陀螺仪运动的复杂性[1)]

胡志兴 管克英
(北京航空航天大学 理学院)

摘 要 建立了外环轴水平放置的重力对称陀螺仪的运动方程. 并将陀螺仪转子的质心位置作为扰动, 在一定条件下, 首先研究了自由陀螺仪的运动, 并给出力学意义解释; 然后利用 Melnikov 方法和 KAM 理论研究了非自由陀螺仪的运动. 研究结果表明: 在陀螺仪转子的质心与支架中心不重合且充分接近, 或陀螺仪能量充分大时, 陀螺仪的运动出现 Smale 马蹄意义下的混沌; 同时它的 Hamiltonian 流存在 KAM 不变环面和不变闭曲线.

关键词 陀螺仪; 重力; 运动; 混沌; Melnikov 函数; 不变环面; KAM 理论
分类号 O 175.21; O 317

1 运动方程的建立

陀螺仪是一种比较复杂的刚体体系, 已广泛应用于航空、航天、航海、大地测量等重要领域[1]. 目前对陀螺仪的研究仅限于一次或二次近似理论[2], 当考虑到非线性项时, 几乎没有严格的理论分析. Melnikov 方法和 KAM 理论为研究近可积 Hamiltonian 系统提供了分析的方法, 但 KAM 理论用于研究具体的力学系统并不多见. 文献[3, 4] 利用 KAM 理论研究了双摆和复杂双摆的运动. 本文所研究的万向支架陀螺仪 P_ε (ε 的意义见后面) 由 2 个框架(对称环架) 组成, 它使所支承的物体——陀螺仪的转子能获得完全自由的角位移. 外环轴水平放置, 其支架中心为 O, 内环坐标系为 $Oxyz$, 系统 P_ε 的广义坐标为角变量 ψ, θ, φ, 如图 1 所示.

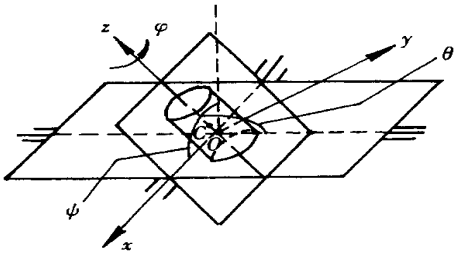


图 1 重力对称陀螺仪模型

假定内环与转子合在一起的质心 $C(x_C, y_C, z_C)$ 位于转子轴上(即 $x_C = y_C = 0$), 其质量为 m, 转子和框架都是刚体. 在实际工程应用中, 陀螺仪总是受到许多干扰力的影响, 本文主要考虑重力对陀螺仪的影响, 忽略其它干扰力(比如小阻尼, 轴承摩擦力等) 的影响.

系统 P_ε 的 Lagrangian 函数为

$$L_\varepsilon(\theta, \dot\theta, \psi, \dot\psi, \varphi, \dot\varphi) = \frac{1}{2}\{[(A + B_1)\sin^2\theta + (C + C_1)\cos^2\theta + A_2]\dot\psi^2 + (A + A_1)\dot\theta^2 + C\dot\varphi^2 + 2C\dot\varphi\dot\psi\cos\theta\} - \varepsilon\sin\theta\sin\psi \quad (1)$$

其中 $\varepsilon = mgz_C$; A_2 为外环绕外环轴的转动惯量; A_1, B_1, C_1 为内环绕主轴 Ox, Oy, Oz 的转动惯量; A, C 为陀螺仪转子的赤道惯量及极惯量; A_2, A_1, B_1, C_1, A, C, m 均大于零. 当 $z_C = 0$ 时, 称为自由陀螺仪. 设广义动量 $p_\psi = \dfrac{\partial L_\varepsilon}{\partial\dot\psi}$, $p_\theta = \dfrac{\partial L_\varepsilon}{\partial\dot\theta}$, $p_\varphi = \dfrac{\partial L_\varepsilon}{\partial\dot\varphi}$, 则系统 P_ε 的 Hamiltonian 函数为

$$H_\varepsilon(\theta, p_\theta, \psi, p_\psi, \varphi, p_\varphi) = (2\Delta(\theta))^{-1}\{\Delta(\theta)p_\theta^2/(A + A_1) + Cp_\psi^2 + [A_2 + (A + B_1)\sin^2\theta + (C + C_1)\cos^2\theta]p_\varphi^2 - 2Cp_\psi p_\varphi\cos\theta\} + \varepsilon\sin\theta\sin\psi \quad (2)$$

