基于双谱重构的图像降噪

蒋 宏 吴立疆

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

摘 要: 提出了一种基于双谱重构的图像去噪方法. 该方法的基本理论依据是: 高阶统计量对高斯噪声的不敏感性. 它首先计算图像的高阶谱, 而得到的高阶谱中理论上将不再包含高斯噪声, 然后再通过高阶谱重构图像的幅值和相位信息, 最后还原至空间域而得到去噪后的图像. 它是高阶谱域的变换与重构方法. 仿真结果和分析表明, 该双谱重构法较好地解决了去除噪声与保留细节之间的矛盾, 无论从直观视觉和从定量分析结果, 该双谱重构法都优于中值滤波法和高阶累积量方法.

关 键 词: 噪声; 高阶累积量; 高阶谱; 双谱

中图分类号: TN 911.73

文献标识码: A 文 章 编 号: 1001-5965 (2005) 03-0321-05

Novel image denoising algorithm based on bispectral reconstruction

Jiang Hong Wu Lijiang

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: A novel image denoising algorithm based on the bi-spectral reconstruction was proposed. The basic idea of this new algorithm was: higher order statistics was not sensitive to the Gaussian noise. First of all, this new algorithm would calculate the higher order spectrum of the image, and theoretically this higher order spectrum would not include the Gaussian noise any more. Secondly, it would reconstruct the amplitude and phase information of this processed image by the higher order spectrum. Finally, it would get the denoised image by transforming to the spatial domain. This new algorithm was the algorithm of transformation and reconstruction in higher order spectrum. Simulation results and analysis indicate that this new algorithm could solve the contradiction between reducing noise and reserving the image detail so that in views of both visual quality and quantitative analysis, the new algorithm is better than the mediarr value filtering algorithm and the higher order cumulant algorithm.

Key words: noise; higher-order cumulant; higher-order spectrum; bispectrum

降噪问题是信号处理领域的重要问题. 传统的空域滤波存在着保护信号局部特征和抑制噪声的矛盾. 空域滤波是在图像空间借助模板进行邻域操作完成的, 根据其特点一般可分为线性和非线性[1]. 线性滤波器常基于傅里叶变换分析, 非线性空间滤波器一般是直接对邻域进行操作. 目前广泛使用的空域图像平滑方法有中值滤波法, 加权平均法, 以及比较新的差值滤波法等. 中值滤波法[1], 是对一个滑动窗口内的诸像素进行灰度排序, 再用其中值代替中心像素原来的灰度值, 但这种方法明显忽视了周围边缘的细节. 加权平均法[1], 是用邻域内像素的加权平均值来代替中心像素的灰度值. 虽然它在一定程度上保护了图像的细节, 但却衰弱了对图像噪声的平滑作用, 差值滤波法, 先将窗口分为多个小的窗口, 通过计算子窗口对角线顶点间的梯度绝对值的和, 并比较其大小, 以检测该点周围的边缘细节分布状况, 然后用边缘细节中梯度绝对值之和最小的子窗口中像素的平均值代替该点的灰度值. 但是, 由于图像中已经混入了噪声, 因此噪声有可能被误认为图像细节加以保留, 而真正有较多信息的部分被滤除掉, 从而不仅降低了对噪声的

收稿日期: 2003-07-01

作者简介: 蒋 宏 (1967-), 女, 四川达州人, 副教授, hongj6704@yahoo.com.cn.

平滑效果，而且图像细节也可能有较大的损失.

为了尽可能地平滑噪声，并且尽可能多地保留图像细节，杨守义等提出了一种高阶统计量法[2]. 该方法是利用高阶累积量来反映图像的细节信息. 由于使用高阶累积量[2,3]能够排除高斯白噪声和高斯有色噪声的影响，因而能更准确地反映原图像的细节信息，这样不仅能更好地平滑噪声，且能更多地保留细节. 此高阶统计量方法直接在空间域，通过计算某窗口的高阶累积量来判断细节丰富程度，再直接通过邻域操作进行平滑处理.

