一类奇异 H_∞ 问题的降阶控制器的解释

钟瑞麟 程 鹏

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100083)

摘 要: 一类奇异 H_∞ 控制问题可以利用系统矩阵的结构特征通过线性矩阵不等式或2代数黎卡提方程方法直接显式构造得到降阶控制器. 进而利用系统不稳定的不变零点可以构造出更低阶次的控制器. 基于2代数黎卡提方程方法,特别是系统 Hamilton 矩阵的结构特点和系统可观测性理论,论述了不变零点在构造系统降阶控制器中所起的作用,即通过选择控制器的自由参量,使某些不稳定的不变零点关于虚轴对称的点构成系统控制器不可观的稳定极点,从而实现了控制器进一步降阶.

关 键 词: 控制器; 黎卡提方程; H_∞ 控制; 可观性

中图分类号: TP 13

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2005)03-0363-04

Explanation of reduced order controller for a class of H_∞ singular control problem

Zhong Ruilin Cheng Peng

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

Abstract: The structure character of system transfer matrices can be used to solve a class of singular H_∞ control problem and a reduced order H_∞ controller can be constructed in explicit form either by linear matrix inequations method or two algebra Riccati equation method. The order of the system H_∞ controller can further be reduced by use of system unstable invariant zeros. Based on two algebra Riccati equation method especially the structure of the system Hamilton matrix and system observability theory, the role of invariant zeros in constructing system reduced order controllers was given. That is, by the suitable selection of free parameters of the system H_∞ controller, some points which were symmetry with the unstable invariant zeros about the imaginary axis became the stable poles of the system controller which were not observable and could be reduced from the system, thus could get further reduced order controller.

Key words: control equipment; Riccati equations; H_∞ control; observability

1 问题描述

通常的 H_∞ 控制设计方法都可以给出阶次等于广义对象阶次的全阶 H_∞ 控制器[1,2],这样得到的 H_∞ 控制器的阶次比较高. 因此研究低阶的 H_∞ 控制器具有重要的理论和工程意义,是控制领域研究的基本问题之一. 利用系统参数矩阵的特点直接显式构造降阶控制器一直是得到降阶控制器的重要方法之一. Xin、郭雷、曾建平等人利用系统矩阵存在的不满秩性得到了低阶控制器[3,4]; Tabao Watanabe 等人在此基础上利用系统不稳定的不变零点得到了进一步降阶的控制器[5]. 本文对 Tabao Watanabe 等人提出的控制器形式,证明了和部分不变零点关于虚轴对称的点是控制器的特征根,而它们是不可观的,从而得到了降阶控制器. 文中用到的记号说明如下: $\boldsymbol{I}$ 表示合适维数的单位阵; $\boldsymbol{A}^+$ 代表系统的广义逆; $\boldsymbol{A}^\perp$ 表示满秩矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正交补,并选择满足下列关系: 当 $\boldsymbol{A}$ 列满秩

收稿日期: 2003-10-08

作者简介: 航空基金资助项目(00E51018)

作者简介: 钟瑞麟(1976-),男,四川蓬安人,博士生, rlzhong@sohu.com.

时，$[\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{A}^{\perp}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{+}\\(\boldsymbol{A}^{\perp})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$；当 $\boldsymbol{A}$ 行满秩时，$[\boldsymbol{A}^{+} \quad (\boldsymbol{A}^{\perp})^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}^{\perp}\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}$；$C^{+}$表示开右半平面；$C^{-}$表示开左半平面；$\lambda\cdot$表示$\cdot$的特征根.

对于一类非标准广义 H_{∞} 控制对象

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{z}\\\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{11}(s) & \boldsymbol{P}_{12}(s)\\\boldsymbol{P}_{21}(s) & \boldsymbol{P}_{22}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}\\\boldsymbol{u}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|cc}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\\hline\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22}\end{array}\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}\\\boldsymbol{u}\end{bmatrix}\tag{1}$$

其相应的系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{w}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_{11}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_{21}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{D}_{22}\boldsymbol{u}\end{cases}$$

其中，$\dot{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^{n}$，$\boldsymbol{z}\in\mathbf{R}^{n_z}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{n_y}$，$\boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^{n_w}$，$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^{n_u}$分别代表了系统的状态、控制输出、测量输出、外部输入和控制输入；s 表示拉氏变换算子.

H_{∞} 控制问题就是设计稳定的控制器

$$\sum\nolimits_{\mathrm{c}}:\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{c}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{y}\\\boldsymbol{u}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{D}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{y}\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}\in\mathbf{R}^{n_{\mathrm{c}}}$ 为控制器的状态，保持系统闭环稳定，并且从 $\boldsymbol{w}$ 到 $\boldsymbol{z}$ 的传递函数 $\|\boldsymbol{T}_{zw}\|_{\infty}<\gamma$.

