分析蜂窝夹芯板脱胶问题的状态分解-能量法[1)]

缪长青 孟庆春 张 行
(北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系)

摘 要 讨论了工程中常见的夹芯板面板与芯材间的脱胶问题,用状态分解方法建立了一种分析含脱胶区的蜂窝夹芯板的力学模型. 将分析夹芯板的脱胶问题归结为分析由脱胶引起的附加位移与附加应力. 利用双三角级数和 Rayleigh-Ritz 方法求解了具有矩形脱胶区的蜂窝夹芯板脱胶问题的附加位移,对解的收敛性分析表明具有较好的收敛性. 本文的解,为确定含脱胶的蜂窝夹芯板临界屈曲载荷以及断裂力学参数的确定,提供了合理而简单的位移模态.

关键词 蜂窝结构; 夹芯层板; 脱胶; 能量法; 状态分解
分类号 V 214.6

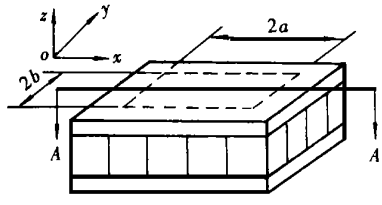
金属材料蜂窝夹芯结构由于具有比强度高、比刚度大等优点,因而在飞行器结构中得到广泛应用. 然而夹芯结构的应用也带来了一些需要解决的新问题. 由于这种结构的界面强度很低,一个最常见的问题就是分层损伤,即面板与芯材间的脱胶分层. 而目前对于夹层结构板芯脱胶分层问题研究的文献还较少[1, 2],工程实际中,脱胶区的形状一般是椭圆形的,从保证安全与便于分析的考虑出发,可以用外切矩形代替原有的椭圆形状进行分析. 因此,本文对含矩形板芯脱胶区的蜂窝夹芯板进行研究,用状态分解法建立板的分析模型,并利用能量方法分析含矩形脱胶区夹芯板的问题.

1 力学模型

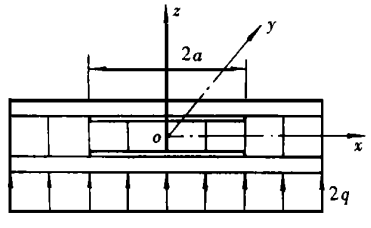
图 1(a) 表示一个蜂窝夹芯板,在面板与蜂窝的上界面有一个矩形脱胶区. 假设芯材的横向压缩刚度为无限大,纵向拉压刚度与弯曲刚度均为零,同时横向剪切应力沿厚度方向均匀分布. 因此,由剪应力互等定理,可以认为在面板与蜂窝的下界面也存在大小相等的矩形脱胶区,如图 1(b) 所示.

进一步,将图 1 板上的载荷分为关于板的中面为对称与反对称两部分,如图 2(a) 与图 2(b) 所示. 由于对称压缩载荷的存在,可以认为在脱胶区面板与芯材间依然具有法向约束. 由于芯材无横向压缩变形,只需考虑反对称载荷状态.

最后,受反对称载荷、含双脱胶区的蜂窝夹芯板受力状态(α)又可以分为状态(β)与(γ),如图 3 所示. 图中,状态(β)表示受反对称载荷、未脱胶的夹芯板. 在此状态中,我们人为地制造一对脱胶区,即解除面板与芯材在此区的切向约束,代之以切向约束力. 此一状态可被称为基本状态. 而状态(γ)则表示一个不受反对称载荷、含有脱胶区的蜂窝夹芯板. 在此状态中,在脱胶区上作用有剪切载荷,它与状态(β)的切向约束力大小相等方向相反. 状态(γ)中的位移与内力即是由于脱胶而引起的附加位移与内力,此一状态可被称为附加



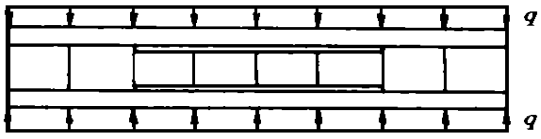
(a) 结构示意图



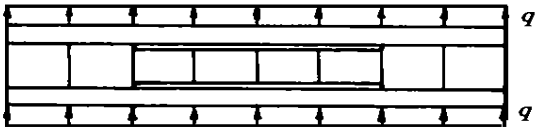
(b) A-A 剖面图

图 1 含矩形脱胶区的蜂窝夹芯板

收稿日期: 1996-11-11 第一作者 男 33 岁 博士生 100083 北京
1) 国家自然科学基金资助项目

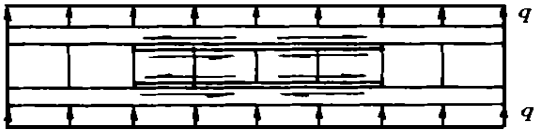


(a) 对称载荷状态



(b) 反对称载荷状态(α)

图 2 蜂窝夹芯板载荷状态的对称与反对称分解



(a) 状态(β)



(b) 状态(γ)

图 3 脱胶蜂窝夹芯板的基本与附加状态分解

状态, 是本文研究的对象. 而状态(β)属于无脱胶情况, 无须在此讨论.