该文在高阶统计量法思想的基础上，提出了一种基于双谱重构的图像去噪方法. 它是首先计算图像的高阶谱，而得到的高阶谱中理论上将不再包含高斯噪声，然后再通过高阶谱重构图像的幅值和相位信息，最后还原至空间域而得到去噪后的图像.

1 高阶累积量和高阶累积量谱

以 $c_{kx}(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{k-1})$ 表示 k 阶累积量，$m_{kx}(\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{k-1})$ 表示 k 阶矩，$S_{kx}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{k-1})$ 表示 k 阶累积量谱. 对零均值的线性平稳随机过程 $\{x(n)\}$，其 k 阶累积量是 $k-1$ 个独立变元的函数，称为随机变量 $\{x(n), x(n+\tau_1), \cdots, x(n+\tau_{k-1})\}$ 的 k 阶累积量. 其各阶累积量为

$$c_{2x}(\tau) = E\{x(n)x(n+\tau)\} = s_{xx}(\tau) \quad (1)$$

$$c_{3x}(\tau_1, \tau_2) = E\{x(n)x(n+\tau_1)x(n+\tau_2)\} = m_{3x}(\tau_1, \tau_2) \quad (2)$$

$$c_{4x}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = m_4(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - s_{xx}(\tau_1)s_{xx}(\tau_3-\tau_2) - s_{xx}(\tau_2)s_{xx}(\tau_3-\tau_1) - s_{xx}(\tau_3)s_{xx}(\tau_1-\tau_2) \quad (3)$$

其中，$s_{xx}(\tau)$ 为零均值线性平稳随机过程 $\{x(n)\}$ 的自相关函数.

对零均值的线性平稳随机过程 $\{x(n)\}$，其 k 阶累积量谱表达式为

$$S_{kx}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{k-1}) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{\tau_{k-1}=-\infty}^{\infty} \left[c_{kx}(\tau_1, \cdots, \tau_{k-1}) \exp\left(-\mathrm{j} \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \tau_i \right) \right] \quad (4)$$

即 k 阶累积量谱定义为 k 阶累积量的 $k-1$ 维傅里叶变换.

习惯上，高阶累积量谱常简称作高阶谱或多谱. 最常见的高阶谱是三阶谱或双谱:

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} \{ c_{3x}(\tau_1, \tau_2) \exp[-\mathrm{j}(\omega_1\tau_1 + \omega_2\tau_2)] \} \quad (5)$$

而二阶累积谱是一维频率函数，俗称功率谱 $P_\omega(\omega)$.

如果 $\{x(n)\}$ 是一个具有有限能量的确定性信号，其双谱可用如下表达式计算

$$B_x(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1)X(\omega_2)X^*(\omega_1+\omega_2) \quad (6)$$

其中，$X(\omega)$ 为零均值线性平稳随机过程 $\{x(n)\}$ 的傅里叶变换.

当 $\{v(n)\}$ 为零均值、高斯随机过程，$k \geqslant 3$，$c_{kv}(m, k) = 0$. 由式 (4) 容易看出，此时的高阶累积量谱也将为零，即 $S_{kx}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{k-1}) = 0$. 因此，在独立的加性高斯有色噪声中观察一个非高斯信号，在理论上，观察过程的高阶累积量 (或高阶谱) 就是原非高斯过程的高阶累积量 (或高阶谱)，即高阶累积量 (或高阶谱) 完全抑制了噪声的影响.

给定一个确定信号 $x(n)$，它在加性噪声 $v(n)$ 中被观测，即观测数据为 $y(n) = x(n) + v(n)$. 为了从 $y(n)$ 恢复信号 $x(n)$，就必须:

1) 从观测的 $y(n)$ 估计信号 $x(n)$ 的傅里叶变换的二重或多重相关得到功率谱或多谱;

2) 通过估计 $x(n)$ 的傅里叶变换的幅值和相位，从而从二重相关 (功率谱) 或多重相关 (多谱) 中恢复信号.

