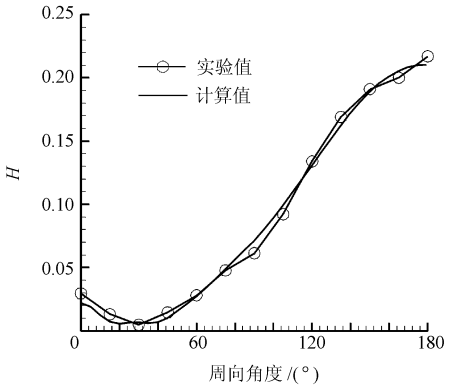

图 3　计算周向热流与实验数据的比较(10.13 倍半径处)

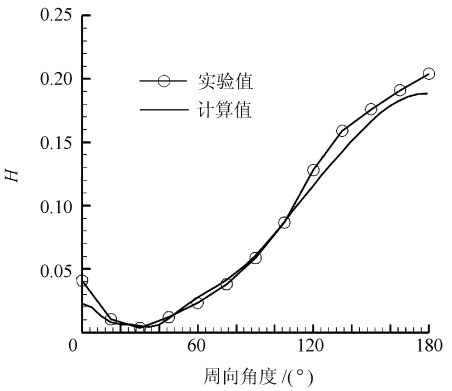

图 4　计算周向热流与实验数据的比较(13.64 倍半径处)

以上数值实验的结果说明,按照误差匹配的原则所确定的网格尺度和分布,在一定意义下是最优的. 误差匹配原则在流场数值模拟和表面热流计算中能够作为网格划分的依据,有助于保持表面热流计算结果的准确性.

3　结 束 语

本文通过绕钝锥高超音速流动的数值模拟,研究了表面热流计算与网格不同坐标方向尺度之间的关系. 通过分析边界层内网格长宽比对计算误差的影响,提出了差分格式的误差匹配原则. 数值试验表明,满足误差匹配准则能够保证流场数值模拟的精度和热流计算的准确性. 在相同的法向网格雷诺数下,按照误差匹配原则分布网格更为合理.

参考文献 (**References**)

[1] 卞荫贵,徐立功. 气动热力学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,1997
Bian Yingui, Xu Ligong. Aerothermodynamics[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1997 (in Chinese)

[2] Hoffmann K A, Siddiqui M S ,Chiang S T. Difficulties associated with the heat flux computations of high speed flows by the Navier-Stock equations[R]. AIAA-91-0467,1991

[3] 王　浩. 高超音速流动数值模拟与热流数值计算[D]. 北京:北京航空航天大学航空科学与工程学院,2002
Wang Hao. Numerical simulation of hypersonic flows and calculation of aerothermal heating[D]. Beijing: School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002(in Chinese)

[4] 贺国宏,张涵信. 高超声速钝头体热流数值计算研究[A]. 见:张涵信主编. 第九届全国计算流体力学会议论文集[C]. 北京:北京空气动力研究所,1998. 128~133
He Guohong, Zhang Hanxin. Study of numerical simulation of hypersonic flows around blunt-cone[A]. In: Zhang Hanxin,ed. 9th National Congress on Computational Fluid Dynamics[C]. Beijing: Beijing Aerodynamics Institute, 1998. 128~133(in Chinese)

[5] 瞿章华,刘　伟,曾　名,等. 高超声速空气动力学[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2001
Qu Zhanghua, Liu Wei, Zeng Ming, *et al*. Hypersonic aerodynamics[M]. Changsha: National University of Defence Technology Press, 2001(in Chinese)