电阻抗成像的加权 Newton-Raphson 算法[1)]

杜 岩 柳重堪 程吉宽
(北京航空航天大学 电子工程系)

摘 要 利用一个适当的权矩阵对用于电阻抗成像图像重建的 Newton-Raphson 算法作了改进,提出了加权 Newton-Raphson 算法. 该方法能克服普通 Newton-Raphson 方法重建图像时分辨率不均匀性,这种不均匀性来自反问题的病态以及注入电流,电极配置,各像素的几何位置等诸多数学物理因素. 与普通 Newton-Raphson 算法相比,加权 Newton-Raphson 算法的计算量几乎没有增加,但其图像重建效果却有明显改善. 文中还详细讨论了权矩阵的计算方法.

关键词 图像处理; 电阻抗; 断层摄影术; 牛顿型算法; 非线性; 加权; 图像重建
分类号 R 814.49

1 问题的提出

电阻抗成像(Electrical Impedance Tomography 简称 EIT) 是近年来一种引人注目的图像重建新技术. 它利用对物体表面的电流、电压的施加-测量数据来重建物体内部的导电参数(如电阻率、电容率),进而显示出表征该物体内部结构的图像. 其数学模型为

$$\Delta \cdot \sigma \Delta u = 0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 内} \qquad (1)$$

$$-\sigma \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = J \qquad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = u_J^0 \qquad (3)$$

式中 σ 为待求的电导率分布, Ω 为物体所在的空间区域, $\partial\Omega$ 为其边界, u 为未知电势分布函数, J 为边界电流密度分布函数, u_J^0 为相应的边界电势分布函数, n 为边界外法线方向, Δ 为梯度算子. (1)、(2) 式为熟知的 Neumann 问题, (1)、(3) 式为熟知的 Dirichlet 问题, 在 σ 已知时它们的解都是适定的, 两者都称为 EIT 的正问题; 而由(1)、(2)、(3) 式反求 σ 称为 EIT 的反问题. 一般来说, EIT 的反问题是不适定的[1], 这大大增加了 EIT 反问题求解的难度.

求解 EIT 反问题, 一般要构造适当的迭代算法通过解大量的正问题来实现. 解正问题时常用有限元法进行离散化, 在对 σ 进行离散化时, 有两种方式逼近 σ: 传统的分片常数法和文献[2]中介绍的连续插值逼近法, [2]中还指出连续函数逼近法较传统的分片常数逼近法有许多优越性, 本文给出的结果均采用连续函数逼近法逼近 σ.

经过离散化后, EIT 反问题最终可转化为下面的非线性最小二乘问题[3]:

$$\min_{\sigma} \Phi(\sigma) = \min_{\sigma}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \| \boldsymbol{f}_i(\sigma) - \boldsymbol{v}_i \|^2\right\} \qquad (4)$$

其中 p 为电流注入的次数, $\boldsymbol{f}_i$ 为第 i 次电流注入相应的电导率分布到边界电势分布的映射, $\boldsymbol{v}_i$ 为相应的边界电压测量值. $\| \cdot \|$ 为向量的 2-范数.

在求解(4) 式的算法中, Newton-Raphson 类算法是 EIT 图像重建算法中较著名的一类. 本文提出另外一种改进的 Newton-Raphson 算法, 它具有计算简单, 计算量基本不增加等优点, 数值试验表明, 它较一般的 Newton-Raphson 算法有更好的图像重建效果.

2 Newton-Raphson 类算法

在 EIT 的所有图像重建算法中, Newton-Raphson 类算法是较为著名的, 迄今为止, 它们一直被许多 EIT 研究小组所采用. Youkey T J 等人曾将 Newton-Raphson 算法与当时几种比较流行的算法作了比较[4], 他们得出结论, Newton-Raphson 算法是一种性能优异的算法. 原始的 Newton-Raphson 算法本质上是解非线性最小二乘问题的 Gauss-Newton 算法; 其迭代时第 $k+1$ 步的修正量公式为

收稿日期: 1996-11-11 第一作者 男 30 岁 博士生 100083 北京
1) 航空科学基金资助项目

$$\Delta\rho^{k+1} = -(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{g}(\rho^k) \tag{5}$$

其中 $\rho = \sigma^{-1}$ 为未知电阻率分布, $\boldsymbol{J}$ 为目标函数 $\Phi(\rho)$ 的 Jacobi 矩阵, $\boldsymbol{g}(\rho)$ 为其梯度向量. 虽然从理论上讲计算 ρ 与计算 σ 没有什么区别, 但我们发现计算 ρ 要比计算 σ 效果好一些, 所以本文采用计算 ρ 的方法. 后来, 算法又有许多改进形式[2, 5, 6], 它们对原始算法的收敛速度、计算的数值稳定性都有一定的提高或改善. 如文献[2, 5]中的迭代公式为

$$\Delta\rho^{k+1} = -(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} + \lambda\Sigma)^{-1}\boldsymbol{g}(\rho^k) \tag{6}$$

其中 Σ 是正定矩阵, λ 为阻尼因子.