其中

$$\Delta(\theta) = C[A_2 + (A + B_1)\sin^2\theta + C_1\cos^2\theta] \quad (3)$$

系统 P_ε 的 Hamiltonian 方程为

收稿日期: 1998-04-17 第一作者 男 37 岁 博士生 100083 北京
1) 国家自然科学基金(19671009A), 国家教委博士点基金资助项目

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\phi} &= C(p_\phi - p_\varphi\cos\theta)(\Delta(\theta))^{-1}\\
\dot{p}_\phi &= -\varepsilon\sin\theta\cos\phi\\
\dot{\theta} &= p_\theta(A + A_1)^{-1}\\
\dot{p}_\theta &= C^2[(A + B_1 - C_1)p_\phi\cos\theta - (A + A_2 + B_1)p_\varphi](p_\phi - p_\varphi\cos\theta)(\Delta(\theta))^{-2}\cdot\\
&\quad \sin\theta - \varepsilon\cos\theta\sin\phi\\
\dot{\varphi} &= \{[A_2 + (A + B_1)\sin^2\theta + (C + C_1)\cos^2\theta]p_\varphi - Cp_\phi\cos\theta\}(\Delta(\theta))^{-1}\\
\dot{p}_\varphi &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

系统(4)有 2 个首次积分

$$H_\varepsilon(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi, \varphi, p_\varphi) = h \tag{5}$$

$$p_\varphi = h_2 \tag{6}$$

式(5)表示系统 P_ε 的能量守恒, 式(6)表示转子动量矩在转子轴上的分量守恒.

任意给定 $h \in \mathbf{R}^+$, (5)式等价于

$$H_{\tilde{\varepsilon}}(\theta, \tilde{p}_\theta, \phi, \tilde{p}_\phi, \varphi, \tilde{p}_\varphi) = 1 \tag{7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{p}_\theta &= p_\theta/\sqrt{h}\\
\tilde{p}_\phi &= p_\phi/\sqrt{h}\\
\tilde{p}_\varphi &= p_\varphi/\sqrt{h}\\
\tilde{\varepsilon} &= \varepsilon/h
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

因此, 以下不妨设

$$H_\varepsilon(\theta, p_\theta, \phi, p_\phi, \varphi, p_\varphi) = 1 \tag{9}$$

2　自由陀螺仪的运动

当 $\varepsilon \neq 0$ 时, 系统 P_ε 是一个不可积的 Hamilton 系统. 首先研究自由陀螺仪的运动, 即 $\varepsilon = 0$ 的情形. 此时, 系统 P_0 还有一个首次积分

$$p_\phi = h_1 \tag{10}$$

式(10)表示系统 P_0 的动量矩在外环轴上的分量守恒.

对任意给定 $h \in \mathbf{R}$, 把(6)式代入(9)式, 可局部解得

$$p_\phi = \Lambda_{\pm,0}(\theta, p_\theta, h_2) = h_2\cos\theta \pm C^{-1}\sqrt{\Delta(\theta)(2C - Cp_\theta^2/(A + A_1) - h_2^2)} \tag{11}$$

把(6)式, (11)式代入(4)式可得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\phi} &= -\frac{\partial\Lambda_{\pm,0}(\theta, p_\theta, h_2)}{\partial p_\theta}\\
\frac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}\phi} &= \frac{\partial\Lambda_{\pm,0}(\theta, p_\theta, h_2)}{\partial\theta}
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

系统(12)有首次积分

$$\Lambda_{\pm,0}(\theta, p_\theta, h_2) = h_1 \tag{13}$$

显然, 系统(12)有平衡点 $Q_k^\pm$: $(\theta, p_\theta) = (k\pi, 0)$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$. 关于其它平衡点的存在性、稳定性以及平衡点 $Q_k^\pm$ 的稳定性, 与常数 A, C, A_1, B_1, C_1, A_2, h_2 的取值范围有关, 共有三十几种情况, 本文将对其中之一进行详细研究, 即设 $C_1 < A + B_1 < A_2 + 2C_1$, $h_2^* < h_2 < h_2^{**}$, 其中

$$\left.\begin{aligned}
h_2^* &= \frac{(A + B_1 - C_1)\sqrt{2C}}{\sqrt{(A + B_1 - C_1)^2 + C(A_2 + C_1)}}\\
h_2^{**} &= \frac{\sqrt{2C(A_2 + C_1)}}{\sqrt{A_2 + C_1 + C}}\\
h_2^{***} &= \frac{\sqrt{2C(A_2 + C_1)}}{\sqrt{A_2 + C_1 + 4C}}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

