工序尺寸参数设计的数学模型

陈志同 杜 裴
(北京航空航天大学 制造工程系)

摘 要 由于工艺过程设计所涉及到的所有尺寸参数几乎都是耦合着的, 因此采用人工的、凭借经验的方法进行工序尺寸参数设计常常效率甚低. 为了提高设计效率及经济效果, 建立了一种工序尺寸参数设计的基本数学模型, 并给出了两个基本可行域的结构. 该模型的建立不仅可用于实现工序尺寸参数设计的最优化和自动化, 而且可用于证明已有方法的正确性及发现更好的设计方法.

关键词 工艺; 尺寸; 公差; 优化; 设计
分类号 TG 801

在一般的工艺过程设计问题中, 一方面, 设计者总是以最大和最小极限尺寸组成的一个闭集直接限定工序尺寸的许可变动范围. 但从经济性等方面考虑, 制造商有时并不必或不能要求生产出的零件件件合格, 例如, 在制造航空航天机械中的精密零件时, 往往要投放几件毛坯才能保证得到一件合格的零件, 此时仅靠直接限定工序尺寸的许可变动范围是不够的, 还需对其分布规律中的某些变量的变动范围加以控制才行, 这是本文要解决的第一个问题; 另一方面, 现有的工艺过程设计方法是基于设计者的经验的[1], 或只是孤立地对单个设计尺寸或工序尺寸按尺寸链的原理建立其规划设计的数学模型[2], 但实际上所有的工序尺寸、设计尺寸及最小工序余量尺寸构成了一个藕合着的难以分割的尺寸系统. 这些尺寸间的藕合关系构成了对所要设计的参数的约束. 如何合理地表达和利用这种约束关系正是本文将致力解决的另一个问题. 本文将通过以上两个问题的解决建立起工序尺寸参数设计的数学模型.

1 基本假设, 基本定义和基本命题

1.1 关于设计变量及其解

在零件设计和制造过程中, 关于零件的量有两种, 一种是设计过程最后所规定的量, 我们可称为设计尺寸参数, 其中存在于零件设计图中的称为零件设计尺寸参数, 存在于工艺规程中的称为工序设计尺寸参数, 简称工序尺寸参数; 另一种是在工艺过程中和工艺过程后所实际得到的量, 我们可称之为实际尺寸参数, 其中, 工艺过程后所形成并对应于零件设计尺寸参数的称为零件实际尺寸参数, 每个零件最终所获得的尺寸称为零件实际尺寸, 而各工序中所形成并对应于工序设计尺寸参数的称工序实际尺寸参数, 每个零件在本工序所获得的尺寸称为工序实际尺寸. 在这里, 某种尺寸总是对应单个零件的, 而某种尺寸参数则既可能是对应单个零件, 又可能是对应一批零件的.

显然, 工序设计尺寸参数正是工艺过程设计所给出的用于控制工艺过程的参数. 由于这些参数有多种可能的取值, 因此, 对其中的每一个参数我们都可以给出一个变量与之对应, 这个变量可称为工序设计尺寸变量, 所有的工序设计尺寸变量按一定的顺序组成的向量我们称为设计变量, 记为 $\boldsymbol{X}$, 工序设计尺寸变量的一个选定值称为工艺过程设计的一个解, 记为 $\boldsymbol{X}^*$.

1.2 工艺过程能力假设

由于本文的研究目的是构造工序尺寸参数规划问题的数学模型, 因而假设零件制造中的与工序尺寸参数的保证过程无关的过程都是已妥善地规定好的并必然能顺利实现的, 即:

1) 各工序实际尺寸的分布函数的形式是已知的;

2) 当各工序的余量足够时, 工艺过程总能保证:

(1) 零件实体的力学物理性能满足图纸设计要求;

(2) 零件表面的质量符合图纸设计要求;

(3) 零件的形状和尺寸精度符合图纸设计要求.

收稿日期: 1996-10-22 第一作者 男 31 岁 讲师 100083 北京

1.3　关于合格的定义和命题

首先, 有必要对单个零件合格这一概念给出明确的定义.

