有限体积法中面积分离散格式的精度分析

马 亮 李亭鹤
(北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系)

摘 要: 讨论了应用顶点中心格式对欧拉方程进行有限体积离散时的精度,详细推导了顶点中心格式在平滑网格和扭曲网格上的截断误差,同时与中心格式和顶点格式进行了比较. 格式精度分析采用泰勒级数展开的方法. 分析结果表明:顶点中心格式和顶点格式类似,总能达到至少是一阶的精度,并且可以通过加密网格的办法减少误差,而且顶点中心格式更适合于分区计算. 通过圆弧亚音速绕流和 NACA0012 翼型绕流流场的数值计算,验证了分析的结论.

关 键 词: 离散化; 精度; 泰勒级数; 有限体积法
中图分类号: O 35
文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2000)05-0530-05

用有限体积法求解欧拉或 NS 方程在计算流体力学(CFD)领域已得到广泛的应用. 有限体积法基于方程的积分形式,这种形式能保证方程在离散过程中满足守衡条件. 在离散过程中,有限体积法需要对计算网格上的控制体进行表面积分近似. 根据控制体的不同取法,有限体积法中最常见的格式可以分为 2 类:中心格式和顶点格式.

中心格式的主要特点是流场物理量位于计算网格单元的中心,每一个网格单元即是一个有限控制体. 这种格式因其结构简单而被大量地应用于计算流体力学中. 顶点格式的主要特点是物理量处于网格单元的顶点,即网格结点,而控制体仍取为各个网格单元. 对某个网格节点上的物理量进行近似计算时,需要牵涉到公共于该点的所有控制体内的近似值. 在二维流动的问题中,要涉及 9 个节点上的信息. 这 2 类格式各有优缺点[1].

近年来,在复杂流场的数值计算中出现了另一种有限体积格式——顶点中心格式,它让物理变量处于网格的节点上,而控制体为围绕该点的虚拟网格. 这种格式吸取了中心格式结构简单的长处,又保留了顶点格式中物理量位于网格节点的特点,已有人将此格式应用于复杂流场的计算[2],但还没有对此格式的详细精度分析. 本文以文献[1]的分析方法为基础,采用 Taylor 级数展开的方法,给出了顶点中心格式在不同网格上的精度,并与传统的格式进行了比较,从理论上说明了顶点中心格式的优点.

1 有限体积离散

以二维 Euler 方程为例,在每一个边界为 $\partial V_{i,j}$,面积为 $V_{i,j}$的网格单元上进行有限体积离散,有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}W\right)_{i,j} = Q_{i,j} = \frac{-1}{V_{i,j}}\left(\oint_{\partial V_{i,j}} F_1 \cdot n_x \mathrm{d}s + \oint_{\partial V_{i,j}} F_2 \cdot n_y \mathrm{d}s\right) \quad (1)$$

其中

$$W = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho E]^{\mathrm{T}}$$
$$F_1 = [\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho uv \quad \rho Hu]^{\mathrm{T}}$$
$$F_2 = [\rho v \quad \rho uv + p \quad \rho v^2 + p \quad \rho Hv]^{\mathrm{T}}$$

ρ、u、v、E、H、p 分别为密度、速度、总能量、焓和压力. 通过对表面积分进行数值近似,可以计算出通量 $Q_{i,j}$. 有限体积法将表面积分离散为单元 4 个面上的积分之和,不同的有限体积格式对表面积分的处理不同. 以下简单介绍中心格式、顶点格式和顶点中心格式对空间的离散形式.

对于中心格式,物理量位于控制单元中心(图 1),单元控制体表面的物理量值取为公共于该面的单元控制体中心点的物理量的平均,即

$$W_{i+1/2,j} = (W_{i+1,j} + W_{i,j})/2 \quad (2)$$

进一步认为单元内物理量的变化等于单元中心点

收稿日期: 1999-03-24
基金项目: 航空科学基金资助项目(99A51037)
作者简介: 马 亮(1965 -),男,山西汾阳人,副教授,100083,北京.

上物理量的变化率.

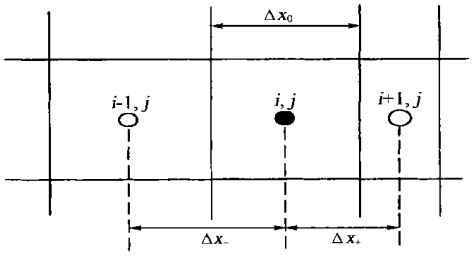


图 1　平滑网格上的中心格式

对于顶点格式,物理量位于控制单元的顶点上(图 2),单元边界面中点处的物理量取为端点处物理量的平均,即

$$W_{OB} = (W_O + W_B)/2 \tag{3}$$

每点的物理量变化率取为围绕该点的 4 个有限单元体内物理量变化率的算术平均.

