一次二阶矩可靠度方法及其软件

张建国
(北京航空航天大学 工程系统工程系)

摘 要 开发了利用一次二阶矩方法计算正态分布、对数正态分布、极值分布和截断正态分布随机变量非线性极限状态方程可靠度的软件,并利用相关系数考虑了机械产品随机变量相关的情况. 在增加相应简单模块的基础上,可用于计算包含其它分布类型随机变量极限状态方程的可靠度. 软件运行表明这种方法迭代格式简单,收敛快,可用于计算机械零件、结构和机构可靠度.

关键词 结构; 程序设计; 可靠性
分类号 TB 311

一次二阶矩可靠度方法是在机械可靠性设计中广泛应用的方法,经过几十年的研究发展,已经成为机械可靠度理论的重要核心内容,并已达到工程实用的程度. 经过国际安全理事会推荐,已经成为世界各国标准、规范的基础. 因此,开发一对不同分布类型随机变量都适用的通用软件,在已知功能函数的显式表达式的情况下,通过输入随机变量的均值和方差及相关系数,利用本软件计算功能函数的可靠度,非常具有工程实际意义.

1 一次二阶矩可靠度方法

设极限状态方程为

$$Z = g(X) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

设 $p^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 为失效面上的设计验算点,将上式在 p^* 按级数线性展开,得

$$Z \approx g(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_i^*} (x_i - x_i^*) =$$

$$a_0^* + \sum_{i=1}^{n} a_i^* (x_i - x_i^*)$$

其中

$$a_0^* = g(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$$

$$a_i^* = \left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{x_i = x_i^*} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

则 Z 的均值与方差为

$$\mu_Z = \sum_{i=1}^{n} a_i^* (\mu_i - x_i^*)$$

$$\sigma_Z \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i^* \sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\, a_i^* a_j^* \sigma_i \sigma_j}$$

其中 μ_i 为变量 x_i 的均值; σ_i 为其方差; ρ_{ij} 为变量 x_i 与 x_j 的相关系数; 可靠性系数 β 为

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^* (\mu_i - x_i^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i^* \sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\, a_i^* a_j^* \sigma_i \sigma_j}}$$

第 i 个随机变量的灵敏度系数 α_i 为

$$\alpha_i = \frac{a_i^* \sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i^* \sigma_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\, a_i^* a_j^* \sigma_i \sigma_j}}$$

把 α_i 代入 β,得

$$x_i^* = \mu_i - \beta \alpha_i \sigma_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

一般情况下,机械可靠性中的随机变量不一定是正态分布. 在 JC 法中作了以下工程近似处理[1],即对非正态变量进行"当量正态化",其方法为: 设 x 为非正态连续型随机变量,在设计验算点 p^* 处对其进行当量正态化,即找出正态随机变量 x_N,使在 p^* 处满足下列条件: ① $F_{x_N}(x^*) = F_x(x^*)$,即 x_N 的分布函数在 p^* 处的值与非正态变量 x 的分布函数在 p^* 处的值相等; ② $f_{x_N}(x^*) = f_x(x^*)$,即 x_N 的密度函数在 p^* 处的值与非正态变量 x 的密度函数在 p^* 处的值相等.

根据条件 ①,得

$$F_x(x^*) = \int_{-\infty}^{x^*} f_x(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x^*} f_{x_N}(x)\,\mathrm{d}x = \Phi\left(\frac{x^* - \mu_{x_N}}{\sigma_{x_N}}\right)$$

$$\mu_{x_N} = x^* - \Phi^{-1}[F_x(x^*)]\,\sigma_{x_N}$$

式中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数.

收稿日期: 1998-04-03 作者 男 32 岁 工程师 100083 北京

根据条件②,得

$$f_x(x^*) = f_{x_N}(x^*) = f\left(\frac{x^* - \mu_{x_N}}{\sigma_{x_N}}\right)\frac{1}{\sigma_{x_N}}$$

所以 $\sigma_{x_N} = f\{\Phi^{-1}[F_x(x^*)]\}/f_x(x^*)$

式中 $f(\cdot)$ 为标准正态分布的密度函数. 由于 $x_i^* = \mu_i - \beta\alpha_i\sigma_i$ 只有 n 个方程,但有 β 与 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ 共 $n+1$ 个未知数. 因此,需用迭代法求解.