单个零件合格是指零件经过工艺过程以后, 能保证:

(1) 零件实体的力学物理性能满足图纸设计要求;

(2) 零件表面的质量符合图纸设计要求;

(3) 零件的形状和尺寸精度符合图纸设计要求;

(4) 零件表面间的位置尺寸和位置关系符合图纸设计要求.

其次, 在上述基本假设的前提下, 我们得到单个零件合格的充分必要条件: (1) 各工序有足够的余量; (2) 零件表面间的位置尺寸和位置关系符合图纸设计要求.

再次, 我们得到一批零件合格的充分必要条件: 如果要求的合格率为 P_0, 则 100 个零件中至少应有 $100P_0$ 个零件满足单个零件合格的充分必要条件.

2　设计变量的确定

按合格率 $P_0=1$ 和 $P_0<1$ 这两种不同取值, 我们可以把设计变量分成两种不同类型.

当 $P_0=1$ 时, 工序设计尺寸参数应该是工序实际尺寸的许可变动范围的两个极限值. 设某零件在某方向上有 m 个设计实际尺寸 $H_1, H_2, \cdots, H_m$, 这些尺寸通过 n 个工序实际尺寸 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 及至多 m 个毛坯尺寸 $L_{n+1}, \cdots, L_{n+m}$ 实现. 此时, 设计变量 $\boldsymbol{X}$ 可表示为

$$\boldsymbol{X}=(L_1^{\min}, L_1^{\max}, \cdots, L_i^{\min}, L_i^{\max}, \cdots, L_{m+n}^{\min}, L_{m+n}^{\max})$$

当 $P_0<1$ 时, 按本文 1.2 小节的假设, 工序实际尺寸的分布函数是已知的, 此时对工艺过程的控制实质上是要给定分布函数的特征参数的许可变动范围. 分析几种常见的分布函数, 我们发现它们都不多于两个特征参数, 而且它们与相应的分布函数的均值 μ 和均方差 σ 之间存在着一一对应的关系. 因此, 对于这些常见的分布函数, 理论上只需控制其均值和方差的变动范围就可以了.

但均值和方差是总体的参数, 它们一般是难以或不可能控制的. 不过, 当样本容量足够大时, 样本均值和方差与总体的均值和方差是非常接近的. 因此, 只要样本的容量足够大, 我们总可以以样本的均值和方差代替总体的均值和方差.

因此我们得到, 若要控制一批产品的合格率, 则只要对每个工序实际尺寸 L_i 在一定的样本容量的前提下控制样本均值 X_i 的变动范围 $[X_i^{\min}, X_i^{\max}]$ 的极限和样本均方差 S_i 的变动范围 $[S_i^{\min}, S_i^{\max}]$ 的极限就可以了 $(i=1, 2, \cdots, m+n)$. 此时设计变量 $\boldsymbol{X}$ 可表示为

$$\boldsymbol{X}=(X_1^{\min}, X_1^{\max}, S_1^{\min}, S_1^{\max}, X_2^{\min}, X_2^{\max}, S_2^{\min}, S_2^{\max}, \cdots, X_{m+n}^{\min}, X_{m+n}^{\max}, S_{m+n}^{\min}, S_{m+n}^{\max})$$

3　工序尺寸参数设计的数学模型

我们知道, 工序尺寸参数设计问题实际上是一个数学规划问题, 该问题可描述为

$$F(\boldsymbol{X}^*)=\min_{X\in D}F(\boldsymbol{X}) \qquad (1)$$

上式中, $F(\boldsymbol{X})$ 为给定的目标函数, $\boldsymbol{X}$ 为设计变量, $\boldsymbol{X}^*$ 为最优解. D 为约束空间, 也称可行域. 由前面的分析可知, 可行域 D 可以表示为

$$D: P(\text{零件合格}) \geqslant P_0 \qquad (2)$$

上式的含义: 使零件合格的概率不小于给定的合格率 P_0 的所有 X 的集合就是可行域 D.

一般来说, 目标函数的确定不太困难, 因此, 本文将只对可行域 D 的确定予以进一步讨论.