在此过程中，还应尽可能的去除噪声. 从上面的分析中可知，当 $v(n)$ 是有色噪声时，利用功率谱恢复信号 $x(n)$ 是不可取的，因为功率谱 (或自相关) 是对噪声敏感的. 然而，使用高阶累积量 (或高阶谱) 却很容易克服高斯有色噪声的影响.

2 基于双谱重构的图像降噪

设大小为 $M \times N$ 的数字图像为 $f(x, y)\{x = 0, 1, 2, \cdots, M-1;\ y = 0, 1, 2, \cdots, N-1\}$. 为了方便运算，以及直接应用序列的高阶累积量和高阶累积谱，先将上述二维图像按列 (或按行) 扫描称为一维序列，则某一个像素点 (x, y) 对应于序列 $f(n)$ 的元素 $f(y \times M + x)$ (按行则为 $f(x \times N + y)$). 然后为了计算方便，将序列 $f(n)$ 分成 K 段 $f^{(i)}(n)$，每段含 L 个观测样本，即 $NM = KL$，并对每段数据减去该段的均值，为了每段数据中满足一个 FFT (Fast Fourier Transform) 的通用长度要求，取 M 为 2 的

整数幂 (如取 512).

1) 以每段为一个单位, 进行双谱估计. 在此过程中, 由于高阶累积谱对于高斯噪声的不敏感性, 以及高阶累积量的独立可加性, 此双谱在理论上讲不含有高斯噪声分量. 即: 当信号 $x(n)$ 与噪声 $v(n)$ 彼此统计独立时, 有累积量关系:

$$\mathrm{cum}(x_1+v_1, x_2+v_2, \cdots, x_k+v_k) = \mathrm{cum}(x_1, x_2, \cdots, x_k) + \mathrm{cum}(v_1, v_2, \cdots, v_k) = \mathrm{cum}(x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

所以, 有双谱关系 $B_{x+v}=B_x$.

2) 然后, 利用上述双谱估计值 $B_y(u, v) = B_{x+v}(u, v) = B_x(u, v)$, 注意此时的双谱在理论上已经不含有高斯噪声了. 然后从双谱恢复谱域的幅值 $|F^{(i)}(\omega)|$ 和相位 $\varphi^{(i)}(\omega)$, 由此合成信号的傅里叶变换 $F^{(i)}(\omega) = |F^{(i)}(\omega)|\varphi^{(i)}(\omega)$. 之后, 由信号的傅里叶变换, 通过 IDFT 恢复去噪后的空域信号 $f^{(i)}(n)$.

3) 最终将各段组合成为去噪后的序列 $f(n)$, 再通过一个反重排变换, 将一维序列变为二维去噪图像 $f(x, y)$. 在第 1) 步双谱估计时, 用非参数化双谱估计的直接算法[3], 由式 (6) 给出. 对第 2) 步的相位重构, 用相位 DFT 法[4], 对幅值重构, 用幅值 DFT 法[4,5].

3　仿真分析

采用图像 "woman" (256 × 256 × 256, 图像大小为 256 × 256, 256 级灰度), 并加入了方差为 0. 02 和 0. 05 的高斯噪声. 首先考察叠加了方差为 0. 02 的高斯随机噪声的图像在经该文双谱重构方法处理得到的图像 (图 1). 为了改善对比度, 对其进行了直方图均衡处理 (图 2) (为了分析的一致性, 所有分析数据均采用未经直方图处理的图像). 为了便于对比观察, 同时也将经高阶累积量方法处理[2] (图 3) 和经中值滤波法处理 (图 4) 的结果列出.