文献[1]中的迭代公式为

$$\text{测量是近表征} \begin{bmatrix} \alpha\boldsymbol{I} & \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{J} & -v\boldsymbol{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \Delta\rho^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{r} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵, α、v 为正常数, $\boldsymbol{S}$ 为一正定矩阵, $\boldsymbol{x}$ 为一维数适当的向量, $\boldsymbol{r} = ((\boldsymbol{f}_1(\rho^k) - \boldsymbol{v}_1^0)^{\mathrm{T}}, (\boldsymbol{f}_2(\rho^k) - \boldsymbol{v}_2^0)^{\mathrm{T}}, \cdots, (\boldsymbol{f}_N(\rho^k) - \boldsymbol{v}_N^0)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 即残差向量. 求解(7)式一般要用迭代法.

值得指出的是, 在确定矩阵 Σ、$\boldsymbol{S}$ 时, 有时要用先验知识, 这给一些应用场合带来限制.

本文提出 Newton-Raphson 算法的另外一种改进形式, 它和普通的 Newton-Raphson 算法相比, 只增加了一个权矩阵, 因而称为加权 Newton-Raphson 算法. 权矩阵是可以预先计算的, 所以计算量增加很少, 数值试验表明, 该方法是十分有效的.

3 加权的 Newton-Raphson 算法

EIT 的图像重建算法中原始 Newton-Raphson 算法, 其第 $k+1$ 步迭代时修正量的公式为(5), 我们知道 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$ 是目标函数 $\Phi(\rho)$ 的 Hessian 矩阵的近似, 由于一般情况下它接近奇异, 所以该算法的数值稳定性极差, 实际应用中一般较少采用. 但我们可以用它来计算本文算法中的权矩阵.

3.1 反问题病态的原因

众所周知 EIT 反问题是病态的, 这给 EIT 反问题的求解带来极大困难. 其病态的表现之一就是各种算法对物体的内部靠近中心处和靠近边界处的分辨能力的差别: 现已知的所有 EIT 图像重建算法都对物体内部靠近中心处的分辨率低, 对物体靠近边界处的分辨率高. Newton-Raphson 算法也是如此. 在对 σ 进行分片常数逼近时, 把每个(或每几个)独立识别的有限单元称为一个像素(pixel); 在对 σ 进行连续插值逼近时, 把每个插值节点称为一个像素, 该节点的影响域[2]的面积称为相应像素的影响面积.

实践表明, EIT 反问题的病态是由于测量时的注入电流、电极配置、各像素的几何位置与面积(或影响面积)不同、各像素间的交叉相关以及介质的非均匀性等因素引起的. 例如, EIT 在靠近边界处的分辨率与靠近中心处的分辨率的差异, 就与注入电流、电极配置、各像素的几何位置与面积(或影响面积)不同有着明显的关系. 由于电极设置在物体的表面, 使得靠近边界处单元内的电流密度明显高于靠近中心处单元的电流密度. 这其中的有些因素是可以消除或部分消除的, 本文提出的加权 Newton-Raphson 算法就是通过适当的加权措施, 来减轻由于测量时的注入电流、电极配置、各像素的几何位置与面积(或影响面积)不同对 EIT 反问题的影响, 从而使 Newton-Raphson 算法的性能得到改善.

3.2 利用权矩阵改善 Newton-Raphson 算法性能

设想一种简单的情况: 未知电导率分布为均匀的(但假设事先并不知道), 即

$$\rho = k(1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

假如用原始的 Newton-Raphson 算法(5)来确定 ρ. 我们选用均匀的迭代初值 ρ^0($\rho^0 \neq \rho$), 这时由 Newton-Raphson算法计算出来的修正量, 当然以均匀的或接近均匀的为理想. 遗憾的是即使在这种情况下, Newton-Raphson 算法计算出来的修正量也远非均匀, 在高维情况下更是如此, 这由简单的计算即可得知. 这种情况下修正量的非均匀性是可以通过加权措施来消除或减轻的, 为此, 令第一步修正量公式为

$$\Delta\tilde{\rho}^1 = -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{g}(\rho^0) \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 为待定权矩阵, 为使 $\Delta\rho^1$ 均匀, 显然 $\boldsymbol{S}$ 可以取为

$$\boldsymbol{S} = a \cdot \mathrm{diag}\left(\left|\frac{1}{\Delta\rho_1^1}\right|, \left|\frac{1}{\Delta\rho_2^1}\right|, \cdots, \left|\frac{1}{\Delta\rho_N^1}\right| \right) \tag{10}$$