2 控制方程

首先, 建立状态(γ)的支配方程. 脱胶区与未脱胶区的支配方程是相同的, 二者的区别在于: 脱胶区的界面剪力是已知的; 未脱胶区的界面剪力是未知的.

如图 1 以矩形脱胶区的面板中心及芯材中心建立坐标. 设面板任意点(x, y, z_1)面内位移与出面位移分别为 u_1、v_1、w_1, 芯材任意点面(x, y, z_2)内位移与出面位移分别为 u_2、v_2、w_2; $u_{10}(x, y)$、$v_{10}(x, y)$为面板中面的面内位移. 由面板直法线假设与芯材均匀剪切假设, 可知:

1) 几何方程

$$w_1 = w_2 = w(x, y) \tag{1}$$

$$u_1 = u_{10}(x, y) - \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \cdot z_1 \tag{2}$$

$$v_1 = v_{10}(x, y) - \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \cdot z_1 \tag{3}$$

$$u_2 = \alpha(x, y) \cdot z_2 \tag{4}$$

$$v_2 = \beta(x, y) \cdot z_2 \tag{5}$$

从而, 面板应变分量 ε_{x1}, ε_{y1} 与 γ_{xy1} 分别为

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_{10}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z_1 \tag{6}$$

$$\varepsilon_{y1} = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_{10}}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z_1 \tag{7}$$

$$\gamma_{xy1} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_{10}}{\partial y} + \frac{\partial v_{10}}{\partial x} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z_1 \tag{8}$$

同时, 芯材应变分量 γ_{xz2} 与 γ_{yz2} 分别为

$$\gamma_{xz2} = \frac{\partial u_2}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{9}$$

$$\gamma_{yz2} = \frac{\partial v_2}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{10}$$

式中 α 与 β 分别为芯材在 x, y 方向的转角.

2) 物理方程

由线弹性本构关系, 面板应力分量 σ_{x1}, σ_{y1} 与 τ_{xy1} 为

$$\sigma_{x1} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u_{10}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z_1 + \mu \cdot \left(\frac{\partial v_{10}}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z_1\right)\right] \tag{11}$$

$$\sigma_{y1} = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial v_{10}}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z_1 + \mu \cdot \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z_1\right)\right] \tag{12}$$

$$\tau_{xy1} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial u_{10}}{\partial y} + \frac{\partial v_{10}}{\partial x} - 2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z_1\right) \tag{13}$$

同时, 芯材应力分量 τ_{xz2} 与 τ_{yz2} 分别等于

$$\tau_{xz2} = G_x \cdot \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{14}$$

$$\tau_{yz2} = G_x \cdot \left(\beta + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{15}$$

3) 平衡方程

$$\frac{\partial N_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial y} = \tau_{xz} \tag{16}$$

$$\frac{\partial N_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy1}}{\partial x} = \tau_{yz} \tag{17}$$

$$\frac{\partial Q_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y1}}{\partial y} = p(x, y) \tag{18}$$

$$Q_{x1} + \frac{\partial M_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy1}}{\partial y} - t_1 \cdot \tau_{xz} = 0 \tag{19}$$

$$Q_{y1} + \frac{\partial M_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy1}}{\partial x} - t_1 \cdot \tau_{yz} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial Q_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y2}}{\partial y} = -2p(x, y) \tag{21}$$

$$2 \cdot \left(\frac{\partial Q_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y1}}{\partial y}\right) + \frac{\partial Q_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{y2}}{\partial y} = 0 \tag{22}$$