4　2 个基本方程及 4 个基本矩阵

按尺寸链的构成方法[1], 我们不难得到零件实际尺寸与工序实际尺寸的关系:

$$\begin{bmatrix}H_1\\H_2\\\vdots\\H_m\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}_1\begin{bmatrix}L_{n+1}\\L_{n+2}\\\vdots\\L_{n+m}\end{bmatrix} \qquad (3)$$

设零件每道工序的实际余量为 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, 则得工序实际尺寸和实际余量的关系:

$$\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\\vdots\\Z_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_2\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{bmatrix}+\boldsymbol{B}_1\begin{bmatrix}L_{n+1}\\L_{n+2}\\\vdots\\L_{n+m}\end{bmatrix} \qquad (4)$$

以上两式中, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$ 为系数矩阵, 它们由尺寸图表法[1]唯一确定. 如果将零件上的表面按一定的顺序编号, 并将 L_i, H_i 及 Z_i 与这些代号一一对应起来, 则由式 (3) 及 (4) 可以反过来确定尺寸图表. 对于一维尺寸系统, 上述的 4 个矩阵的元素全部由 −1, 0, 1 这 3 个数构成.

5 可行域的确定方法

对于式(2), 我们可以分 $P_0=1$ 和 $P_0<1$ 两种情况讨论可行域 D 及其子集合的构造问题.

5.1 $P_0=1$ 的情形

在这种情况下, 按单个(或一批)零件合格的充要条件, 式(2)可以表示为

$$D:\ P\left\{\begin{array}{l} H_1, H_2, \cdots, H_m \mid H_i \in [H_i^{\min}, H_i^{\max}] \\ \qquad i=1, 2, \cdots, m \\ Z_1, Z_2, \cdots, Z_n \mid Z_j^{\min} \leqslant Z_j \\ \qquad j=1, 2, \cdots, n \end{array}\right\} = 1 \tag{5}$$

上式中, $H_i^{\min}$ 和 $H_i^{\max}$ 是 H_i 的下限和上限, $Z_j^{\min}$ 是 Z_j 的下限. 又设向量 $\boldsymbol{C}=(L_1, L_2, \cdots, L_{n+m})$, 则式(5)等价于:

$$D:\left\{\begin{array}{ll} H_i^{\min} \leqslant H_i(\boldsymbol{C}) \leqslant H_i^{\max} & i=1, 2, \cdots, m \\ Z_j^{\min} \leqslant Z_j(\boldsymbol{C}) & j=1, 2, \cdots, n \end{array}\right. \tag{6}$$

D 不能直接表示成以 $\boldsymbol{X}$ 为变量的形式, 但 D 的一些子集合能表示成以 $\boldsymbol{X}$ 为变量的形式. 按照下述方法我们可以构造出 D 的一个以 $\boldsymbol{X}$ 为变量的子集合 D'.

设 H_i 包含 m_i 个组成环, 其中 m_{0i} 个为增环, 记为 U_{ik}, $k=1, 2, \cdots, m_{0i}$; 其余的 (m_i-m_{0i}) 为减环, 记为 U_{ik}, $k=m_{0i}+1, m_{0i}+2, \cdots, m_i$. 又设 $U_{ik}^{\min}$ 和 $U_{ik}^{\max}$ 分别为 U_{ik} 的许可下限和上限, 设 Z_j 包含 n_j 个组成环, 其中 n_{0j} 个为增环, 记为 V_{jk}, $k=1, 2, \cdots, n_{0j}$; 其余的 (n_j-n_{0j}) 为减环, 记为 V_{jk}, $k=n_{0j}+1, n_{0j}+2, \cdots, n_j$. 又设 $V_{jk}^{\min}$ 和 $V_{jk}^{\max}$ 为 V_{jk} 的许可下限和上限, 其中 $U_{ik}^{\min}$, $U_{ik}^{\max}$, $V_{jk}^{\min}$ 和 $V_{jk}^{\max}$ 都是工序尺寸参数, 它们最终与 $L_i^{\min}$, $L_i^{\max}$ 等工序尺寸参数对应, 此时的设计变量仍为 $\boldsymbol{X}=(L_1^{\min}, L_1^{\max}, \cdots, L_{n+m}^{\min}, L_{n+m}^{\max})$. 此处仅因叙述的方便而采用另一套符号表示. 由此可以得到 D 的一个子集合 D':