为分析简便，不失一般性，现假设：

1）$\boldsymbol{D}_{12}$行满秩；$\boldsymbol{D}_{21}$列满秩；

2）$\boldsymbol{P}_{12}(s)$和$\boldsymbol{P}_{21}(s)$在虚轴上不存在零点；

3）$\boldsymbol{D}_{11}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{D}_{22}=\boldsymbol{0}$；

4）$(\boldsymbol{C}_2 \quad \boldsymbol{D}_{21})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{C}_{22} & \boldsymbol{I}_{w_1}\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{C}_{21}\in\mathbf{R}^{(n_y-w_1)\times n}$；下面的假设是本方法的核心：

5）$\boldsymbol{P}_{21}(s)$在 C^{+}存在不变零点.

2 现有结果

定理1[3,4] 下面陈述等价：

1）H_{∞} 控制问题可解；

2）存在的控制器的阶次

$$n_{\mathrm{c}}\leqslant n_{\mathrm{k}}=\min\left(n-\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_2\\\boldsymbol{D}_{12}\end{bmatrix}+\operatorname{rank}\boldsymbol{D}_{12},n-\operatorname{rank}[\boldsymbol{C}_2 \quad \boldsymbol{D}_{21}]+\operatorname{rank}\boldsymbol{D}_{21}\right).$$

引理1[5] 存在合适的基使得矩阵 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_{21}^{+}\boldsymbol{C}_2$，$(\boldsymbol{D}_{21}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_{21}^{+}\boldsymbol{C}_2$ 有下列分块表示：

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_{21}^{+}\boldsymbol{C}_2\\(\boldsymbol{D}_{21}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2\\\boldsymbol{D}_{21}^{+}\boldsymbol{C}_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{A}_{14} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{-} & \boldsymbol{0}\\\hline\boldsymbol{A}_{33} & \boldsymbol{A}_{34} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{+}\\\hline\boldsymbol{I}_{n_y-w_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\\hline\boldsymbol{C}_{22\mathrm{ll}} & \boldsymbol{C}_{22\mathrm{lr}} & \boldsymbol{C}_{22\mathrm{rl}} & \boldsymbol{C}_{22\mathrm{rr}}\end{array}\right)\tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{A}_{-}$是稳定的；$\boldsymbol{A}_{+}\in\mathbf{R}^{r\times r}$是反稳定的；$(\boldsymbol{A}_{+},\boldsymbol{C}_{22\mathrm{rr}})$是可观的. 为分析方便，将 $\boldsymbol{C}_1$ 按 $\boldsymbol{D}_{21}^{+}\boldsymbol{C}_2$ 分块为 $\boldsymbol{C}_1=(\boldsymbol{C}_{1\mathrm{ll}} \quad \boldsymbol{C}_{1\mathrm{lr}} \quad \boldsymbol{C}_{1\mathrm{rl}} \quad \boldsymbol{C}_{1\mathrm{rr}})$.

根据不变零点的定义，可以证明 $\boldsymbol{A}_{+}$的特征根即为 $\boldsymbol{P}_{21}(s)$的不变零点. 在构造降阶控制器时，要引入2个代数 Riccati 方程(ARE)：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_1)+(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\\&\boldsymbol{X}[\gamma^{2}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_{12}^{+}(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_{12}^{+})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{X}+\\&\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{12}^{\perp}(\boldsymbol{D}_{12}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Y}\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZH}}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZH}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{Y}[\gamma^{-2}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1-\\&(\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_2]\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZH}}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_{21}^{+}\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{L}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{D}_{12}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2$

$\boldsymbol{L}_{\mathrm{H}}$ 是合理选择的矩阵，它使得

$$\{\lambda(\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZH}})\}-\{\lambda(\boldsymbol{A}_{+})\}\subset C^{-}\tag{6}$$

当得到的解满足 $\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{Y}\geqslant\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ 半正定，且

$$\gamma^{2}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}>0\tag{7}$$

可以构造出全阶控制器. 由于式(3)的形式，可以将式(5)化为低阶的 ARE.

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{A}_{+}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{+}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}+\\&\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}(\gamma^{-2}\boldsymbol{C}_{1\mathrm{rr}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{1\mathrm{rr}}-\boldsymbol{C}_{22\mathrm{rr}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{22\mathrm{rr}})\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\in\mathbf{R}^{r\times r}$. 可以证明[5]式(5)的解 $\boldsymbol{Y}$ 可以由式(8)的解扩展得到：

$$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0} & \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\end{bmatrix}\tag{9}$$

在构造控制器时，存在两个自由参量，合理的选择可以得到阶数小于 n_{k} 的控制器.