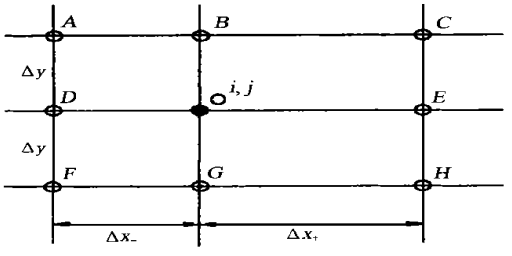


图 2　平滑网格上的顶点格式

对于顶点中心格式,物理量位于网格节点上,控制体取为围绕该点的一"虚拟"网格单元,该单元的边界由相邻网格的中心连线构成. 对控制体进行表面积分时,各面上的变量值取为相邻节点上物理量的平均值,即(2)式. 顶点中心格式的这一特殊构造使整个格式变得简洁,兼顾了顶点格式和中心格式的优点,而且可以避免由于计算域分区等人为间断引起的误差. 在每个网格点上都有

$$\frac{\partial}{\partial t}W\Big|_{i,j} \approx Q_{i,j} \tag{4}$$

2　误差分析

方程(1)的微分形式为

$$\frac{\partial}{\partial t}W = -\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial y} \tag{5}$$

为简便起见,在误差分析中只考虑任意函数 ϕ 的一阶导数的数值近似. 设 ϕ 可微分,由高斯定理可以给出 ϕ 在 x 方向的一阶偏导数:

$$\phi_x = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_{\partial V}\phi n_x \mathrm{d}s}{\iint_V 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \tag{6}$$

假定函数 ϕ 及其导数在所选点和相邻点上的值都已知,并且相邻点上的值能够用该点值的泰勒级数展开式表示. 这样,采用有限体积法计算(6)式右边的值,可以与 ϕ_x 的精确值做比较,从而实现精度的分析[1].

本文的分析将在 2 类网格上进行:一类是沿 x 方向伸展的平滑网格;另一类是具有斜坡突起的扭曲网格.

2.1　平滑网格

中心格式在网格单元 $V_{i,j}$ 的中心点上对一阶导数进行数值近似(图 1),有

$$\phi_x\mid_{\mathrm{num}} = \phi_x\mid_{i,j} + \phi_x\mid_{i,j}\frac{\Delta x_+ + \Delta x_- - 2\Delta x_0}{2\Delta x_0} + \frac{1}{2}\phi_{xx}\mid_{i,j}\frac{\Delta x_+^2 - \Delta x_-^2}{2\Delta x_0} + O(\Delta x^2) \tag{7}$$

(7)式中右边第 2 项是零阶项,如果不改变 Δx_0、Δx_- 和 Δx_+ 的关系,那么即使细化网格也不能减小该误差项. 在等距网格上,零阶和一阶误差项都消失了,格式可达二阶精度.

如图 2 所示,顶点格式在 O 点的一阶导数近似式为

$$\psi_x\mid_{\mathrm{num}} = \psi_x\Big|_O + \frac{1}{2}\psi_{xx}\Big|_O \cdot (\Delta x_+ - \Delta x_-) + O(\Delta x^2) \tag{8}$$

(8)式中没有出现零阶误差项,因而至少有一阶精度,而且在等距网格上都能达到二阶精度.

顶点中心格式如图 3 所示,它在 O 点的一阶导数近似式为

$$\psi_x\mid_{\mathrm{num}} = \psi_x\Big|_O + \frac{1}{2}\psi_{xx}\Big|_O \cdot (\Delta x_+ - \Delta x_-) + O(\Delta x^2) \tag{9}$$

可以看到,顶点中心格式与 Hall 的顶点格式有相同的精度,即至少有一阶精度.