系统(12)只有平衡点 $Q_k^\pm$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$. 可以证明: 平衡点 Q_{2k}^+, Q_{2k-1}^- $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 均为系统(12)的中心, 平衡点 Q_{2k-1}^+, Q_{2k}^- $(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 均为系统(12)的鞍点. 由这些平衡点可得 h_1 的 4 个特殊值:

$$\left.\begin{aligned}
h_{1,1}^\pm &= h_2 \pm \sqrt{(2C - h_2^2)(A_2 + C_1)/C}\\
h_{1,2}^\pm &= -h_2 \pm \sqrt{(2C - h_2^2)(A_2 + C_1)/C}
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

一般地, 式(9)定义一个三维流形 M, 它同胚于三维环面 T^3, 对给定 $h_2 \in \mathbf{R}$, (6)式定义一个二维流形 M_{h_2}. 当 $h_2 \in (h_2^*, h_2^{**})$ 时, 流形 M 与 M_{h_2} 的交定义一个二维流形, 记为 M_0, 它同胚于二维环面 T^2, 把它嵌入三维欧氏空间 R^3:

$$\left.\begin{aligned}
x &= (a + p_\theta)\cos\theta\\
y &= (a + p_\theta)\sin\theta\\
z &= p_\phi
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中 a 为大于 $\sqrt{(A + A_1)(2 - h_2^2/C)}$ 的正常数. 对给定 $h_1 \in \mathbf{R}$, (10)式定义一个二维流形 M_{h_1}. 当 $h_1 \in \mathbf{R}$ 在一定范围内取值时, 流形 M_0 与 M_{h_1} 相交, 它们的交为 1 条或 2 条闭曲线, 称为 h_1- 曲线. 例如, 对 $A = 9/5$, $B_1 = 1/10$, $A_1 = C_1 = C = A_2 = 1$, $h_2 = 4/5$, 图 2 显示了 M_0 上的一些 h_1- 曲线.

不难得到如下结论:

1) 当 $h_{1,2}^+ < h_1 < h_{1,1}^+$ (或 $h_{1,2}^- < h_1 < h_{1,1}^-$) 时, 环面 M_0 上 h_1- 曲线为一条闭曲线, 它同伦于点

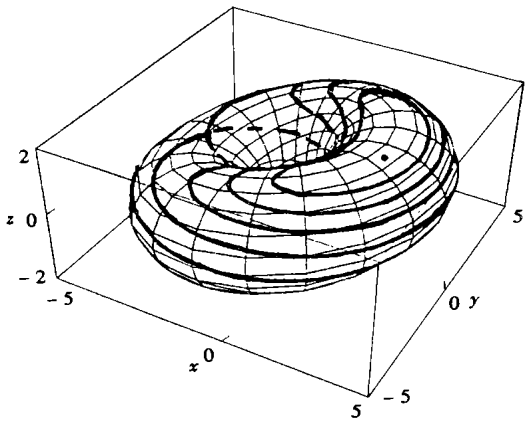


图2 M_0 上的一些 h_1- 曲线

Q^+_{2k}(或 Q^-_{2k-1})($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$).

2) 当 $h_1=h^+_{1,1}$(或 $h_1=h^-_{1,2}$)时, 环面 M_0 上 h_1^- 曲线收缩到点 Q^+_{2k}(或 Q^-_{2k-1})($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$).

3) 当 $h^-_{1,1}<h_1<h^+_{1,2}$时, 环面 M_0 上 h_1^- 曲线为一对互不相交的闭曲线, 一条几乎位于 M_0 的外半部, 它同伦于 M_0 的外赤道; 另一条几乎位于 M_0 的内半部, 它同伦于 M_0 的内赤道.