3 主要结果

从可观测性角度对上面的控制器给出解释.

引理2 令矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在虚轴上没有特征根，并且设其特征根满足

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}(\lambda_1)\leqslant\mathrm{Re}(\lambda_2)\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}(\lambda_m)<\\&0<\mathrm{Re}(\lambda_{m+1})\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}(\lambda_n)\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{Re}(\cdot)$表示$\cdot$的实部. 则 ARE：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{R}\boldsymbol{X}=0$ 的镇定解 $\boldsymbol{X}$ 使得

$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{X})=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,-\bar{\lambda}_{m+1},-\bar{\lambda}_n\}$$

证明 与 ARE：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{R}\boldsymbol{X}=0$ 对应的

Hamilton 矩阵为

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置. 则 $\boldsymbol{H}$ 的特征根为 $\{\lambda_1,-\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_m,-\bar{\lambda}_{m+1},\cdots,\lambda_n,-\bar{\lambda}_n\}$, 根据 ARE 的镇定解构造求解过程[6], 可知引理 2 成立.

考察式(8)的形式, 显然解 $\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}$ 使得 $\boldsymbol{A}_{+}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}(\gamma^{-2}\boldsymbol{C}_{1\mathrm{rr}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{1\mathrm{rr}}-\boldsymbol{C}_{22\mathrm{rr}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{22\mathrm{rr}})$的特征根为与 $\boldsymbol{A}_{+}$的特征根关于虚轴对称的值.

令　$\boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_{21}^{+}\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{L}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{D}_{12}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{Y}^{*}[\gamma^{-2}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1-(\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_2]$

根据式(9)的特点, 可以得到 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}}$ 的特征根为: 通过 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{H}}$ 得到的使得 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{13} & \boldsymbol{A}_{14}\end{bmatrix}$稳定的特征根, $\boldsymbol{A}_{-}$的特征根, 与 $\boldsymbol{A}_{+}$的特征根关于虚轴对称的根. 构造 H_∞ 降阶控制器主要由以下的步骤[5]得到:

1) 利用式(4)、式(5)求得的 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$, 得到全阶 H_∞ 控制器;

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}_\infty(s)=\boldsymbol{K}_1^{-1}(s)\boldsymbol{K}_2(s)\\
&\boldsymbol{K}_1(s)=\boldsymbol{C}_{\mathrm{K}}(s)(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}})^{-1}\hat{\boldsymbol{B}}_2+\boldsymbol{\Pi}^{-1}\\
&\boldsymbol{K}_2(s)=\boldsymbol{C}_{\mathrm{K}}(s)(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}})^{-1}H_\infty+\\
&\quad\boldsymbol{N}(s)\boldsymbol{D}_{21}^{+}+\boldsymbol{W}(s)(\boldsymbol{D}_{21}^{\perp})^{\mathrm{T}}\\
&\boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}}=\boldsymbol{A}+\gamma^{-2}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1+H_\infty\boldsymbol{C}_2=\\
&\quad\boldsymbol{A}_{\mathrm{ZH}}+\boldsymbol{Y}[\gamma^{-2}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_1-(\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_2]\\
&\boldsymbol{C}_{\mathrm{K}}(s)=-\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{F}_\infty\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{N}(s)\boldsymbol{D}_{21}^{+}\hat{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{Z}+\\
&\quad\boldsymbol{W}(s)(\boldsymbol{D}_{21}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_2\\
&\hat{\boldsymbol{B}}_2=\boldsymbol{B}_2+\gamma^{-2}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{12}\\
&\hat{\boldsymbol{C}}_2=\gamma^{-2}\boldsymbol{D}_{21}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{C}_2\\
&\boldsymbol{F}_\infty=-\boldsymbol{D}_{12}^{+}\boldsymbol{C}_1-\boldsymbol{D}_{12}^{+}(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{D}_{12}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\
&\boldsymbol{H}_\infty=-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{D}_{21}^{+}-\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{D}_{21}^{+}\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{21}^{+}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{D}_{21}^{\perp})^{\mathrm{T}}\\
&\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{I}-\gamma^{-2}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{X})^{-1}\\
&\boldsymbol{\Pi}^{-1}=(\boldsymbol{D}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_{12})^{-1}
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

在这个控制器中, $\boldsymbol{N}(s)$ 和 $\boldsymbol{W}(s)$ 是两个自由参量.