2.2　扭曲网格

采用中心格式在网格单元 $V_{i,j}$ 的中心点上对一阶导数进行数值近似(图 3),有

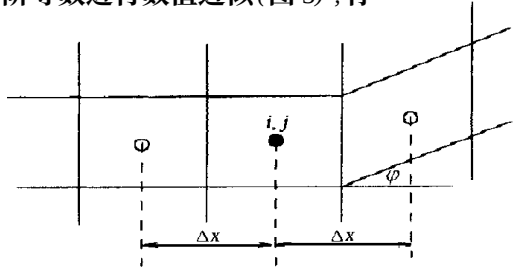


图 3　扭曲网格上的中心格式

$$\phi_x \mid_{\text{num}} = \phi_x\Big|_{i,j} + \frac{1}{4}\phi_y\Big|_{i,j}\tan\varphi + \frac{1}{4}\phi_{xy}\Big|_{i,j}\Delta x\tan\varphi + \frac{1}{16}\phi_{yy}\Big|_{i,j}\Delta x\tan^2\varphi + O(\Delta x^2) \tag{10}$$

可以看出,(10)式中的零阶误差依赖于扭曲角 φ,如果此角度不减小,即使细化网格也不会使该项误差减小.因此,只有在完全正交的网格上,该项误差才会消失.

顶点格式在扭曲网格上对一阶导数的数值近似为

$$\phi_x \mid_{\text{num}} = \phi_{x\ i,j} + \frac{1}{4}\phi_{xy}\ _{i,j}\Delta x\tan\varphi + O(\Delta x^2) \tag{11}$$

其精度至少是一阶的,数值误差随网格的细化而减小.

采用顶点中心格式在扭曲网格(图 4)上对 A 点上的一阶导数进行数值近似得

$$\phi_x \mid_{\text{num}} = \phi_x\Big|_A + \frac{1}{2}\phi_{xx}\Big|_A(\Delta x_+ - \Delta x_-) + \frac{\Delta x_+\tan\varphi(\Delta x_+\tan\varphi + \Delta y_- - \Delta y_+)}{2(\Delta x_+ + \Delta x_-)}\phi_{yy}\Big|_A + \frac{\Delta x_+^2\tan\varphi}{\Delta x_+ + \Delta x_-}\phi_{xy}\Big|_A + O(\Delta x^2, \Delta y^2) \tag{12}$$

可以看到,顶点中心格式和顶点格式类似,其精度至少是一阶的,数值误差随网格的细化而减小,但只涉及 5 个结点的信息.

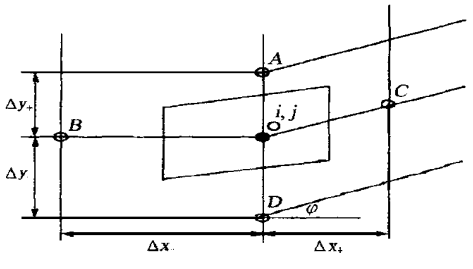


图 4 扭曲网格上的顶点中心格式

3 数值方法

数值方法以 Jameson[3] 的有限体积法为基础,加入二阶和四阶人工粘性,采用五步龙格-库塔法求解时间相关的差分方程组.为了使数值解尽快收敛,采用了当地时间步长和隐式残差平滑等加速收敛技术.

固壁采用滑移边界条件,壁面的法向速度为零.对于顶点格式和顶点中心格式,假定固壁外存在一层虚拟网格,该层网格上的物理变量值由内层网格上的值外插获得,最后进行一次壁面法向速度为零的修正.对于中心格式,通过壁面的通量为零,而壁面压力则由内层节点外差求得.远场边界根据黎曼不变量的概念,采用无反射边界条件.

4 数值结果和讨论

4.1 圆弧绕流

圆弧厚度为 10 %,来流马赫数为 0.5.采用网格数为 65 ×33 的粗网格和 129 ×65 的细网格.如图 5 所示,网格在圆弧的前后缘处有较大的扭曲.

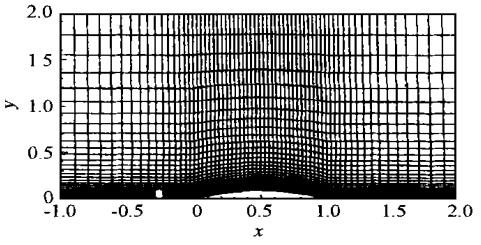


图 5 圆弧绕流粗网格(65 ×33)

图 6 是用中心格式、顶点格式和顶点中心格式在粗网格上计算的等压线,可见在网格平滑的区域,结果是一致的.