4) 当 $h_1=h^+_{1,2}$(或 $h_1=h^-_{1,1}$)时, 环面 M_0 上 h_1^- 曲线为一对相交于点 Q^+_{2k-1}(或 Q^-_{2k})($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)的闭曲线.

5) 当$|h_1|>h^+_{1,1}$时, 环面 M_0 与流形 M_{h_1} 不相交.

从全局来看, 系统(12)的积分曲线正好代表了等量面 M_0 上的 h_1^- 曲线. 积分曲线被鞍点 Q^+_{2k-1}, Q^-_{2k}($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$)的分界线分成4个部分: 其中2个部分中的闭曲线分别同伦于点 Q^+_{2k}, Q^-_{2k-1}($k=0, \pm1, \pm2, \cdots$); 另外2个部分中的闭曲线分别同伦于 M_0 的外赤道和内赤道. 在每种运动过程中, 角 θ 沿相同方向重复变化; 所有闭曲线关于 ψ 都是系统(12)的周期解, 当闭曲线趋于 Q^+_{2k-1}(或 Q^-_{2k})时, 解的周期趋于$+\infty$.

为了从力学角度来解释环面 M_0 上的 h_1^- 曲线所表示陀螺仪的运动, 不妨设 $C+C_1<A+B_1<(A_2+3C_1)/2$, $h_2^*<h_2<h_2^{***}$, 此时有 $h^+_{1,2}>h_2$. 把环面 M_0 的上半部分和下半部分 h_1^- 曲线分别投影到 Oxy 平面. 若 $\dot\psi$ 和 $\dot\varphi$ 异号, 称转子与外环为异向转动; 否则, 称转子与外环为同向转动.

1) 当 $h_1=h^+_{1,1}$时, $\theta\equiv0$, $\dot\psi>0$, $\dot\varphi>0$, 因此内环与外环重合, 同时外环与转子作同向匀速转动.

2) 当 $h^+_{1,2}<h_1<h^+_{1,1}$时, 设

$$\theta_1^{\pm}=\arccos\{[Ch_1h_2\mp(C^2h_1^2h_2^2+((2C-h_2^2)(A_2+A+B_1)-Ch_1^2)((2C-h_2^2)(A+B_1-C_1)+Ch_2^2))^{\frac12}](Ch_2^2+(2C-h_2^2)(A+B_1-C_1))^{-1}\} \tag{17}$$

因 $h^+_{1,2}>h_2$, 所以 $\dot\psi>0$, $\dot\varphi>0$($\theta\in(-\theta_1^+,\theta_1^+)$), $\dot\theta|_{\theta=\pm\theta_1^+}=0$. 靠右侧的 h_1^- 曲线, 有 $\dot\theta|_{右}>0$($\theta\in(-\theta_1^+,\theta_1^+)$); 而靠左侧的 h_1^- 曲线, 有 $\dot\theta|_{左}<0$($\theta\in(-\theta_1^+,\theta_1^+)$). 因此外环与转子同向转动, 内环从 $\theta=-\theta_1^+$ 到 $\theta=\theta_1^+$ 之间来回运动.

3) 当 $h_1=h^+_{1,2}$时, $\dot\psi>0$, $\dot\varphi>0$($\theta\in(-\pi,\pi)$).

若初始条件 $\theta|_{t=t_0}=\pm\pi$, 则 $\theta\equiv\pm\pi$($t>t_0$). 因此当时间 $t>t_0$ 增加时, 内环与外环轴的夹角为 $\theta=\pm\pi$, 外环与转子作同向转动.

若初始条件 $\theta|_{t=t_0}=\theta_0\in(-\pi,\pi)$, 则 $\dot\theta|_{t=t_0}=\dot\theta_0\neq0$, 不妨设 $\dot\theta_0>0$(即环面上靠外的那条 h_1^- 曲线), $0<\theta_0<\pi$. 当时间 $t>t_0$ 增加时, 外环与转子作同向转动, 内环与外环轴的夹角 θ 单调增加, 随着时间 t 趋于$+\infty$, 角 θ 趋于 π.

4) 当 $h_2\leqslant h_1<h^+_{1,2}$时, $\dot\psi\geqslant0$, $\dot\varphi>0$, $\dot\theta\neq0$($\theta\in[-\pi,\pi]$). 若初始条件 $\theta|_{t=t_0}=\theta_0\in[-\pi,\pi]$, 不妨设 $\dot\theta_0>0$(即环面上靠外的那条 h_1^- 曲线). 当时间 $t>t_0$ 增加时, 外环与转子作同向转动, 内环绕内环轴逆时针方向转动.