2) 选择 $\boldsymbol{W}(s)$, 得到阶数为 n_{k} 的控制器; 令

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_{n_y-w_1}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times(n_y-w_1)} \tag{12}$$

取

$$\boldsymbol{W}(s)=-(-\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{F}_\infty\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{N}(s)\boldsymbol{D}_{21}^{+}\hat{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{Z})\boldsymbol{V} \tag{13}$$

这样选取的 $\boldsymbol{W}(s)$ 使得 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}}$ 的部分特征根不可观而降阶.

3) 选择 $\boldsymbol{N}(s)$, 使控制器阶数再降低 $m(m\leqslant r)$阶

引理 3[5]　取 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\in\mathbf{R}^{r\times m}$满足 $\mathrm{rank}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}=m$ 和

$$\boldsymbol{A}_{+}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{J}\quad\boldsymbol{J}\in\mathbf{R}^{m\times m} \tag{14}$$

成立. 当秩条件

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{21}^{+}\hat{\boldsymbol{C}}_2\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{V}^{\perp}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}\end{bmatrix}=m \tag{15}$$

成立时, 存在 $\boldsymbol{N}(s)$ 满足

$$(-\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{F}_\infty+\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_{21}^{+}\hat{\boldsymbol{C}}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Z}\boldsymbol{V}^{\perp}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}=0 \tag{16}$$

定理 2　根据式(14)~式(16)选择的 $\boldsymbol{N}(s)$ 使得控制器的阶数降低 m 阶.

证明　本文从可观测性的角度给出证明.

全阶控制器式(11)中自由参量 $\boldsymbol{W}(s)$ 和 $\boldsymbol{N}(s)$的选择, 可将控制器的形式简化为如下方式:

$$\boldsymbol{K}(s)=-\boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}}(s\boldsymbol{I}-\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}+\tilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\hat{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}})^{-1}\cdot(\tilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Omega}-\tilde{\boldsymbol{H}}_\infty)+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Omega} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}=(\boldsymbol{V}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}}\boldsymbol{V}^{\perp}\\
&\tilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}}=(-\boldsymbol{\Pi}^{-1}\boldsymbol{F}_\infty\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_{21}^{+}\hat{\boldsymbol{C}}_2\boldsymbol{Z})\boldsymbol{V}^{\perp}\\
&\tilde{\boldsymbol{B}}_2=(\boldsymbol{V}^{\perp})^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{B}}_2\\
&\tilde{\boldsymbol{H}}_\infty=(\boldsymbol{V}^{\perp})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_\infty\\
&\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{D}_{21}^{+}+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{D}_{21}^{\perp})^{\mathrm{T}}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

显然, 控制器的状态空间形式为 $(\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}-\tilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\tilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}},\tilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Omega}-\tilde{\boldsymbol{H}}_\infty,-\boldsymbol{\Pi}\tilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}},\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Omega})$.

根据 $\boldsymbol{V}$ 的形式及(9)式, 可知

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}=\begin{bmatrix}* & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & \boldsymbol{A}_{-} & \boldsymbol{0}\\ * & * & \boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\end{bmatrix} \tag{19}$$

其中, * 表示不感兴趣的部分; 而

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{Y}}=\boldsymbol{A}_{+}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}(\gamma^{-2}\boldsymbol{C}_{1\mathrm{rr}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{1\mathrm{rr}}-\boldsymbol{C}_{22\mathrm{rr}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{22\mathrm{rr}})$$

根据前面的讨论可知, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}$ 的特征根和 $\boldsymbol{A}_{+}$的特征根关于虚轴对称. 根据式(16)、式(18), 可知

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_m\end{pmatrix}=0 \tag{20}$$

式(14)中 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}$ 通常由 $\boldsymbol{A}_{+}^{\mathrm{T}}$的特征向量构成. 则 $\boldsymbol{J}$ 为一对角阵, 其对角元为 $\boldsymbol{A}_{+}^{\mathrm{T}}$的一些特征根. 令

$$\boldsymbol{A}_{+}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_m\end{bmatrix} \tag{21}$$

下面证明 $-\lambda_1,\cdots,-\lambda_m$ 是 $\tilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}-\tilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\tilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}}$ 的特征

根. 由式(8),有

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{A}_{+}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}=\boldsymbol{0} \tag{22}$$

两边右乘 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}$,及(14)式,有

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}=-\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\boldsymbol{J} \tag{23}$$

则

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{r}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}(-\boldsymbol{J}) \tag{24}$$

根据式(19),可以得到

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}(-\boldsymbol{J}) \tag{25}$$

在式(20)的两边左乘$-\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}$,加到式(25)中,得到

$$(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}-\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}(-\boldsymbol{J}) \tag{26}$$

因此,$-\lambda_1,\cdots,-\lambda_m$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}-\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}}$ 的特征根,且$(\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}}$ 中各列分别是其相应的特征向量.