图 1　经双谱重构法处理



图 2　将图 1 进行直方图均衡



图 3　经高阶累积量方法处理



图 4　经中值滤波法处理

从可视化效果比较, 双谱重构方法的效果明显优于另外 2 种方法. 不仅噪声颗粒明显减弱, 而且图像细节保存较好. 直观上看, 就表现为整体更加均匀, 没有非常明显的噪声色斑; 局部纹理却依然比较清晰, 轮廓较为完整. 进一步从相关数据分析, 经程序计算结果显示, 双谱重构方法处理得到的图像 (图 1), 其均方误差 MSE (Mean Squared Errors) 为 0.542×10^3 (相对误差为 $0.4382 = 0.542\times10^3/1.2382\times103$), 与高阶累积量方法 (图 3) 的均方误差 0.7212×10^3 (相对误差为 0. 5813) 相比, 减小了 10% 以上.

再比较各自处理结果与原始图像的相关系数，双谱重构方法得到的图像为 0.8886，高阶累积量方法为 0.8562，改善也较明显（含噪图像与原始图像的相关系数为 0.8153）．综合以上分析，双谱重构方法的去噪声能力和保留图像细节的能力，均优于高阶累积量方法.

同时，为了观察双谱重构方法对于不同噪声强度的处理效果，下面将加入方差为 0.05 的高斯噪声．另外，根据实际所遇到的新问题，以及试验的最终效果，引入了双谱重构法加均值滤波综合处理的方法．从直观上看．经双谱重构法处理的图像（图 5 和图 6），其细节保存较完整，但噪声取除不充分．相比之下，经双谱重构法加均值滤波综合处理的图像（图 7 和图 8），噪声去除效果明显，但细节稍大．在方差为 0.05 的高斯噪声的情况下，应该说效果还是比较令人满意．另外，上述 2 种方法，更优于高阶累积量方法或二次高阶累积量方法.



图 5 经双谱重构法处理



图 6 将图 5 进行直方图均衡

进一步从相关数据分析计算结果显示，仅用双谱重构方法得到的图像（图 5），其均方误差（MSE）为 1.0230×10^3（相对误差为 $0.3653=1.0230\times10^3/2.8004\times10^3$），用双谱重构方法加均值滤波综合处理的图像（图 7），其均方误差为 0.8629×10^3（相对误差为 0.3082）．一次高阶累积量方法（图 9）的均方误差 1.106×10^3（相对误差为 0.3984）和二次高阶累积量方法（图 10）的均方误差 0.9056×10^3（相对误差为 0.3262）．再比较各自处理结果与原始图像的相关系数，仅用双谱重构方法得到的图像为 0.7905，用双谱重构方法加均值滤波综合处理的图像为 0.8425，一次高阶累积量方法为0.7841，二次高阶累积量方法为0.8113．另外，含噪图像与原始图像的相关系数为 0.6634.



图 7 双谱重构加均值滤波处理



图 8 将图 7 进行直方图均衡



图 9 经高阶累积量方法处理

综合以上分析比较，如表 1 所示双谱重构方法加均值滤波综合处理方法，在强噪声条件下，与该文所有方法相比，效果最佳.



图 10　二次高阶累积量方法处理

表 **1**　双谱重构法，高阶累积量方法，双谱加均值滤波的去噪比较

编号	处理方法	均方误差	相对误差	与原图相关度
图 5	仅双谱重构法	1.0230×10³	0.3653	0.7905
图 7	双谱加均值	800.0975	0.2859	0.8425
图 9	高阶累积量	1.106×10³	0.3984	0.7841
图 10	二次累积量	0.9056×10³	0.3262	0.8113
	原始图像	0	0	1
	原含噪图像	2.8004×10³	1	0.6634

进一步分析双谱加均值法与一般均值方法的优劣，独立仿真试验 60 次，加入高斯噪声，均值 0，方差 0.05（约 15% 的噪声）．可以看出前者在性能上（均方误差 MSE，信噪比 SNR，见图 11 和图 12）具有较为明显的优势，但时间时间开销很大，二者之比大约 200∶1，基本仿真数据见表 2.

