离散数学中与量词有关的推理规则

何自强

(北京航空航天大学 计算机科学与工程系)

摘 要：清楚地叙述了自然推理系统中的存在量词消去规则和全称量词引入规则满足的条件,而这些条件在许多离散数学教科书中叙述得相当含糊.与某些教科书中存在量词消去规则只能用于无自由变元的公式不同,按照本文给出的条件,存在量词消去规则也可以用于有自由变元的公式,因而增强了系统的推理能力.引进了解释之间和赋值之间关于公式集的等价性,从而证明了系统是可靠的,即一个证明中的结论是其前提的逻辑推论.

关 键 词：谓词逻辑；逻辑系统；离散数学；可靠性；量词

中图分类号：O 141.12

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2000)04-0432-03

在许多离散数学教科书[1]~[5]所使用的一阶逻辑自然推理系统中有四条关于量词的推理规则,即全称量词引入规则、全称量词消去规则、存在量词引入规则、存在量词消去规则.在全称量词引入规则和存在量词消去规则中,结论不是前提的逻辑推论.因此,使用它们时要十分小心,稍有不慎就会得出错误的结果.在某些数理逻辑教科书[6]中给出了更为严格的自然推理系统.但是,这些系统不如离散数学教科书中给出的系统直观,不易为计算机专业本专科学生理解.为了既保留推理系统的直观性,又消除系统的不严格性,本文将给出使用这四条推理规则必须满足的条件,并证明该自然推理系统的可靠性.

1 自然推理系统

一阶语言使用的符号、项和公式的定义、一阶语言的语义、一个项 t 对于一个公式 A 中的变元 x 可代入等概念及有关名词,请参阅文献[7],本文不再赘述.为方便起见,把常元称为 0 元函数符号,把函数符号和谓词符号统称为非逻辑符号.如果变元 x 是公式集 Γ 中的某个公式的自由变元,则称 x 为 Γ 中的自由变元.从变元集到解释 I 的论域 D_I 的函数称为 I 中赋值.若 v 是解释 I 中赋值,d 是 I 的论域 D_I 中的元素,将变元 x 的值改为 d 后由 v 得到的 I 中赋值记为 $v[x/d]$.用 $A[x/t]$ 表示用项 t 代入公式 A 中变元 x 的所有自由出现后得到的公式.公式 A 在解释 I 和 I 中赋值 v 下所代表的命题记为 $I(A)(v)$,若它是真命题,则记为 $I(A)(v)=1$.如果对于公式集 Γ 中的每个公式 A,$I(A)(v)=1$,则称 I 和 v 满足 Γ.若公式 $A_1\wedge\cdots\wedge A_n\rightarrow B$ 是永真式,则称 B 是 A_1,$\cdots$,A_n 的逻辑推论,记为 $A_1,\cdots,A_n\models B$.

本文所讨论的自然推理系统的推理规则为:前提引入规则、置换规则、假言推理规则、附加规则、化简规则、拒取式规则、假言三段论规则、析取三段论规则、合取引入规则、构造性二难规则以及四个有关量词的规则.本文只列出四个有关量词的规则,其余规则可参见文献[8].

1) 全称量词消去规则(简称 UI 规则).由 $\forall xA$ 推出 $A[x/t]$,其中 t 是对于公式 A 中的 x 可代入的项.

2) 全称量词引入规则(简称 UG 规则).由 A 推出 $\forall xA$,其中 x 不是前提集中的自由变元.

3) 存在量词引入规则(简称 EG 规则).由 $A[x/t]$ 推出 $\exists xA$,其中 t 是对于公式 A 中的 x 可代入的项.

4) 存在量词消去规则(简称 EI 规则).由 $\exists xA$ 推出 $A[x/f(y_1,\cdots,y_n)]$,其中 $y_1,\cdots,y_n$ 是公式 $\exists xA$ 中的所有自由变元,f 是在前提、结论以及证明的前面步骤中均未出现过的 n 元函数符号,$f(y_1,\cdots,y_n)$ 是对于 A 中的 x 可代入的项.