其中 $\Delta\rho_i^1$ 为由(5)式计算出的 $\Delta\rho^1$ 的第 i 个分量, a 为比例因子, $|\cdot|$ 表示普通的绝对值. 此时 $\boldsymbol{S}$ 明显与介质的非均匀性无关, 而只与测量时的注入电流、电极配置、各像素的几何位置与面积(或影响面积)不同等因素有关.

3.3 权矩阵的计算

为了利用权矩阵 $\boldsymbol{S}$ 构造有效的 EIT 图像重建算法, 权矩阵必须易于计算才行, 上面 $\boldsymbol{S}$ 取为

对角阵正是为了这个原因. (10)式中 $\boldsymbol{S}$ 的计算依赖于迭代的均匀初值, 由于均匀初值的选取具有人为因素, 我们希望计算出的 $\boldsymbol{S}$ 与选定的均匀迭代初值无关, 可以证明下面的命题.

命题　由(10)式计算出的权矩阵 $\boldsymbol{S}$, 在单位化(指将 $\boldsymbol{S}$ 看作 N^2 维向量时的单位化)后与均匀迭代初值的选取及未知均匀分布无关.

证明　首先, 易于证明 $\boldsymbol{f}_i(\rho)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ 对 ρ 具有正齐次性, 即

$$\boldsymbol{f}_i(k\rho) = k\boldsymbol{f}_i(\rho) \quad (i = 1, 2, \cdots, p) \quad (k > 0) \tag{11}$$

将所有 $\boldsymbol{f}_i(\rho)$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ 组合成一个列向量 $\boldsymbol{F}(\rho)$, $\boldsymbol{F}(\rho)$ 即为所有 p 次电压测量数据组成的向量, 由(11)式可知 $\boldsymbol{F}(\rho)$ 也具有正齐次性.

设

$$\boldsymbol{r}^0 = k_0(1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

记

$$\gamma^0 = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

则由(5)式得

$$\Delta\rho^1 = -(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})^{-1}\boldsymbol{g}(\rho^0) = [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\rho^0)\boldsymbol{F}(\rho^0)]^{-1}[\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\rho^0)] \cdot [\boldsymbol{F}(\rho^0) - \boldsymbol{F}(\rho)] = -[k_0^2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\gamma)\boldsymbol{F}(\gamma)]^{-1}[k_0\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\gamma)] \cdot (k_0 - k)[\boldsymbol{F}(\gamma)] = -k_0^3(k_0 - k) \cdot [\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\gamma)\boldsymbol{F}(\gamma)][\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\gamma)]\boldsymbol{F}(\gamma)$$

由此可知 $\Delta\rho^1$ 单位化后与 k_0、k 无关, 从而与均匀迭代初值的选取及未知均匀分布无关. 由(10)式知, $\boldsymbol{S}$ 单位化后与均匀迭代初值及未知均匀分布无关.　　证毕

由此我们得到 $\boldsymbol{S}$ 的算法如下:

1) 任意选取两个均匀电阻率分布 ρ、ρ^0 $(\rho \neq \rho^0)$, 以 ρ 作为未知电阻率分布模拟边界电压分布;

2) 以 ρ^0 为迭代初值, 按(5)式计算修正量 $\Delta\rho^1$;

3) 按(10)式计算 $\boldsymbol{S}$, 并选取适当的比例因子 a 使得当把 $\boldsymbol{S}$ 看作 N^2 维向量时, $\boldsymbol{S}$ 的长度为 N.

3.4　加权 Newtorr-Raphson 算法

利用上述方法计算出的 $\boldsymbol{S}$ 对现有的各种 Newtorr Raphson算法的修正量进行加权, 就得到各种加权 Newtorr Raphson 算法.

4　数值试验

我们进行数值试验的有限元模型如图 1 所示, 采用 28 电极进行数据采集, 用正弦型电流作为注入电流, 进行全部 27 次独立测量, 真实图像及重建图像如图 2 所示. 从图中的对比可以看出, 加权 Newtorr Raphson 算法的图像重建效果明显优于 Newtorr Raphson 算法.

