1999 年 10 月 北京航空航天大学学报 October 1999
第25卷 第5期 Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics Vol. 25 No. 5

不确定非完整动力学系统的变结构指数镇定[1)]

王朝立 霍 伟 董文杰
(北京航空航天大学 理学院)

摘 要 链式系统是非完整运动学系统的一种标准形式. 通过坐标和输入变换,许多非完整运动学系统均可化为这种形式. 当非完整运动学系统可化为链式系统时,直接基于一类不确定非完整动力学系统,利用变结构控制的方法设计了全局镇定控制律. 该控制律的特点是:存在一个有限时间,使得在此时间后闭环系统的状态可以以任意速率指数收敛到零. 最后将该方法用于一类移动机器人的控制器设计,仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词 非线性控制系统; 镇定; 扰动; 非完整系统; 变结构控制
分类号 TP 13

近 10 多年来,非完整系统的控制问题受到越来越多的关注. 这类问题通常是由机械系统受到对速度的不可积约束引起的,这种约束不能通过积分的方法表示成位姿空间的约束形式,因此不能利用约束消去部分位姿变量化为低阶的不受约束系统来研究. 且这类系统不满足 Brockett 关于光滑反馈镇定的必要条件[1],所以不能用光滑的纯状态反馈使其镇定. 于是,人们寻找了许多其它的镇定办法. 对于不考虑动力学特性的非完整运动学系统,通常有 3 类控制器设计方法,即非光滑控制器,时变光滑控制器,或者这 2 类的混合[2]. 但这些控制器的设计均是基于所受非完整约束而导出的运动学模型,没有考虑系统的动力学特性,更没考虑系统受干扰时的情形.

文献[3]用增加积分器的方法将文献[4]关于非完整运动学系统的时变光滑控制器设计推广到了动力学系统. 文献[5]用齐次逼近的思想,将文献[4]的时变光滑控制器加以改造,得到 ρ 指数镇定的控制器,且用增加积分器的方法将此结果推广到动力学系统上. 以上这些方法都是针对系统不受干扰情形下的精确模型进行的,且事先设计好光滑的运动学广义速度控制律,然后再设计动力学广义力控制,并使实际的广义速度跟踪上预先设计好的广义速度. 这样的办法应用面窄,而且设计复杂,收敛速度慢,因此有必要直接基于受干扰的非完整动力学系统模型设计控制器.

本文采用变结构控制方法,通过直接对一类带有干扰的非完整动力学系统设计控制器使系统状态指数镇定到零,并对一类移动机器人的镇定控制进行了仿真,验证了该方法的有效性.

1 问题的提出

考虑经典非完整约束下的 Euler-Lagrange 型动力学系统

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + \zeta(t) = J^{\mathrm{T}}(q)\lambda + B(q)\tau \tag{1}$$

$$J(q)\dot{q} = 0 \tag{2}$$

式中 $q = [q_1, q_2, \cdots, q_n]^{\mathrm{T}}$ 为广义坐标;τ 为 m 维广义力(控制输入);$M(q)$ 为对称正定阵;$C(q,\dot{q})\dot{q}$ 为向心力和 Coriolis 力项;$G(q)$ 为重力项;$B(q)$ 是列满秩输入变换阵;$J(q)$ 为 $(n-m)\times n$ 约束矩阵且行满秩;λ 为反映约束反力的 Lagrange 乘子;ζ 表示系统所受到的干扰(包括系统难以建模的动静态摩擦项及外界干扰等).