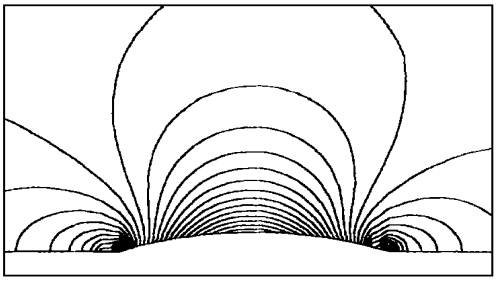


图 6 粗网格上计算的等压图

图 7 是粗网格上计算的局部等压线.可以看到,对于中心格式,等压线在网格扭曲较大的前后缘处有明显的抖动,而顶点格式和顶点中心格式则较光滑.图 8 和图 9 是在细网格上计算的等压线.与粗网格相比,中心格式的等压线在前后缘处的抖动依然存在,而顶点格式和顶点中心格式在相应区域的等压线则变得更光滑了.

4.2 NACA0012 翼型绕流

来流马赫数为 0.8,无攻角,采用网格数为 85 ×43 的粗网格(图 10)和 169 ×85 的细网格.

计算结果表明,在翼型的后缘处有与 4.1 节同样的现象.另外,由于采用 C 型网格,用中心格式和顶点格式计算的等压线在尾缘后的上下网格分割线(cut)附近出现非物理间断,如图 11a 和

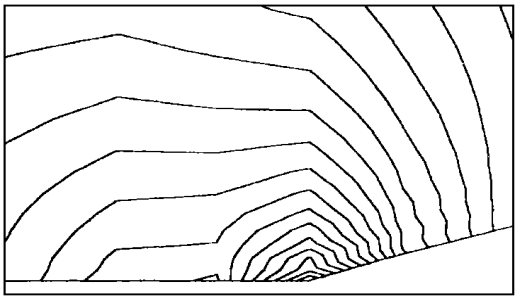


图 7　中心格式在粗网格上计算的前缘处等压图

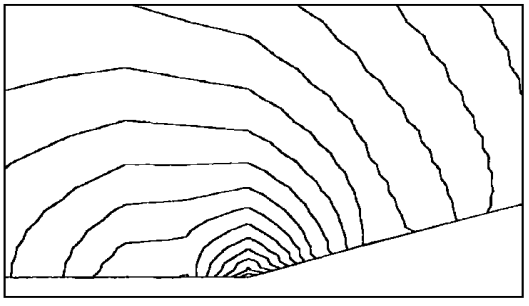


图 8　中心格式在细网格上计算的前缘处等压图

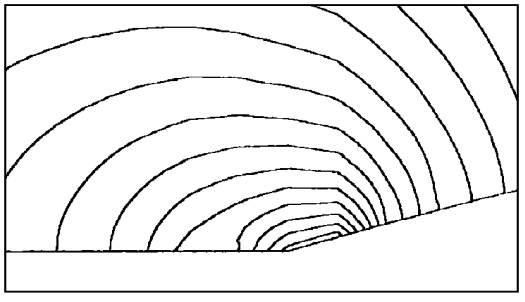


图 9　顶点中心格式在细网格上计算的等压图

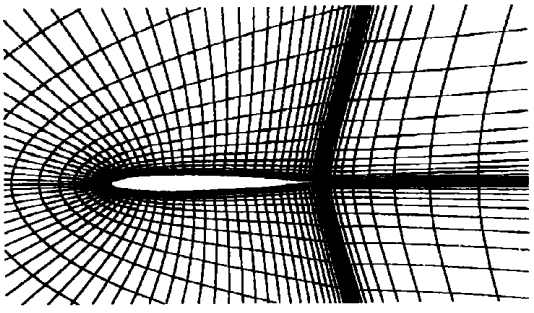
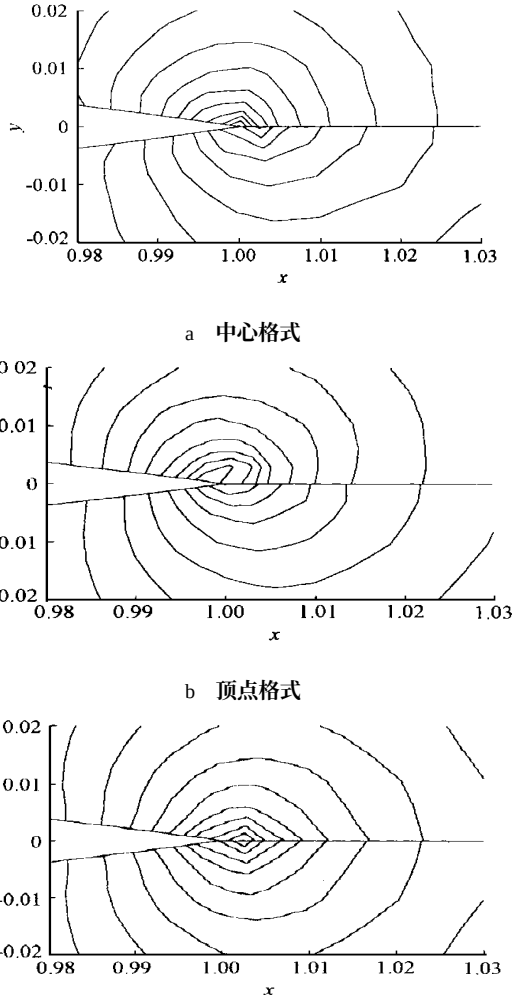