5) 当$-h_2<h_1<h_2$时, 设

$$\theta_2=\arccos(h_1/h_2) \tag{18}$$

$$\dot\psi\begin{cases}<0 & \theta\in(2k\pi-\theta_2,\ 2k\pi+\theta_2)\\ >0 & \theta\in(2k\pi-\theta_2,\ 2k\pi+\theta_2)\end{cases} \tag{19}$$

其中 $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$. 对任意 θ, 有 $\dot\varphi>0$, $\dot\theta\neq0$($\theta\in[-\pi,\pi]$). 若初始条件 $\theta|_{t=t_0}=\theta_0$, 不妨设$-\theta_2<\theta_0<\theta_2$, $\dot\theta_0>0$(即环面上靠外的那条 h_1^- 曲线). 当时间 $t>t_0$ 增加时, 外环与转子先作异向转动; 当内环转到 $\theta=\theta_2$ 时, 外环开始反转, 即外环与转子开始作同向转动, 角 θ 继续增加; 当内环转到 $\theta=2\pi-\theta_2$ 时, 外环又开始反转, 即外环与转子又开始作异向转动, 角 θ 继续

增加; 当内环转到 $\theta = 2\pi + \theta_2$ 时, 外环又开始反转, 即外环与转子又开始作同向转动, 继续运动下去. 在整个运动过程中, 内环绕内环轴逆时针方向转动.

6) 当 $h_{1,1}^- < h_1 < -h_2$, 或 $h_1 = h_{1,1}^-$, 或 $h_{1,2}^- < h_1 < h_{1,1}^-$, 或 $h_1 = h_{1,2}^-$ 时, 其运动可作类似上述讨论.

3　陀螺仪系统 P_ε 的混沌

在本节中, 设 $C_1 < A + B_1 < (A_2 + 3C_1)/2$, $h_2^* < h_2 < h_2^{***}$. 对于非自由陀螺仪系统 P_ε, 即 $\varepsilon \neq 0$, Hamiltonian 方程(4) 只有 2 个首次积分(6) 式和(9) 式. 对给定 $h_2 \in \mathbf{R}$, 由(6) 式和(9) 式可局部解得

$$p_\psi = \Lambda_{\pm,\varepsilon}(\theta, p_\theta, \psi, h_2, \varepsilon) = \Lambda_{\pm,0}(\theta, p_\theta, h_2) + \varepsilon\Lambda_{\pm,1}(\theta, p_\theta, \psi, h_2, \varepsilon) \tag{20}$$

其中

$$\Lambda_{\pm,1}(\theta, p_\theta, \psi, h_2, \varepsilon) = \mp 2\{[2C - Cp_\theta^2/(A + A_1) - h_2^2 - 2C\varepsilon\sin\theta\sin\psi]^{\frac{1}{2}} + [2C - Cp_\theta^2/(A + A_1) - h_2^2]^{\frac{1}{2}}\}^{-1}\sqrt{\Delta(\theta)}\sin\theta\sin\psi \tag{21}$$

把(6) 式, (20) 式及 $H_\varepsilon(\theta, p_\theta, \psi, p_\psi, \varphi, p_\varphi)$ 代入 Hamiltonian 方程可得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\psi} &= -\frac{\partial\Lambda_{\pm,\varepsilon}}{\partial p_\theta} = -\frac{\partial\Lambda_{\pm,0}}{\partial p_\theta} - \varepsilon\frac{\partial\Lambda_{\pm,1}}{\partial p_\theta} \\ \frac{\mathrm{d}p_\theta}{\mathrm{d}\psi} &= \frac{\partial\Lambda_{\pm,\varepsilon}}{\partial\theta} = \frac{\partial\Lambda_{\pm,0}}{\partial\theta} + \varepsilon\frac{\partial\Lambda_{\pm,1}}{\partial\theta} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, (22) 式就是未扰可积的 Hamiltonian 系统. 由 2 节可知: 从环面 M_0 上看, 鞍点 Q_{2k-1}^+, Q_{2k}^- ($k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) 的分界线都是同宿轨道; 但从相平面上看, 鞍点 Q_{2k-1}^+, Q_{2k}^- ($k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) 的分界线都是异宿轨道, 如图 3 所示.