其中

$$N_{x1}=\int_{-t_1}^{t_1}\sigma_{x1}\mathrm{d}z_1 \qquad M_x=-\int_{-t_1}^{t_1}\sigma_{x1}\cdot z_1\mathrm{d}z_1$$

$$N_{y1}=\int_{-t_1}^{t_1}\sigma_{y1}\mathrm{d}z_1 \qquad M_y=-\int_{-t_1}^{t_1}\sigma_{y1}\cdot z_1\mathrm{d}z_1$$

$$N_{xy1}=\int_{-t_1}^{t_1}\tau_{xy1}\mathrm{d}z_1 \qquad M_{xy}=-\int_{-t_1}^{t_1}\tau_{xy1}\cdot z_1\mathrm{d}z_1$$

$$Q_{x2}=\int_{-t_2}^{t_2}\tau_{xz2}\mathrm{d}z_2 \qquad Q_{y2}=\int_{-t_2}^{t_2}\tau_{yz2}\mathrm{d}z_2$$

上述方程中 $p(x,y)$ 为面板与芯材间的法向约束力; E 为面板材料弹性模量; G_x 与 G_y 为芯材剪切模量.

根据对蜂窝夹芯梁脱胶问题的状态分解解析分析[3], 我们知道, 当脱胶区较大时 $\left\{\frac{a}{t_2}\geqslant 8\right.$, 可以略去未脱胶段芯材的剪切变形, 即将未脱胶段近似作为刚体. 显然对于蜂窝夹芯板脱胶问题来说, 上述结论仍然成立, 而且未脱胶区作为刚体处理对脱胶区尺寸的要求比梁小. 因此, 当脱胶区面积较大时, 可将未脱胶区作为刚体处理, 并由此得脱胶区的边界条件如下:

在 $x=\pm a$ 处,

$$w=\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad u_{10}=v_{10}=0$$

在 $x=0$ 处,

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad u_{10}=0$$

在 $x=\pm b$ 处,

$$w=\frac{\partial w}{\partial y}=0 \qquad u_{10}=v_{10}=0$$

在 $y=0$ 处,

$$\frac{\partial w}{\partial y}=0 \qquad v_{10}=0$$

3　具有矩形脱胶区的夹芯板 Rayleigh-Ritz 解法

研究具有较大面积矩形脱胶区的夹芯板. 若矩形脱胶区的尺寸为 $2a\times 2b$, 根据上述的分析可设位移 w 为

$$w=\sum_{i=1,3,\cdots}^{n}\sum_{i=1,3,\cdots}^{m}A_{ij}\cdot\left(1+\cos\frac{i\pi x}{a}\right)\left(1+\cos\frac{j\pi y}{b}\right) \tag{23}$$

$$u_{10}=\sum_{i=1,3,\cdots}^{n}\sum_{i=1,3,\cdots}^{m}B_{ij}\cdot\left(1+\cos\frac{j\pi y}{b}\right)\sin\frac{i\pi x}{a} \tag{24}$$

$$v_{10}=\sum_{i=1,3,\cdots}^{n}\sum_{i=1,3,\cdots}^{m}C_{ij}\cdot\left(1+\cos\frac{i\pi x}{a}\right)\sin\frac{j\pi y}{b} \tag{25}$$

作用在(γ) 状态中脱胶面上的剪切载荷

$$\tau_{xz}=\sum_{l=0,1,3,\cdots}^{L}u\,\frac{\tau_{xl}}{2}\left(1+\cos\frac{l\pi x}{a}\right) \tag{26}$$

$$\tau_{y1}=\sum_{k=0,1,3,\cdots}^{K}\frac{\tau_{yk}}{2}\left(1+\cos\frac{k\pi y}{b}\right) \tag{27}$$

将以上含有待定系数的并满足位移边界条件的位移的三角函数项级数表达式代入几何方程式(1)~(10)与物理方程式(11)~(15), 给出应变分量与应力分量表达式, 并以所得结果与剪切载荷表达式(26), (27)一起将系统总势能写成以上待定系数亦即广义位移的函数, 利用总势能原理, 即总势能极值条件代替平衡方程式(16)~(22)去确定广义位移.

根据前面的假设和分析, 我们知道, 脱胶区的芯材是静定的. 因此在应用能量法确定位移待定系数 A_{ij}、B_{ij}、C_{ij} 时, 有两种方法: 一是将夹芯板作为一个整体确定总势能, 然后求解系数; 二是将板、芯分离, 确定总势能时不考虑芯材的应变能与外力势, 将板芯间的法向约束力也作为面板所受外力, 只确定面板的总势能, 然后求解系数. 可以证明两种方法所求得系数相同, 这里采用第一种方法求解.