$$D':\left\{\begin{array}{ll} \sum_{k=1}^{m_{0i}} U_{ik}^{\max} - \sum_{k=m_{0i}+1}^{m_i} U_{ik}^{\min} \leqslant H_i^{\max} & i=1, 2, \cdots, m \\ \sum_{k=1}^{m_{0i}} U_{ik}^{\min} - \sum_{k=m_{0i}+1}^{m_i} U_{ik}^{\max} \leqslant H_i^{\min} & i=1, 2, \cdots, m \\ \sum_{k=1}^{n_{0j}} V_{jk}^{\min} - \sum_{k=n_{0j}+1}^{n_j} V_{jk}^{\max} \geqslant Z_j^{\min} & j=1, 2, \cdots, n \end{array}\right. \tag{7}$$

D' 可作为静态工艺规划中工序尺寸参数设计问题的一个可行域. 由于 $D' \subset D$, 因此尚有某些零件加工出来后满足式(6)而不满足式(7), 这就是漏检的情况. 这种问题可以通过终检得以解决.

对于动态工艺规划中工序尺寸参数的设计问题, 只需将经过加工获得的实际工序极限尺寸 $U_{ik}^{\min}$, $U_{ik}^{\max}$, $V_{ik}^{\min}$, $V_{ik}^{\max}$ 代入式(7)即可得到对于后续工序尺寸进行重新设计的可行域.

必须说明的是, 如果对式(7)中的参数加上等公差, 等精度等等限制, 则会使未知数的数目大大减少, 同时使设计计算大为简化. 但这也会导致最优解的丧失.

5.2 $P_0<1$ 的情形

设每道工序都需进行抽样检验, 则最终得到的产品必然是各工序都合格的产品. 现在的问题是, 如何确定样本均值 X_i 的变动范围 $[X_i^{\min}, X_i^{\max}]$ 和样本均方差 S_i 的变动范围 $[S_i^{\min}, S_i^{\max}]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 使得该批产品具有不低于 P_0 的合格率呢?

将第 i 个设计实际尺寸符合设计尺寸要求记为事件 A_i, $A_i=(H_i^{\min} \leqslant H_i \leqslant H_i^{\max})$, $i=1, 2, \cdots, m$; 又将第 i 个工序实际余量符合设计要求记为事件 B_i, $B_i=(Z_i^{\min} \leqslant Z_i)$, $i=1, 2, \cdots, n$. 按照实现的先后顺序, 将 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 和 $B_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 排成一列, 并以统一的字母组 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{m+n}$ 代替上述的 A_i 或 B_i, 再设 $Q_i=(W_i^{\min} \leqslant W_i \leqslant W_i^{\max})$, $i=1, 2, \cdots, m+n$. 若 Q_i 与 A_i 对应, 则有 $W_i^{\min}=H_i^{\min}$, $W_i=H_i$, $W_i^{\max}=H_i^{\max}$; 若 Q_i 与 B_i 对应, 则有 $W_i^{\min}=Z_i^{\min}$, $W_i=Z_i$.

设零件成为合格品的概率(合格率)为 P, 则式(2)可以写成

$$D:\quad P=P(Q_1Q_2\cdots Q_{m+n}) \geqslant P_0 \tag{8}$$

式(8)可以按条件概率的计算方法展开为

$$D:\quad P(Q_1)\times P(Q_2 \mid Q_1)\cdots \times P(Q_{m+n} \mid Q_1Q_2\cdots Q_{m+n-1}) \geqslant P_0 \tag{9}$$

D 不能直接表示成以 $\boldsymbol{X}$ 为变量的形式, 但 D 的一些子集合能表示成以 $\boldsymbol{X}$ 为变量的形式. 按照下述方法我们可以构造出 D 的一个以 $\boldsymbol{X}$ 为变量的子集合 D''.