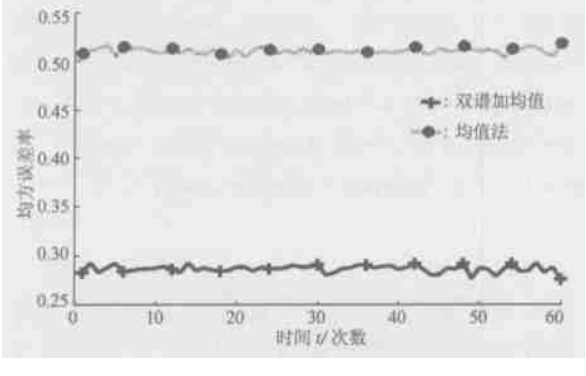

图 11　均方误差率分析（60 次仿真结果）

表 **2**　双谱加均值法与一般均值法的性能比较数据

不同算法（独立 60 次）	均方误差	均方误差相对误差	信噪比	平均时间/s
双谱加均值	800.0975	0.2859	0.0473	218.5540
一般均值法	1.4295×10³	0.5106	0.0845	0.9809
原含噪图像	2.7990×10³	1	0.1656	

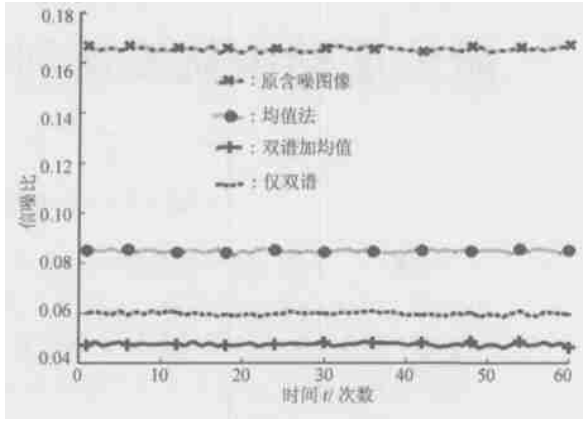

图 12　信噪比分析（60 次仿真结果）

4　结 束 语

由以上的仿真结果及相互比较分析，可以清楚地看出，与中值滤波法以及高阶累积量方法相比，对于进一步加强图像去噪效果，同时尽可能保留图像细节等方面，双谱重构方法（或双谱重构加均值滤波）均有明显改善．更为重要的是，它在原理上改变了空间域直接平滑取噪的工作机制，从而有可能从根本上解决去除噪声、平滑图像与保留图像的细节信息之间的矛盾．可以归纳出双谱的最大优点：理论上，通过对含高斯噪声序列的双谱估计，来重构频域的幅度与相位，可以完全除掉独立的加性高斯噪声．这是其它方法从根本上无法办到的．

参考文献（**References**）

[1] Gonzalez R C, Woods R E. Digital image processing [M]. Mass: Addison-Wesley, 1992

[2] 杨守义，罗伟雄．一种基于高阶统计量的图像平滑降噪法 [J]．中国图像图形学报，2002，7（A）：654~657
Yang Shouyi, Luo Weixiong. A novel image noise smoothing method based on high order statistics [J]. Journal of Image and Graphics, 2002, 7 (A): 654~657 (in Chinese)

[3] 张贤达．时间序列分析-高阶统计量方法 [M]．北京：清华大学出版社，1996
Zhang Xianda. Time series analysis-high order statistics method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1996 (in Chinese)

[4] Dianat S A, Raghuveer M R. Fast algorithms for phase and magnitude reconstruction from bispectrum [J]. Opt Engr, 1990, 29: 504~512

[5] Sundaramoorthy G, Raghuveer M R, Dianat S A. Bispectral reconstruction of signals in noise: amplitude reconstruction issues [J]. IEEE Trans Acoustics, Sppech, Signal Processing, 1990, 38: 1297~1306