夹芯板的应变能 U 为

$$U=\int_{-t_1}^{t_1}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\left\{\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_{x1}^2+\varepsilon_{y1}^2+2\mu\varepsilon_{x1}\varepsilon_{y1})+\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy1}^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z_1+\int_{0}^{t_2}\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\tau_{xz2}^2}{G_x}+\frac{\tau_{yz2}^2}{G_y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z_2 \tag{28}$$

夹芯板的外力势 V 等于

$$V=2\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\{\tau_{xz}[u_2(x,y,t_2)-u_1(x,y,t_2)]+\tau_{yz}[v_2(x,y,t_2)-v_1(x,y,t_2)]\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$$

$$\mathrm{d}\quad 2\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\left\{\frac{\tau_{xz}^2}{G_x}+\frac{\tau_{yz}^2}{G_y}\right\}t_2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-2\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a}\left\{\tau_{xz}\left[u_{10}+\frac{\partial w}{\partial x}(t_1+t_2)\right]+\mathrm{Ld}\ \tau_{yz}\left[v_{10}+\frac{\partial w}{\partial y}(t_1+t_2)\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{29}$$

从而, 夹芯板总势能 Π 具有如下的表达式:

$$\Pi=U-V \tag{30}$$

根据势能原理, 可知

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{ij}} = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial B_{ij}} = 0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_{ij}} = 0 \tag{33}$$

求解由式(31)~(33)确定的联立方程组, 可得到系数 A_{ij}、B_{ij}、C_{ij} 的值, 然后代入式(1)~(15)可得到应力、应变、位移场.

4 Rayleigh-Ritz 法算例与收敛性验证

如在所设位移函数(23)~(25)式中取 $n=1$, $m=1$, 在式(26)、(27)所示剪切载荷中取 $L=K=1$. 求解式(31)~(33)确定的联立方程组, 可得

$$A_{11} = \frac{2(1-\mu^2)(t_1+t_2)}{E\pi^4 t_1^3} \cdot \frac{\left\{\frac{2\tau_{x0}+\tau_{x1}}{a}+\frac{2\tau_{y0}+\tau_{y1}}{b}\right\}}{\left\{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{2}{3a^2b^2}\right\}} \tag{34}$$

$$B_{11} = -4\frac{1-\mu^2}{Et_1\pi^3} \cdot \{[6a^2+b^2(1-\mu)](2\tau_{x0}+\tau_{x1}) - ab(3-\mu)(2\tau_{y0}+\tau_{y1})\} / \{[6b^2+a^2(1-\mu)][6a^2+b^2(1-\mu)]-(3-\mu)^2\} \tag{35}$$

$$C_{11} = -4\frac{1-\mu^2}{Et_1\pi^3} \cdot \{[6b^2+a^2(1-\mu)](2\tau_{y0}+\tau_{y1}) - ab(3-\mu)(2\tau_{x0}+\tau_{x1})\} / \{[6b^2+a^2(1-\mu)][6a^2+b^2(1-\mu)]-(3-\mu)^2\} \tag{36}$$

对于矩形脱胶区在中心点 $x=0$, $y=0$ 处, 挠度 w 取最大值, 而在 $x=\pm a/2$, $y=0$ 处 u_{10}取最大值, 同时在 $x=0$, $y=\pm b/2$ 处 v_{10}取最大值:

$$w_{\max} = 4A_{11} \qquad u_{10\max} = 2B_{11} \qquad v_{10\max} = 2C_{11}$$

进一步, 如果我们假设 $a=b$, 即脱胶区为正方形, $\tau_x=\tau_{x0}=\xi_0$, $\tau_y=\tau_{y0}=\eta_0$, 即 x、y 方向剪切载荷为均布, 可得

$$w_{\max} = \frac{6(1-\mu^2)(t_1+t_2)a^3}{E\pi^4 t_1^3} \cdot (\xi_0+\eta_0) \tag{37}$$

$$u_{10\max} = 2\frac{1-\mu^2}{Et_1\pi^3} \cdot \frac{(7-\mu)\xi_0-(3-\mu)\eta_0}{5-\mu} \cdot a^2 \tag{38}$$

$$v_{10\max} = 2\frac{1-\mu^2}{Et_1\pi^3} \cdot \frac{(7-\mu)\eta_0-(3-\mu)\xi_0}{5-\mu} \cdot a^2 \tag{39}$$

如果我们选取几组不同的 n、m 值, 改变式(23)~(25)中所设位移函数的项, 并代入式(31)~(33), 求解联立的线性方程组, 可以确定面板的最大面内挠度及面板中面的最大面内位移. 计算结果列于表 1 与表 2.

表 1 挠度收敛性验证数值表

$n=m$	$\gamma_w = w_{\max}/w^*$
1	6.000 000
3	6.205 943
5	6.233 869
7	6.241 226
9	6.243 934
11	6.245 148
13	6.245 771

注: $a=b$, $w^* = \frac{(t_1+t_2)(\xi_0+\eta_0)(1-\mu^2)a^3}{\pi^4 t_1^3 E}$.