2 软件流程图及功能框图

软件的流程图及功能框图分别见图 1 和图 2. 本软件为通用二阶矩法编制,考虑了机械产品中常见的正态、极值、对数正态和截断正态 4 种分布类型和随机变量相关的情况. 对以上 4 种分布类型以外的分布,可对程序增加相应的模块解决.

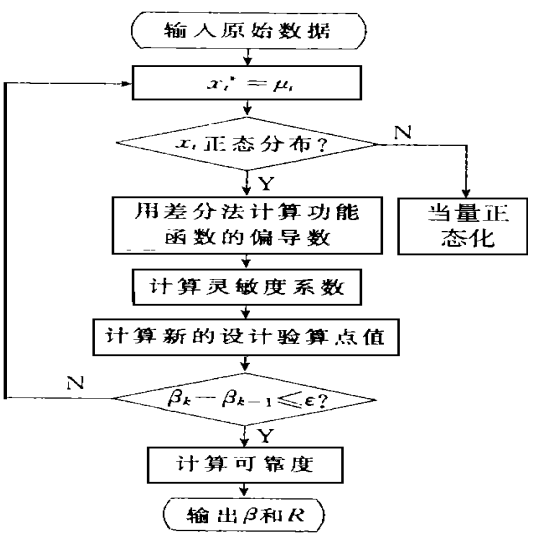


图 1 软件流程图

在使用本软件之前,需要准备功能函数的表达式、功能函数中随机变量的类型及其均值、方差和变量间的相关系数作为原始输入.

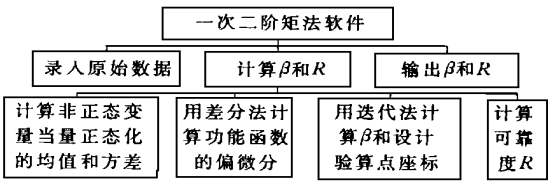


图 2 软件功能框图

3 算 例

已知某梁极限状态方程 $Z = sw - m$,其中 m 为梁所受弯矩; s 为材料屈服极限; w 为梁的剖面系数,设变量之间不相关,即 $\rho_{mm} = \rho_{ss} = \rho_{ww} = 1$, $\rho_{ms} = \rho_{mw} = \rho_{sw} = 0$; s、w、m 均为正态分布;其

$\mu_m = 112\,965\,120\,\text{N}\cdot\text{mm}$ $\sigma_m = 22\,593\,024\,\text{N}\cdot\text{mm}$

$\mu_s = 274.6\,\text{MPa}$ $\sigma_s = 34.3\,\text{MPa}$

$\mu_w = 820\,000\,\text{mm}^2$ $\sigma_w = 41\,000\,\text{mm}^2$

利用本软件算得 $\beta = 3.03$,可靠度 $R = 0.9995$.

4 结束语

软件使用表明,本软件采用的方法迭代格式简单,收敛快,是工程设计人员非常实用的机械结构可靠度计算的有效工具,可用于计算机械零件、结构和机构可靠度. 计划增加的随机变量分布类型假设检验程序模块将使本软件更完善.

参 考 文 献

1 李 杰. 随机结构系统 ——分析与建模. 北京:科学出版社, 1996. 255~263

First-Order Second-Moment Reliability Method and Its Software

Zhang Jianguo

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of System Engineering of Engineering Technology)

Abstract The common software of the first-order second-moment reliability method is developed. It can be used to calculate the reliability of the non-linear function with normal, log-normal, extreme and truncated normal statistically dependent random variables. The calculation results show that this method is simple in iteration and converge fast. It can be used in practical engineering design, for example, the structure, mechanism and mechanical part design. This software is developed using block structure method, so it is convenient for further development. The random variables with the other kinds of distribution can be considered by developing the corespondent programs.

Key words structures; programming; reliability