设 $r_1(q), \cdots, r_m(q)$ 为 $J(q)$ 零空间的一组标准正交基,$R(q) \triangleq [r_1(q), \cdots, r_m(q)]$,则 $R^{\mathrm{T}}R = I_m$,$JR = 0$. 其中 I_m 为 m 阶单位阵. 由(2)式知,存在 m 维向量 $v = [v_1, \cdots, v_m]^{\mathrm{T}}$,使得

$$\dot{q} = R(q)v \tag{3}$$

对(3)式求导并代入(1)式,再左乘 R^{T},利用 $R^{\mathrm{T}}J^{\mathrm{T}} = (JR)^{\mathrm{T}} = 0$,得

收稿日期: 1998-06-05 第一作者 男 33 岁 博士生 100083 北京
1) 国家自然科学基金(69774009)资助项目

$$D_1\dot{v} + C_1 v + G_1 + R^T\zeta(t) = B_1\bar{\tau} \quad (4)$$

式中 $D_1 = R^T M R$; $C_1 = R^T(M\dot{R} + CR)$; $G_1 = R^T G$, $B_1 = R^T B$. 易证 D_1 为正定阵.

首先对本文所讨论的系统类做出限制.

假设 1 干扰 ζ 被已知函数所界定,即存在函数 $g(q, \dot{q}, t)$,使得 $\|\zeta\|_2 \leq g$. 这里 $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵或向量的 2-范数.

假设 2 $B_1 = R^T B$ 可逆.

假设 3 系统(3)可通过同胚变换 $x = \phi(q)$ 和 $v = H(x)u$ 化为 2 个控制输入的单链单生成元的链式系统[6]

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_i &= x_{i-1}u_1 \end{aligned}\right\} \quad i = 3, \cdots, n \quad (5)$$

或多于 2 个输入的多链单生成元的链式系统[6]

$$\dot{x}_1 = u_1 \qquad \dot{x}_i^1 = u_i$$

$$\dot{x}_i^j = x_i^{j-1}u_1$$

$$i = 2, \cdots, m \qquad j = 2, \cdots, n_{i-1}$$

为了讨论方便,设(3)式可化为(5)式的形式(即 u 为二维的情形). 利用假设 3 中的变换,(4)式可化为

$$D_2\dot{u} + C_2 u + G_2 + H^T R^T\zeta = B_2\bar{\tau} \quad (6)$$

其中 $D_2 = H^T D_1 H$; $C_2 = H^T(D_1\dot{H} + C_1 H)$; $G_2 = H^T G_1$; $B_2 = H^T B_1$. 易证 D_2 为正定阵.

由假设 2 知 B_2 可逆,记 $\bar{\tau} = B_2^{-1}(D_2\tau + C_2 u + G_2)$, $\zeta = -D_2^{-1}H^T R^T\zeta$,则系统(5)和(6)可化为如下系统:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_i &= x_{i-1}u_1 \qquad i = 3, \cdots, n \\ \dot{u}_j &= \tau_j + \zeta_j \qquad j = 1, 2 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

其中 τ_1, τ_2 为新的控制输入; ζ_1, ζ_2 为未知干扰. 由假设 1 知,存在已知函数 $\rho_1(\cdot)$ 和 $\rho_2(\cdot)$(均为 x_i, u_j 的函数),使得 $|\zeta_1| \leq \rho_1$, $|\zeta_2| \leq \rho_2$.

本文研究的问题是:在上述未知干扰存在的条件下如何设计 τ_1 和 τ_2,使系统(7)的状态变量指数镇定.

2 控制器设计

定义 1 设 $p(t)$ 为 $[0, +\infty)$ 上的连续函数,如果存在 $\delta > 0$, $T > 0$ 及 t 的多项式 $\bar{m}(t) > 0$,使得 $|p(t)| \leq \bar{m}(t)e^{-\delta t}$ $(t \geq T)$,则称函数 $p(t)$ 以速率 δ 指数收敛到零.

引理 1 考虑二阶系统

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= u \\ \dot{u} &= \tau + \zeta \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

其中 ζ 为未知干扰. 若存在已知函数 ρ,使得 $|\zeta| \leq \rho$,那么任给 $a_0 > 0$, $\varepsilon > 0$,可以设计一控制器 τ,使得对任意初值系统状态,在有限时间内以任意指数速率进入如下区域中:

$$D_0 = \{(x, u) \mid \sqrt{(x - a_0)^2 + u^2} \leq \varepsilon\}$$

证明 其基本思想是:令 $\bar{x} = x - a_0$,则新系统为

$$\dot{\bar{x}} = u \qquad \dot{u} = \tau + \zeta$$

对此系统利用 Lyapnov 函数法和变结构控制即可构造出满足该结论的控制律.