不失一般性,假定 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}-\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}}$ 可以对角化,令其除了$(\boldsymbol{0}\quad \boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}})^{\mathrm{T}}$ 的各列其余的特征向量分别为 $\zeta_1,\cdots,\zeta_{n_{\mathrm{k}}-m}$. 取

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\left(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n_{\mathrm{k}}-m},\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}\end{pmatrix}\right) \tag{27}$$

则有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}-\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}})\boldsymbol{T}^{-1}\\ -\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}}\boldsymbol{T}^{-1}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc}* & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{J}\\ * & \boldsymbol{0}\end{array}\right) \tag{28}$$

因此系统 $(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}-\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}},\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Omega}-\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\infty},-\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}},\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Omega})$ 中有 m 个特征根是不可观的,因此降阶控制器的阶数为$(n_{\mathrm{k}}-m)$.

4 事例说明

系统

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2\\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{D}_{11} & \boldsymbol{D}_{12}\\ \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{D}_{21} & \boldsymbol{D}_{22}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c:c}2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right]$$

有不稳定的不变零点 $z=1$,根据上面的讨论,可知当系统 H_∞ 控制问题可解时,存在静态控制器,给定 $\gamma=10$,可以得到静态控制器 $\boldsymbol{K}=[-13.903\quad 6.451\ 6]$. 需要注意的是,自由参量的选择要满足 $\|\boldsymbol{N}(s)\|_\infty<\gamma$,因此由式(14)~式(16)得到的 $\boldsymbol{N}$ 必须满足 $\bar{\sigma}(\boldsymbol{N})<\gamma$. 因此按这种构造方法,有时候满足式(14)、式(15)的秩数 m,不能得到阶次为$(n_{\mathrm{k}}-m)$的控制器. 以文献[5]中例子为例,当 $\lambda_1=3$ 固定,$\lambda_2<4.75$ 时可以得到 1 阶控制器;$4.75<\lambda_2<5.3$ 时,可以得到 2 阶控制器;$\lambda_2>5.3$ 时无法降阶. 尽管取 $\lambda_1=3$ 的 2 个特征向量构成 $\boldsymbol{V}_{\mathrm{m}}$ 总可以满足条件(14)式和(15)式,以上面的例子来说,当 $\gamma<7.0$,没有静态控制器,尽管条件(14)式和(15)式满足.

此外,在某些特殊的条件下,可以得到进一步降阶的控制器. 对于降阶控制器系统 $(\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{Y}}-\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}},\widetilde{\boldsymbol{B}}_2\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Omega}-\widetilde{\boldsymbol{H}}_{\infty},-\boldsymbol{\Pi}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{K}},\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\Omega})$ 可能存在着不可控的模态,如果利用这些信息,有可能进一步降阶. 以文献[5]例子为例,当 $\lambda_1=1$ 或 $\lambda_1=2$ 时,λ_2 在很多取值情况下都可以得到静态控制器.

5 结束语

奇异 H_∞ 控制问题利用系统矩阵的特点可以显式构造出低于广义系统阶次的降阶控制器. 而利用系统的不稳定零点可以进一步降阶,因为部分这些零点关于虚轴对称的点构成控制器的极点,而合适的选择控制器自由参量可以使得这些零点不可观而降阶.

参考文献(References)

[1] Doyle J C, Glover K, Khargonekar P P, *et al*. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems[J]. IEEE Trans Auto Contr, 1989, AC-34(8):831~847

[2] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas [J]. Automatica, 1994, 30(8):1307~1317

[3] Xin X, Guo L, Feng C B. Reduced-order controllers for continuous and discrete-time singular H_∞ control problems based on LMI [J]. Automatica, 1996, 32(11):1581~1585

[4] 曾建平. 基于 LMI 的 H_∞ 控制问题降阶控制器的存在性研究[D]. 北京:北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 2000

Zeng Jianping. Study on the existence of reduced-order controllers for general H_∞ control problem LMI-based[D]. Beijing: School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2000(in Chinese)

[5] Takao Watanabe, Anton A Stoorvogel. Plant zero structure and further order reduction of a singular H_∞ controller[J]. Int J Robust Nonlinear Control, 2002,12:591~619

[6] Zhou Kemin, Doyle J C, Glover K. Robust and optimal control [M]. Prentice-Hall Inc,1996. 327~372

[7] 程 鹏. 线性系统理论[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1987. 43~52

Cheng Peng. Linear system theory[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1987. 43~52(in Chinese)