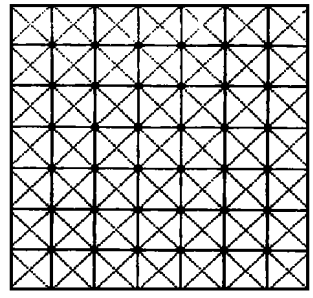
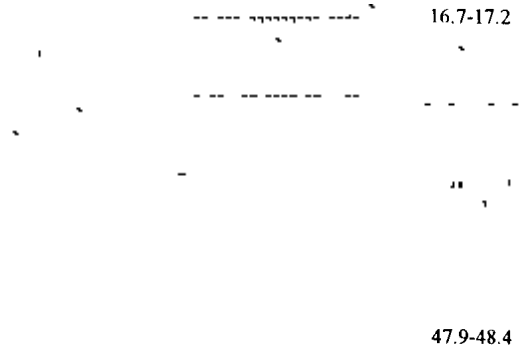


图 1　计算模型的有限元网格

为了便于对比, 图 2 的三幅图像采用统一的灰度卡. 打印图像有 64 级灰度, 灰度卡中只给了其中的 16 级. 电阻率的单位为 Ω• cm. 灰度标只标出了灰度卡中按从亮到暗第 1 及第 61 个灰度所代表的电阻率范围. 重建图像未经任何后处理.



(a) 真实图像　　(b) 普通 Newtorr Raphson 算法重建图像



(c) 加权 Newtorr Raphson 算法重建图像　　(d) 灰度卡及灰度标

图 2　真实图像及重建图像

应当指出的是, 我们进行数值试验的真实电阻率本身是不连续的(分片常数), 文献[6]指出, 即使在这种情况下, 一般而言, 连续函数逼近法也优于分片常数逼近法. 数值试验使用的迭代公式

为

$$\Delta\rho^{k+1} = -\left(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} + \lambda\Sigma\right)^{-1}\boldsymbol{g}(\rho^{k}) \quad (14)$$

其中 Σ 取为对角矩阵, 其元素为 $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}$ 的对角元, 迭代次数为20次, 迭代初值是各分量均为10的向量.

5 结束语

本文提出了 EIT 为 Newton-Raphson 算法的又一种改进, 即加权 Newton-Raphson 算法, 与普通 Newton-Raphson 算法相比, 它只是在每次迭代的修正量上乘了一个权矩阵, 权矩阵可以在迭代前计算出来(不占迭代时间), 因此计算量增加很少, 但其图像重建效果比普通 Newton-Raphson 算法却有较大改善. 我们认为, 这主要是因为加权 Newton-Raphson 算法在每步计算修正量时, 都部分地消除了由测量时的注入电流、电极配置、各像素的几何位置与面积(或影响面积)不同对 EIT 反问题的影响而取得的. 应当指出, 本文的加权方法对整个 Newton-Raphson 算法类都是适用的, 它可以称为加权 Newton-Raphson 算法类.

参 考 文 献

1 Woo E J Hua P, Webster J G. A robust image reconstruction algorithm and its parallel implementation in electrical impedance tomography. IEEE Trans Med Imaging, 1993, MI-12(2): 137~146

2 杜 岩, 柳重堪, 程吉宽, 吴少淳. 基于连续插值逼近的电阻抗成像图像重建算法. 电子科学学刊, 1997, 19(6): 797~802

3 Webster J G. Electrical impedance tomography. Bristol England: Adam Hilger, 1990

4 Yorkey T J, Webster J G, Tompkins W J. Compairing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. IEEE Trans Biomed Eng, 1987, BME-34: 843~852

5 Hua P, Tompkins W J. A regularised electrical impedance tomography reconstruction algorithm. Clin Phys Phsiol Meas, 1988, 9 Suppl(A): 137~141

6 柳重堪, 杜 岩, 李久平. 实现电阻抗层析成像的交错算法. 电子学报, 1995, 23(7): 11~14

Weighted Newton-Raphson Algorithm for Electrical Impedance Tomography

Du Yan Liu Zhongkan Cheng Jikuan

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Electronic Engineering)

Abstract A proper weight matrix is used to improve the Newton-Raphson algorithm for the electrical impedance tomography image reconstruction, and a weighted Newton-Raphson algorithm is proposed. The new weighted algorithm can overcome the defect of bad-distributed resolution for reconstructed image by using original Newton-Raphson method. This kind of defect is from ill-condition of inverse problem and some mathemetical and physical factors such as injecteds current, electrodes disposition, geometrical position of pixel etc. Compared with the simple Newton-Raphson algorithm, the image reconstructed by the weighted one is much better while the computation amount is almost not increased. The algorithm for computation of the weight matrix is also discussed in detail.

Key words image processing; electrical impedance; tomography; Newton type algorithm; non-linear; weighted; image reconstruction