引理 2 考虑二阶系统(8),若存在已知函数 ρ,使得 $|\zeta| \leq \rho$,且任给 $c > 0$, $a > 0$,取 $0 < b < 1$, $s = ax + u$, $\tau = -au - (c + \rho)\operatorname{sgn} s$,则当初值属于区域

$$D = \left\{ (x, u) \;\middle|\; x > \frac{1 - b}{ab}u, \; -\frac{1}{a}u < x < \frac{c}{a^2}\ln(2 - b) - \frac{1}{a}u \right\}$$

时,闭环系统满足:①在有限时间 $T = \frac{|s_0|}{c}$ 时,滑动面 $s = 0$ 是可达的,且 $s(t) \equiv 0$ $(\forall t \geq T)$;②$x(t) > 0$ $(\forall t \geq 0)$,且 $x(t)$ 和 $u(t)$ 以速率 a 指数收敛到零. 这里 $s_0 = ax_0 + u_0$,其中 x_0 和 u_0 分别为 x 和 u 在 $t = 0$ 时的初值.

证明 利用滑动模态法即可证明.

推论 对系统(8),若初值不属于 D,由引理 1 可以设计一控制律,使系统状态在有限时间内以任意速率指数进入 D 中.

注 1 对于系统(8),任给初值 (x_0, u_0),当其属于 D 时,用引理 2 的控制律;当其不属于 D 时,由推论可知利用引理 1 中的控制律即可使其在有限时间内进入 D 中. 当状态进入 D 中时,再切换到引理 2 中的控制律,则系统满足引理 2 的结论. 从这个意义上讲引理 2 是一个全局性结果.

假设任取 $a > 0$, $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 满足矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_3 & \cdots & -k_{n-1} & -k_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & a \end{bmatrix}$$

的特征值均位于左半复平面内,从而对于给定的 $a>0$,可以构造正定矩阵 P 和 Q,使得

$$PA + A^{T}P = -Q \tag{9}$$

且有 $\sigma>0$,满足 $P\sigma\leq Q$.

定理 1　任给 $c>0$, $a>0$, k_i ($i=1,\cdots,n$) 满足上面假设,取 $b\in(0,1)$, $s=ax_1+u_1$,选取控制律为

$$\left.\begin{aligned}\tau_1 &= -au_1-(c+\rho_1)\operatorname{sgn} s\\ \tau_2 &= -k_1y_1-k_2y_2-\cdots-k_ny_n-\rho_2\operatorname{sgn} s_1\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中 $y^{T}\triangleq[y_1,\cdots,y_n]^{T}\triangleq[u_2,x_2,\frac{x_3}{x_1},\cdots,\frac{x_n}{x_1^{n-2}}]^{T}$, $d=[1,0,\cdots,0]^{T}$, $s_1=d^{T}Py$,则当 x_1, u_1 的初值属于区域

$$D=\left\{(x_1,u_1)\ \middle|\ \begin{aligned}&x_1>\frac{1-b}{ab}u_1,\\ &-\frac{1}{a}u_1<x_1<\frac{c}{a^2}\ln(2-b)-\frac{1}{a}u_1\end{aligned}\right.$$

时,由(7)式和(10)式构成的闭环系统满足: x_1, u_1 以速率 a 指数收敛到零; x_2, u_2 以速率 $\frac{\sigma}{2}$ 指数收敛到零; x_i 以速率 $\frac{\sigma}{2}a^{i-2}$ ($i=3,\cdots,n$) 指数收敛到零.