分析式(9), 我们可以找到 D 的一个子集合 D':

$$D':\left\{\begin{array}{l} P(Q_i)=P(W_i^{\min} \leqslant W_i \leqslant W_i^{\max}) \geqslant P_i \\ \qquad i=1, 2, \cdots, m+n \\ P_1\times P_2\cdots P_{m+n}=P_0 \end{array}\right. \tag{10}$$

设随机变量 W_i 的概率密度函数为 $f_i(\boldsymbol{C})$, 它是 $(m+n)$ 个随机变量 L_i, $i=1, 2, \cdots, m+n$ 的边缘密度函数 $g_i(L_i, \mu_i, \sigma_i)$ 的乘积 (μ_i 为 L_i 的均值, σ_i 为 L_i 的均方差). 分别以 X_i 和 S_i 代替 μ_i 和 σ_i, 并对式(10)积分, 我们得到

$$D': \begin{cases} R(X_1, S_1, X_2, S_2, \cdots, X_{m+n}, S_{m+n}) \geqslant P_i \\ \qquad i = 1, 2, \cdots, m+n \\ 是\ P_1 \times P_2 \cdots P_{m+n} = P_0 \end{cases} \tag{11}$$

上式中, $R(X_1, S_1, X_2, S_2, \cdots, X_{m+n}, S_{m+n})$ 为 $f_i(\boldsymbol{C})$ 在 $W_i^{\min} \leqslant W_i \leqslant W_i^{\max}$ 上的积分.

D' 仍不能表示成以 $\boldsymbol{X}$ 为变量的形式. 为了计算 $X_i^{\min}$, $X_i^{\max}$, $S_i^{\min}$, $S_i^{\max}$ ($i=1, 2, \cdots, m+n$), 先需在式(11)中找一内点, 然后沿着 X_i, S_i ($i=1, 2, \cdots, n+m$) 共 $2(n+m)$ 个方向构造一个 $2(n+m)$ 维矩形, 不断扩大这个矩形直至其每一面上至少有一个角点与 D' 空间的内壁接触为止. 这个矩形的每一个表面的位置坐标对应于工序尺寸参数的一组值 $X_i^{\min}$, $X_i^{\max}$, $S_i^{\min}$, $S_i^{\max}$ ($i=1, 2, \cdots, m+n$), 这组值就是约束空间 D' 的一个内点. 按照这种方法我们可以找到很多这样的内点. 我们将由这些内点组成的集合称为可行域 D''.

6　结束语

本文提出了工序尺寸参数的概念, 并将所有工序尺寸, 设计尺寸及加工余量尺寸作为一个完整的尺寸系统进行分析, 提出了工序尺寸参数规划问题的数学模型及其约束空间的构造方法. 这对求解精度要求高, 尺寸多, 工序数目多的工艺规划问题将是一种行之有效的解决方法.

参　考　文　献

1　柯明扬. 航空航天机械制造工艺学. 北京: , 北京航空航天大学出版社, 1990

2　余建坤. 尺寸链可靠性理论及其应用. 机械设计与制造, 1992, (3): 4~ 8

3　李绍昌. 尺寸公差及装配零件公差的 CAD 系统. 机械工程师, 1992, 5: 14~ 21

4　凌树森. 可靠性在机械强度设计和寿命设计中的应用. 北京: 宇航出版社, 1988

5　浙江大学. 概率论与数理统计. 北京: 高等教育出版社, 1987

Mathematic Model of Process Dimension Parameter Planning

Chen Zhitong　Du Pei

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Manufacturing Engineering)

Abstract　Since nearly all of the dimension parameters in technological process planning are coupled together, manual method in the process dimension parameter planning(PDPP) is not always efficient and effective. In order to increase design efficiency and effect, an essential mathematic model about PDPP is established, and two basic constraint sets are given. This model is not only helpful to realize the automation and optimization of PDPP, but also useful to verify the correctness of existing PDPP methods and to find better PDPP methods.

Key words　technology; dimension; tolerance; optimization; planning