表 2 面板位移收敛性验证数值表

$n=m$	$\gamma_u = u_{10\max}/u_{10}^*$, $\gamma_v = v_{10\max}/v_{10}^*$, $\gamma_u = \gamma_v$
1	1.702 13
3	2.247 24
5	2.461 08
7	2.571 67
9	2.638 19
11	2.682 21
13	2.713 29
15	2.736 32
17	2.753 99
19	2.757 39

注: $a=b$, $\xi_0=\eta_0$, $\mu=0.3$, $u_{10}^* = \frac{(1-\mu^2)a^2\xi_0}{\pi^3 t_1 E}$, $v_{10}^* = \frac{(1-\mu^2)b^2\eta_0}{\pi^3 t_1 E}$.

由表 1 可见, 从 $n=m=3$ 起挠度 w 最大值的前两位数字即保持不变, 即 w 的收敛性非常好. 由表 2 可见, 从 $n=m=13$ 开始, 面内位移 u_{10}与 v_{10}最大值的前两位数字也保持不变, 即它们的结果也是收敛的.

我们知道, 当 $a=b$, $\xi_0=\eta_0$ 时, 有

$$\frac{u_{10\max}}{w_{\max}} = \frac{\gamma_u}{\gamma_w}\pi\left\{\frac{1}{1+t_2/t_1}\right\}\left\{\frac{\xi_0}{\xi_0+\eta_0}\right\}\frac{t_1}{a}$$

$$\frac{v_{10\max}}{w_{\max}} = \frac{\gamma_v}{\gamma_w}\pi\left\{\frac{1}{1+t_2/t_1}\right\}\left\{\frac{\eta_0}{\xi_0+\eta_0}\right\}\frac{t_1}{b}$$

由于 t_2/t_1 和 t_1/a 均比 1 小 1 个数量级, 由上式

可知, $u_{10\max}$与 $v_{10\max}$均比 $w_{\max}$小 2 个数量级.

5 结　论

综上所述, 可以得以下结论:

1) 本文提出了分析蜂窝夹芯板脱胶问题的状态分解法, 将问题归结为分析由脱胶引起的附加位移与附加内力;

2) 用 Rayleigh-Ritz 法求解了大范围脱胶情况下蜂窝夹芯板脱胶问题的附加位移, 并对解的收敛性进行了分析;

3) 分析表明, 解的收敛性较好, 挠度幅值的收敛速度比面内位移幅值收敛速度快得多;

4) 分析还表明, 面内位移比出面位移(挠度)要小 2 个数量级, 在设计计算中可略去不计;

5) 本文的解为确定含脱胶的蜂窝夹芯板屈曲临界载荷, 以及断裂力学参数的确定, 提供了合理和简单的位移模态.

参　考　文　献

1 Kim W C, Miller T C, Dharan C K H. Strength of composite sandwich panels containing debonds. Int J Solids Structures, 1993, 30(2): 211~ 223

2 Hwu C, Hu J S. Buckling and postbuckling of delaminated composite sandwich beams. AIAA J, 1992, 30(7): 1901~ 1909

3 缪长青, 张　行. 蜂窝夹芯梁脱胶问题的力学分析. 北京航空航天大学学报, 1998, 24(1): 54~ 57

4 中国科学院力学所. 夹层板壳的弯曲、稳定和振动. 北京, 科学出版社, 1977

5 张　行. 高等弹性理论. 北京航空航天大学出版社, 1994

State Decomposition-Energy Method for Analysis of Debonding Problem of Honeycomb Sandwich Plates

Miao Changqing　Meng Qingchun　Zhang Xing

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Flight Vihicle Design and Applied Mechanics)

Abstract　A sandwich plate with debonding between the face plates and honeycomb core is considered. A mechanical analysis model is built to study a honeycomb sandwich plate with debonding by state decomposition method. Analysis for debonding of honeycomb sandwich plates is carried out the by method of additional displacements and additional stresses produced by debonding between the face and core. The additional displacements of honeycomb sandwich plates containing rectangular debonding are analyzed by double trigonometric series and Rayleigh-Ritz method. The convergence of displacements shown by computation is satisfactory well. The result of displacements provides a simple and reasonable model for solving buckling load and fracture mechanics parameters of the honeycomb sandwich plate with debonding.

Key words　honeycomb structure; sandwich laminates; delamination; energy method; state decomposition