证明　由引理 2 可知, $x_1>0$. 利用(10)式及 y_i 与 x_i 之间的变换可推知由新状态变量 y_i 构成的线性定常系统的状态阵为 A. 再定义系统的 Lyapunov 函数为 $V=\frac{1}{2}y^{T}Py$ 即可证明.

利用推论可知构成整个闭环系统的镇定律为:若初值属于 D 时,用(10)式;若初值不属于 D 时,先用引理 1 的控制律,当状态分量 x_1, u_1 进入 D 中时,用控制律(10)式.

注 2　由注 1 可知,本定理的控制律中不含有初值项,使得该镇定律全局成立.

3　算　例

考虑平面上的刚体移动机器人(详见文献[7]).其动力学方程为

$$\left.\begin{aligned}I_0\ddot{\theta} &= \frac{L}{r}(\bar{\tau}_1-\bar{\tau}_2)+\zeta_1\\ m\ddot{z}_1 &= \lambda\cos\theta-\frac{1}{r}(\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)\sin\theta+\zeta_2\\ m\ddot{z}_2 &= \lambda\sin\theta+\frac{1}{r}(\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2)\cos\theta+\zeta_3\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中 $[z_1,z_2]^{T}$ 为机器人上一点 O 在惯性系中的坐标; θ 为机器人行进方向与惯性系横向的夹角; m 为移动机器人质量; I_0 是移动机器人绕过 O 点垂直轴的转动惯量,这两者均是未知的; r 为驱动轮半径; $2L$ 为两驱动轮间的长度; $\bar{\tau}_i$ ($i=1,2$) 为作用在两驱动轮轴向上的控制力矩; ζ_i ($i=1,2,3$) 为摩擦及各种干扰引起的不确定性; λ 为驱动轮轴向所受的约束反力. 方程(11)可写成(1)式的形式,并进而变换为(6)式的形式.

设轮子与地面接触点满足无滑动条件,这一非完整约束可表示为

$$\dot{z}_1\cos\theta+\dot{z}_2\sin\theta=0 \tag{12}$$

定义　$v_1=\theta$　$v_2=\dot{z}_2\cos\theta-\dot{z}_1\sin\theta$

取如下全局同胚变换:

$$x_1=\theta\qquad x_2=-z_1\sin\theta+z_2\cos\theta$$

$$x_3=z_1\cos\theta+z_2\sin\theta$$

$$v_1=u_1\qquad v_2=u_1x_3+u_2$$

取　$\bar{\tau}=B_2^{-1}(D_2\tau+C_2u)$

$$\zeta=-D_2^{-1}H^{T}R^{T}\zeta$$

则系统(11)和(12)可化为

$$\dot{x}_1=u_1\qquad \dot{x}_2=u_2\qquad \dot{x}_3=x_2u_1$$

$$\dot{u}_1=\tau_1+\zeta_1\qquad \dot{u}_2=\tau_2+\zeta_2$$

其中 τ 和 ζ 由(7)式定义. 设移动机器人动力学方程中 $r=L=1\ \mathrm{m}$, $m=0.5\ \mathrm{kg}$, $I_0=0.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$,干扰为正弦信号

$$\zeta_i=\sin(500t)\qquad i=1,2,3$$

选取　$a=1$　$b=\frac{1}{2}$　$c=10$

则定理中的初值区域为

$$D=\{(x_1,u_1)\mid x_1>u_1,\ -u_1<x_1<4-u_1\}$$

取　$k_1=4$　$k_2=7$　$k_3=-10$

可求得相应的正定阵

$$P=\begin{bmatrix}1.17 & 3.67 & -4.3\\ 3.67 & 18.5 & -24.67\\ -4.3 & -24.67 & 42.33\end{bmatrix}$$

取　$\delta=0.03$　$\zeta_1=2\zeta_1$

$$\zeta_2=-2x_3\zeta_1-2\zeta_2\sin x_1+2\zeta_3\cos x_1$$

$$\rho_1=2\qquad \rho_2=4+2|x_3|$$

初始位置　$x(0)=[\pi/4,20,10]^{T}$

初始速度　$u(0)=[0,0]^{T}$

易检验该初值在区域 D 中,控制律取为(10)式的形式. 计算机仿真算出的 x 和 u 的响应曲线如图 1 和图 2 所示,可以看出闭环系统在干扰下具有很好的鲁棒性,仿真结果证实了本文方法的正确性.