图 10　NACA0012 翼型绕流计算网格(局部)

11b 所示,而用顶点中心格式可避免这种现象,如图 11c,因而更适合于分区计算.

由此可以看到,有限体积法的中心格式由于其本身固有的零阶误差,不能通过加密网格来提高精度,要保持较好的计算精度,网格必须充分光滑(正交). 顶点格式和顶点中心格式精度高于中心格式,对于光滑性较差的网格也能保持一阶精度,可以通过加密网格来减小误差,因而更适合于绕复杂外形流场的计算. 而根据顶点中心格式的构造特点,它适合于复杂外形绕流流场的分区计算.



a　中心格式

b　顶点格式

c　顶点中心格式

图 11　NACA0012 翼型尾缘处等压线

5　结　论

本文对有限体积法中的中心格式、顶点格式和顶点中心格式在平滑网格和扭曲网格上的离散误差作了分析,并通过数值计算得到如下结论:

1) 在充分光滑(正交)的网格上,这 3 种格式有相同的一阶精度;

2) 在扭曲网格上,中心格式有零阶误差,不能通过加密网格来减小误差,而顶点格式和顶点中心格式仍可保持一阶精度;

3) 顶点中心格式更适合于复杂外形绕流流场的分区计算.

参　考　文　献

[1] Rossow C C, Kroll N, Radespiel R, *et al*. Investigation of the accu-

racy of finite volume methods for 2- and 3- dimensional flows[J]. AGARD-CPP, 1988, 437(17):1～11.

[2] Radespiel R, Rosow C C, Swanson R C, *et al*. An efficient cell-vertex multigrid scheme for the three dimensional Navier-Stokes equations[J]. AIAA Journal, 1990, 28(8):1464～1472.

[3] Jameson A, Schmidt W, Turkel E, *et al*. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time stepping schemes[R]. AIAA-81-1259, 1981.

Analysis of the Accuracy of the Spatial Discretization Schemes for Surface Integrals in Finite Volume Method

MA Liang LI Ting-he

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics)

Abstract: The order of accuracy of Vertex-Centered finite volume scheme for the unsteady Euler equations is investigated and compared with that of cell-centered and cell-vertex schemes. An error analysis using Taylor series expansion is applied. It shows that the accuracy of the vertex-centered scheme, similar to the cell-vertex scheme, is at least first order on skewed meshes and the error terms can be reduced by a mesh refinement and is suitable for multiblock computation. On smooth grids all three schemes exhibit an accuracy of almost second order. Subsonic internal flow over circular arc and transonic flow around NACA0012 airfoil are calculated by using the three different spatial discretization schemes. Numerical results confirm the technique statement.

Key words: discretization; precision; Taylor series; finite volume method

本刊加入 China Info 网络信息服务系统的声明

为了实现科技期刊编辑、出版发行工作的电子化,推进科技信息交流的网络化进程,我刊现已入网“China Info(中国信息)网络资源系统《电子期刊》”,所以,向本刊投稿并录用的稿件文章,将一律由编辑部统一纳入 China Info 信息服务系统,进入因特网提供信息服务。凡有不同意将自己稿件纳入因特网传送交流的作者,请另投它刊。本刊所付稿酬包含刊物内容上网服务报酬,不再另付。

China Info 系统是由国家科技部立项,中国科技信息研究所组织实施,万方数据网络中心编辑制作的开放式因特网络信息资源系统,《电子期刊》作为国家“九五”科技攻关项目,是 China Info 系统中的重要信息服务栏目,截止 1998 年 10 月已有 120 种期刊的全文内容同步制作上网(网址:http://www.chinainfo.gov.cn/periodical),将在近 1～2 年内增加至 500 种科技期刊。本刊内容将按照统一格式显示,制作编入 China Info 系统电子期刊,读者可上因特网进入 China Info 系统免费(一年后开始酌情收费)查询检索本刊内容,也欢迎各界朋友通过 China Info 系统向我刊提出宝贵意见和建议。

《北京航空航天大学学报》编辑部