对于存在量词消去规则,需要多解释几句.设要由前提 $A_1,\cdots,A_k$ 证明结论 B,已证明了 m 步 $C_1,\cdots,C_m$,需要用存在量词消去规则由 $\exists xA$ 推出 $A[x/f(y_1,\cdots,y_n)]$,这时 $C_1,\cdots,C_m$ 就是证明

收稿日期：1998-12-11

作者简介：何自强(1943—),男,北京人,副教授,100083,北京.

的前面步骤，f 应是在 $A_1,\cdots,A_k,B,C_1,\cdots,C_m$ 中不出现的 n 元函数符号. 若 $n=0$，即 $\exists xA$ 中没有自由变元，则 f 是 0 元函数符号，即 f 是常元，被推出的公式是 $A[x/f]$.

2 推理系统的可靠性

定义 1 设 Γ 是公式集，I_1 和 I_2 是解释. 如果 I_1 和 I_2 论域相同，即 $D_{I_1}=D_{I_2}$，并且对于在 Γ 中出现的每个非逻辑符号 u，I_1 和 I_2 对于 u 的解释都相同即，$u^{I_1}=u^{I_2}$，则称 I_1 和 I_2 关于 Γ 等价.

定义 2 设 I_1 和 I_2 是解释，f 是函数符号. 如果 $D_{I_1}=D_{I_2}$，并且对于每个不同于 f 的非逻辑符号 u，$u^{I_1}=u^{I_2}$，则称 I_1 和 I_2 除 f 外等价.

定义 3 设 Γ 是公式集，v_1 和 v_2 是解释 I 中的赋值. 如果对于 Γ 中的每个自由变元 x，$v_1(x)=v_2(x)$，则称 v_1 和 v_2 关于 Γ 等价.

引理 1 设 n 是正整数，$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n$ 是公式集，$I_0,\cdots,I_n$ 是解释. 如果 I_i 和 I_{i-1} 关于 Γ_i 等价，$i=1,\cdots,n$，则 I_0 和 I_n 关于 $\bigcap_{i=1}^{n}\Gamma_i$ 等价.

证明 由定义 1 立即得出.

引理 2 设 A 是公式集 Γ 中的公式. 如果解释 I_1 和 I_2 关于 Γ 等价，并且 I_1 中赋值 v_1 和 v_2 关于 Γ 等价，则 $I_1(A)(v_1)=I_2(A)(v_2)$.

证明 对 A 进行归纳.

引理 3 设公式 $\exists xA$ 中的自由变元为 $y_1,\cdots,y_n$，f 是在 A 中不出现的 n 元函数符号，$f(y_1,\cdots,y_n)$是对于 A 中的 x 可代入的项，I 是解释. 存在与 I 除 f 外等价的解释 I' 满足：对于 I 中每个赋值 v，若 $I(\exists xA)(v)=1$，则 $I'(A[x/f(y_1,\cdots,y_n)])(v)=1$.

证明 定义 D_I 上的 n 元函数 g 如下.

对于 D_I 中任意元素 $d_1,\cdots,d_n$，设赋值 v 满足 $v(y_i)=d_i$，$i=1,\cdots,n$. 定义函数值 $g(d_1,\cdots,d_n)$如下：

① 若 $I(\exists xA)(v)=1$，则集合 $\{d\mid I(A)(v[x/d])=1\}$非空，取该集合中的某一元素为 $g(d_1,\cdots,d_n)$；

② 若 $I(\exists xA)(v)=0$，则令 $g(d_1,\cdots,d_n)=a$，其中 a 是 D_I 中某一固定元素.

定义解释 I'如下：

$$D_{I'}=D_I \qquad f^{I'}=g$$

若 u 是不同于 f 的非逻辑符号，则令 $u^{I'}=u^I$.

显然，I'即为满足条件的解释.

定理 若从前提 $A_1,\cdots,A_n$ 可证结论 B，则 $A_1,\cdots,A_n\models B$.

证明 设 $C_1,\cdots,C_m$ 是从 $A_1,\cdots,A_n$ 到 B 的一个证明，记 $\Gamma_0=\{A_1,\cdots,A_n\}$，$\Gamma_i=\{A_1,\cdots,A_n,B,C_1,\cdots,C_{i-1}\}$，$i=1,\cdots,m$.

设解释 I 和 I 中赋值 v 满足前提集 Γ_0.