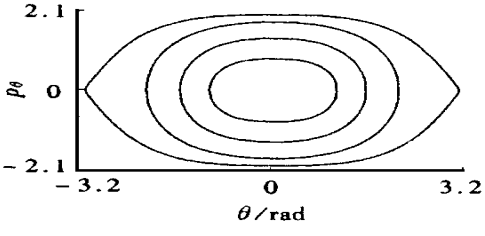


图 3　未扰系统的相图

当 $\varepsilon \neq 0$ 时, (20) 式的扰动项 $\Lambda_{\pm,1}(\theta, p_\theta, \psi, h_2, \varepsilon)$ 关于 θ, ψ 都是以 2π 为周期的周期函数, 可以利用 Melnikov 方法来研究系统(22) 的混沌. 连接鞍点 Q_{2k-1}^+, Q_{2k+1}^+ ($k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) 的异宿轨道方程为

$$p_\theta = p_\theta(\theta, \pm) = \pm(\Delta(\theta))^{\frac{1}{2}}\{(A + A_1)[(2C - h_2^2)C^{-1}\Delta(\theta) - C(h_1 - h_2\cos\theta)^2]\}^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

沿着鞍点 Q_{2k-1}^+, Q_{2k+1}^+ ($k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) 的异宿轨道 $p_\theta = p_\theta(\theta, \pm)$ 的 Melnikov 函数为

$$M_\pm(\psi_0, \pm) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial\Lambda_{\pm,0}(\theta, p_\theta, h_2)}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\Lambda_{\pm,1}(\theta, p_\theta, \psi + \psi_0, h_2, 0)}{\partial p_\theta} - \frac{\partial\Lambda_{\pm,0}(\theta, p_\theta, h_2)}{\partial p_\theta}\cdot\frac{\partial\Lambda_{\pm,1}(\theta, p_\theta, \psi + \psi_0, h_2, 0)}{\partial\theta}\right]\mathrm{d}\psi \tag{24}$$

设

$$f_\pm(\theta) = h_2[(A + B_1 - C_1)\sin^2\theta + A_2 + C_1](h_1 - h_2\cos\theta)^{-2}\sin^2\theta \mp [A_2 + C_1 + 3(A + B_1 - C_1)\sin^2\theta]\,|h_1 - h_2\cos\theta|^{-1}\cos\theta \tag{25}$$

下面分情况研究.

1) 对连接系统(12) 的鞍点 Q_{2k-1}^+ 与 Q_{2k+1}^+ ($k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) 的异宿轨道, 其轨道方程为 $p_\theta = p_\theta(\theta, +)$ (θ 轴上方那条), 此时 ψ 与 θ 的关系为

$$\psi = \psi(\theta) = -\int_0^\theta (A + A_1)p_\theta^{-1}[2C - Cp_\theta^2/(A + A_1) - h_2^2](\Delta(\theta))^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\theta \tag{26}$$

通过化简, 可得 Melnikov 函数

$$M_+(\psi_0, +) = \left(\int_0^\pi 2f(\theta)\cos\psi(\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)\sin\psi_0 \tag{27}$$

其中 $f(\theta) = f_+(\theta)$. 当 $\int_0^\pi 2f(\theta)\cos\psi(\theta)\,\mathrm{d}\theta \neq 0$ 时, 显然 $\psi_0 = 0$ 是函数 $M_+(\psi_0, +)$ 的简单零点. 根据 Melnikov 理论[5], 当 $|\varepsilon| > 0$ 充分小时, 在系统(22) 的 Poincare' 截面上, 鞍点 Q_{2k-1}^+ 的不稳定流形与鞍点 Q_{2k+1}^+ 的稳定流形发生横截交叉, 即 Poincare' 映射存在横截异宿点. 因 $p_\theta = p_\theta(\theta, +)$ 是环面或柱面上鞍点 Q_{2k-1}^+ ($k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$) 的同宿轨道, 所以上述横截异宿点是环面或柱面上的横截同宿点. 由 Moser 理论[5] 可知: 系统(22) 的 Poincare' 映射是 Smale 马蹄映射, 陀螺仪的运动具有 Smale 马蹄意义下的混沌. 例如: 取 $A = 9/5$, $B_1 = 1/10$, $h_2 = 4/5$, $A_1 = C_1 = C = A_2 = 1$, 由

数值积分可知:

$$\int_0^{\pi} 2f(\theta)\cos\psi(\theta)\,d\theta \approx -3.2883$$

2) 对于连接系统(12)的鞍点 Q^{+}_{2k-1} 与 Q^{+}_{2k+1} 的另一条异宿轨道以及连接鞍点 Q^{-}_{2k} 与 Q^{-}_{2k+2} 的两条异宿轨道, 也有类似上述结论.