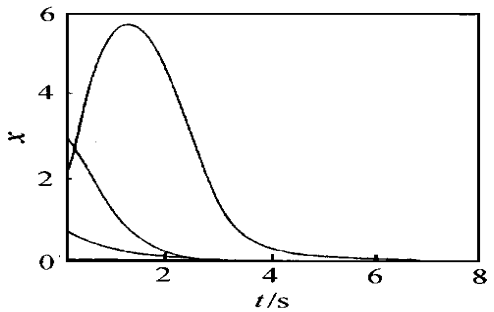


图 1 x 的响应曲线

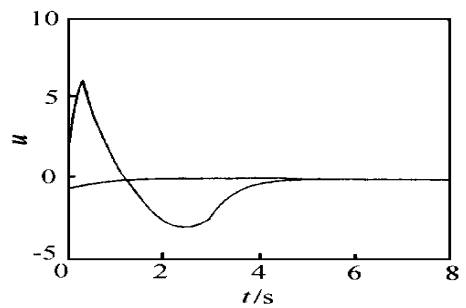


图 2 u 的响应曲线

4 结 论

本文对于惯性参数已知的带干扰的非完整动力学系统给出了不依赖初值(如注 1 所言)的指数镇定控制器,这里限于篇幅仅给出了非完整约束(3)可化为单链 2 个输入情形的结果,用同样的办法可将这一结果推广到(3)式可化为多链单生成元的多输入系统(即假设 3 的多链系统).

参 考 文 献

1 Brockett W. Asymptotic stability and feedback stabilization. In: Brockett W, Millman R, Sussmann H, eds. Differential Geometric Control Theory. Boston: Birkhauser, 1983. 181～208

2 Kolmanovsky I V, McClamroch N H. Development in nonholonomic control problems. IEEE Control Systems, 1995, 15(6): 20～36

3 Kolmanovsky I V, McClamroch N H. Application of integrator backsteping to nonholonomic control problems. In: IFAC Nonlinear Control Systems Design. 1995. 673～678

4 Pomet J P. Explicit design of time varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift. Systems and Control Letters, 1992, 18: 147～158

5 Robert T M, Murry R M. Exponential stabilization of nonlinear driftless control systems via time-varying homogeneous feedback. IEEE Trans AC, 1997, 42(5): 614～628

6 Wash G C, Bushnell L G. Stabilization of multiple input chained form control systems. Syst and Contr Lett, 1995, 25: 227～234

7 Campion G. Controllability and state feedback stabilizability of nonholonomic mechanical systems. In: Canudas C W, ed. Advanced Robot Control. New York: Springer-Verlag, 1991. 106～124

8 Bloch A, Drakunov S. Stabilization of a nonholonomic system via sliding modes. In: Proc 33rd CDC. New York: IEEE, 1994. 2961～2963

Variable Structure Exponential Stabilization of Uncertain Nonholonomic Dynamic Systems

Wang Chaoli Huo Wei Dong Wenjie

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, School of Science)

Abstract The chained form control system is a kind of canonical form of nonholonomic kinematic systems. Many nonholonomic kinematic systems can be transformed into this kind of form by coordinate and input transformations. Using variable structure control, a globally stabilizing controller is given directly based on nonholonomic dynamic systems with uncertainties when the nonholonomic constraints can be converted into chained form control systems. The proposed controller satisfies that there exists a finite time, after that time, the states of the closed loop system exponentially converge to zero with an arbitrarily given rate. The proposed result is used to stabilize a mobile robot. Simulation result shows that the approach is effective.

Key words non-linear control systems; stabilization; disturbances; nonholonomic systems; variable structure control