证明：存在解释 $I_0,\cdots,I_m$ 使得 $I_0=I$，并且对于每个 $i=1,\cdots,m$，I_i 和 I_{i-1}关于 Γ_i 等价，并且只要 I 中赋值 v'和 v 关于 Γ_0 等价，就有 $I_i(C_i)(v')=1$. 令 I_0 为 I，设 i 是正整数，$I_0,\cdots,I_{i-1}$已按要求取定，则由引理 1 知，I_{i-1}和 I_0 关于 Γ_1 等价. 考虑如何取 I_i，分以下几种情况.

① 设 C_i 由前提引入规则得到，即 $C_i\in\Gamma_0$，则取 $I_i=I_{i-1}$. 对每个与 v 关于 Γ_0 等价的 I 中赋值 v'，由引理 2 得到 $I_i(C_i)(v')=I(C_i)(v)=1$.

② 若 C_i 由 C_j 用 UG 规则得到，其中 C_j 为 A，C_i 为 $\forall xA$，变元 x 在前提集 Γ_0 中没有自由出现，则取 $I_i=I_{i-1}$. 显然，I_i 和 I_{i-1}关于 Γ_i 等价. 由归纳假设知，I_{i-1}和 I_{i-2}关于 Γ_{i-1}等价，$\cdots$，I_{j+1}和 I_j 关于Γ_{j+1}等价. 由引理 1 知，I_{i-1}和 I_j 关于Γ_{j+1}等价，即 I_i 和 I_j 关于 Γ_{j+1}等价. 设 v'是与 v 关于 Γ_0 等价的赋值. 任取 D_I 中元素 d，因为 x 在 Γ_0 中没有自由出现，所以赋值 $v'[x/d]$与 v 关于 Γ_0 等价，故由归纳假设知 $I_j(A)(v'[x/d])=1$. 又有 $A\in\Gamma_{j+1}$，I_i 和 I_j 关于 Γ_{j+1}等价，赋值 $v'[x/d]$与 $v'[x/d]$关于 Γ_{j+1}等价，所以 $I_i(A)(v'[x/d])=I_j(A)(v'[x/d])$. 因而得出 $I_i(A)(v'[x/d])=1$. 因此，$I_i(\forall xA)(v')=1$，即 $I_i(C_i)(v')=1$.

③ 设 C_i 由 C_j 用 EI 规则推出，其中 C_j 为 $\exists xA$，C_i 为 $A[x/f(y_1,\cdots,y_s)]$，$y_1,\cdots,y_s$ 是 C_j 中的自由变元，f 是在 Γ_i 中不出现的 s 元函数符号. 因为 $C_j\in\Gamma_i$，所以 f 在 C_j 中不出现. 由引理 3 知，存在与 I_{i-1}除 f 外等价的解释 I_i 满足：对于 I 中每个赋值 v'，若 $I_{i-1}(\exists xA)(v')=1$，则 $I_i(A[x/f(y_1,\cdots,y_s)])(v')=1$.

任取与 v 关于 Γ_0 等价的 I 中赋值 v'，因 $j<i$，由引理 1 知 I_{i-1}和 I_j 关于 Γ_{j+1}等价，而 $C_j\in\Gamma_{j+1}$，故 $I_{i-1}(C_j)(v')=I_j(C_j)(v')=1$. 因此，$I_i(A[x/f(y_1,\cdots,y_s)])(v')=1$，即 $I_i(C_i)(v')=1$.

④ 设 C_i 由 $C_{k_1},\cdots,C_{k_p}$用其它规则推出，则 $C_{k_1}\wedge\cdots\wedge C_{k_p}\to C_i$ 是永真式. 取 $I_i=I_{i-1}$. 任取与 v 关于 Γ_0 等价的 I 中赋值 v'. 因为 $k_1,\cdots,k_p$ 全都小于 i，所以 I_{i-1}和 I_{k_j} 关于 Γ_{k_j+1}等价，又 $C_{k_j}\in\Gamma_{k_j+1}$，故 $I_{i-1}(C_{k_j})(v')=I_{k_j}(C_{k_j})(v')=1$，$j=1,\cdots,p$. 而 $I_{i-1}(C_{k_1}\wedge\cdots\wedge C_{k_p}\to C_i)(v')=1$，故 $I_{i-1}(C_i)(v')=1$，即 $I_i(C_i)(v')=1$.