4 陀螺仪的 KAM 理论

由(21)式可知: $\Lambda_{\pm,1}(\theta, p_0, \psi, h_2, \varepsilon)$ 关于 ψ 是以 2π 为周期的周期函数. 当 $\varepsilon=0$ 时, 未扰系统(22)是自治的 Hamiltonian 系统, 由前面的讨论可知: 未扰系统(22)的每个解关于 ψ 几乎都是周期解. 显然, 解的周期取决于相轨线的位置. 因此, 对未扰动系统(12), 从 $\psi=0$ 到 $\psi=2\pi$ 的 Poincare' 映射是一个扭转映射. 由 KAM 理论[6]可知: 对扰动系统(22), 当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时, 从 $\psi=0$ 到 $\psi=2\pi$ 的 Poincare' 映射具有一族正 Lebesgue 测度 μ 的不变闭曲线, 这些不变闭曲线周围充满稠密的无理轨道. 对于未扰系统 P_0 的平衡点 $Q^{\pm}_k$, 扰动系统 P_ε 的 Poincare' 映射也有相应的固定点 $\tilde{Q}^{\pm}_k$, 它们对应于关于 ψ 的周期解. 在点 $\tilde{Q}^{+}_{2k}$, $\tilde{Q}^{-}_{2k-1}$ 周围的大部分不变闭曲线仍然存在, 与未扰系统 P_0 的不变闭曲线相比, 仅仅发生了微小变形, 但破裂的曲线也构成稠密集. 同样地, 由 KAM 理论[6]可知: 当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时, 扰动系统 P_ε 也存在与未扰系统 P_0 的不变环面 M_0 相对应的不变环面 $M_{0,\varepsilon}$, 不变环面 $M_{0,\varepsilon}$ 上的流是拟周期流, 并且不变环面 $M_{0,\varepsilon}$ 充分接近于未扰系统 P_0 的不变环面 M_0.

以上研究表明: 当扰动系统的初值取在鞍点附近时, 陀螺仪的运动出现很复杂的混沌现象. 扰动系统 P_ε 的不变闭曲线存在表明: 虽然在扰动系统中, 失去了象(10)式那样的"守恒量", 但当 $|\varepsilon|>0$ 充分小时, 未扰系统 P_0 中象(10)式那样"守恒量"的性质仍能保持.

参 考 文 献

1 马格奴斯 K. 陀螺理论与应用. 北京: 国防工业出版社, 1983

2 刘延柱. 万向支架陀螺仪的摄动理论. 力学与实践, 1982, 4(3): 37~39

3 Guan K Y. The KAM theory of double pendulum. Ann of Diff Eqs, 1998, 14(2): 120~130

4 胡志兴, 管克英. 复杂双摆的 KAM 理论. 高校应用数学学报(A), 1999, 14(2): 147~154

5 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1983

6 Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1978

Complexity of Motions of Gyroscope

Hu Zhixing Guan Keying

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, School of Science)

Abstract The motions of a gravity-symmetric gyroscope, whose outer ring's axis is placed horizontally, are dealt with. Firstly, the motions of a free gyroscope are studied and explained in the sense of mechanics under a certain condition. The Melnikov's methods and KAM theory can be used to study the motions of a non-free gyroscope if its rotor's gravity center can be treated as a perturbation. It is shown that the motions of the non-free gyroscope are chaotic in the sense of Smale horseshoe, and the KAM invariant tori and closed curves exist in the Hamiltonian flows of the perturbed system if the gravity center of the gyroscope's rotor doesn't coincide with the center of its supports, and the distance between them is sufficiently small, or its energy is sufficiently large in comparison with its potential energy.

Key words gyroscopes; gravity; motion; chaos; Melnikov function; invariant tori; KAM theory