由上面的证明得出，$I_m(C_m)(v)=1$，即 $I_m(B)(v)=1$. 而 I 和 I_m 关于 Γ_1 等价，并且 $B\in$

Γ_1,所以 $I(B)(v)=I_m(B)(v)=1$. 这就证明了 $A_1,\cdots,A_n\models B$.

3 与某些离散数学教科书的比较

在许多离散数学教科书[1]~[5]中对四条有关量词的推理规则使用时需满足的条件讲得比较含糊,不够明确. 例如,对于使用全称量词引入规则应满足的条件,是这样说的:当 A 对 x 的任意取值都成立,可用全称量词引入规则由 A 推出 $\forall xA$. 这里的"A 对 x 的任意取值都成立"含义就不清楚,并且它是 A 的语义性质,放在这里也是不妥当的. 将其改为"x 不是前提集中的自由变元",意思就清楚得多,并且这完全是一个语法条件,不需考虑公式的语义性质. 另外,对于使用存在量词消去规则应当满足的条件,本文规定得也更明确清楚.

在文献[1]中规定,只有当公式 $\exists xA$ 中没有自由变元时才可使用存在量词消去规则推出 $A[x/c]$,其中 c 是常元. 本文规定,即使公式 $\exists xA$ 中有自由变元,也可使用存在量词消去规则,增强了系统的推理能力. 例如,公式 $\forall x\exists yP(x,y)\rightarrow\exists x\exists y\exists z(P(x,y)\wedge P(y,z))$ 是永真式,因此,$\forall x\exists yP(x,y)\models\exists x\exists y\exists z(P(x,y)\wedge P(y,z))$. 但是,如果不允许对有自由变元的公式使用存在量词消去规则,无法证明这个推理的正确性. 下例表明,用本系统可以证明这个推理的正确性.

例　构造下面推理的证明.

前提:$\forall x\exists yP(x,y)$

结论:$\exists x\exists y\exists z(P(x,y)\wedge P(y,z))$

解

①	$\forall x\exists yP(x,y)$	前提引入
②	$\exists yP(x,y)$	①UI
③	$P(x,f(x))$	②EI
④	$\exists yP(f(x),y)$	①UI
⑤	$P(f(x),g(x))$	④EI
⑥	$P(x,f(x))\wedge P(f(x),g(x))$	③⑤合取引入
⑦	$\exists z(P(x,f(x))\wedge P(f(x),z))$	⑥EG
⑧	$\exists y\exists z(P(x,y)\wedge P(y,z))$	⑦EG
⑨	$\exists x\exists y\exists z(P(x,y)\wedge P(y,z))$	⑧EG

参　考　文　献

[1] 陈进元,屈婉玲. 离散数学(上)[M]. 北京:北京大学出版社,1987.

[2] 左孝凌,李为鉴,刘永才. 离散数学[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1982.

[3] 王遇科. 离散数学[M]. 北京:北京理工大学出版社,1986.

[4] 蔡高火. 离散数学基础[M]. 桂林:广西师范大学出版社,1992.

[5] Stanat D F, Mcallister D F. Discrete mathematics in computer science[M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1977.

[6] 胡世华,陆钟万. 数理逻辑基础[M]. 北京:科学出版社,1981.

[7] 尹宝林,何自强,许光汉,等. 离散数学[M]. 北京:高等教育出版社,1998.

[8] 檀凤琴,何自强. 离散数学[M]. 北京:科学出版社,1999.

Rules of Inference for Quantifiers in Discrete Mathematics

HE Zi-qiang

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Computer Science and Engineering)

Abstract: The conditions satisfied for the existential instantiation and the universal generalization in the natural deduction system are described clear, whereas they are described rather vaguely in many textbooks on discrete mathematics. Contrasting with that the existential instantiation in some textbooks is used only for formulas without free variables, according to the condition we given, it may be also used for formulas with free variables and the ability to reason has increased. Introducing the equivalence between interpretations and the equivalence between assignments with respect to a set of formulas, it is proved that the system is sound, that is, in a proof, the conclusion is a logical consequence of the premises.

Key words: predicate logic; logical systems; discrete mathematics; soundness; quantifier