柔性机器人动力学建模的一种方法[1)]

边宇枢 陆 震
(北京航空航天大学 机电工程系)

摘 要 提出一种建立具有柔性关节的多柔杆机器人动力学方程的方法. 首先给出了柔性关节及柔性臂杆的简化模型, 然后利用 Kane 方法和假设模态法推导出完整的动力学方程并给出了递推公式. 在此基础上利用一个算例研究了臂杆柔性与关节柔性对机器人动力学响应的影响. 结果表明: 所建立的动力学模型更接近于实际的柔性机器人系统; 臂杆柔性与关节柔性都起着非常重要的作用, 因此在柔性机器人的动力学建模与控制中应充分考虑它们的影响.

关键词 建立模型; 动力学方程; 模态分析; 柔性机器人
分类号 TP 242.2

柔性机器人实质是一个具有无穷多自由度的柔性系统, 要想清楚描述柔性所带来的动力学效应, 首先必须建立精确的动力学模型. 一般情况下, 机器人系统的柔性主要包括臂杆本身存在的分布的柔性和驱动关节处的柔性. 在以往的研究工作中, 许多研究者只针对其中的一种情况进行研究, 即: 或者只考虑具有柔性关节的刚性结构[1]; 或者只考虑具有刚性关节的柔性结构[2]. 少数研究者在研究臂杆柔性时计入了关节柔性的影响, 但主要停留在单杆或双杆的模型上, 对于多杆的研究则通常只是对系统的刚度矩阵作些修正[3,4], 所建模型比较粗糙. 作为今后进一步研究柔性机器人的基础, 本文首先给出了一种同时考虑臂杆柔性与关节柔性的机器人动力学模型; 然后利用 Kane 方程给出了建立这类柔性机器人动力学方程的方法; 最后利用一个算例研究了这两种柔性对方程响应的影响.

1 柔性机器人的动力学模型

考虑具有柔性关节的开链式多柔杆机器人, 它由多个柔杆和多个柔性关节顺次联接而成. 驱动器安装在臂杆上, 经过传动系统和柔性关节驱动臂杆.

1.1 柔性关节的简化模型

1) 对于转动关节 i, 在小变形的情况下, 可以等效简化为一个刚度系数为 k_i 的线性扭转弹簧, k_i 综合考虑了驱动器和传动系统的刚度. 见图 1, 其中 q_i 为 i 杆的理论转角; θ_i 为 i 杆的实际转角; ε_i 为扭转弹簧所引起的弹性变形转角, $\varepsilon_i = \theta_i - q_i$; β_i 为第 i 个驱动器转子的转角, $\beta_i = \mu_i q_i$, μ_i 为传动系统的传动比.

2) 对于移动关节 i, 在小变形的情况下, 可以等效简化为一个刚度系数 k_i 的线性拉伸弹簧. 见图 2, 其中 D_i 为 i 杆移动的理论距离; d_i 为 i 杆移动的实际距离; ε_i 为拉伸弹簧所引起的弹性变形, $\varepsilon_i = d_i - D_i$.

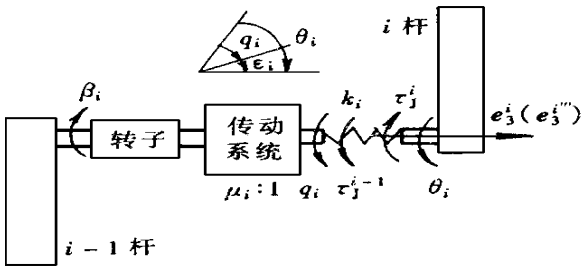


图 1 转动关节的简化模型

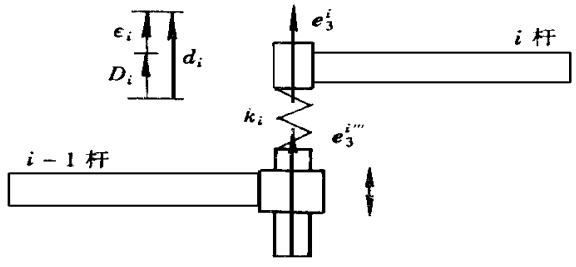


图 2 移动关节的简化模型

1.2 柔性臂杆的简化模型

假设: ① 每个臂杆的长度远大于横截面高度, 可视为 Bernoulli 梁; ② 忽略剪切变形和微元

收稿日期: 1997-11-03 第一作者 男 26 岁 讲师 100083 北京
1) 国家自然科学基金(59885001)和博士点基金资助项目

转动惯量的影响,且无轴向变形; ③ 臂杆作大范围刚性运动,而由杆件变形引起的弹性位移很小.

2　柔性机器人的运动学分析

2.1　坐标系的建立及坐标系变换

将 D-H 坐标系建立在臂杆前端的关节处[5],用 $o^i\boldsymbol{e}_1^i\boldsymbol{e}_2^i\boldsymbol{e}_3^i$ 表示与 i 杆固连的坐标系. s_i 表示关节 i 的类型, 关节为转动关节时 $s_i=0$, 为移动关节时 $s_i=1$.

如图 3、图 4 所示,从 $i-1$ 系到 i 系的变换可以认为按以下顺序进行: i' 系(即 $o^{i'}\boldsymbol{e}_1^{i'}\boldsymbol{e}_2^{i'}\boldsymbol{e}_3^{i'}$ 系)为假设 $i-1$ 杆无变形且关节 i 无动作(即 $q_i=0$ 或 $D_i=0$)时 i 杆上的坐标系; 由于 $i-1$ 杆发生弹性变形, i' 系变为 i'' 系(即 $o^{i''}\boldsymbol{e}_1^{i''}\boldsymbol{e}_2^{i''}\boldsymbol{e}_3^{i''}$ 系); i''' 系(即 $o^{i'''}\boldsymbol{e}_1^{i'''}\boldsymbol{e}_2^{i'''}\boldsymbol{e}_3^{i'''}$ 系)是由于单纯的关节动作(即 q_i 或 D_i 有变化)由 i'' 系变来的; 又由于关节的弹性变形(即绕 $\boldsymbol{e}_3^{i'''}$ 轴转动或移动 ε), i''' 系变为 i 系. 当臂杆变形很小时, 从 i' 系到 i'' 系的变换 $\boldsymbol{A}_{i''}^{i'}$ 可看作微变换,即

$$\boldsymbol{A}_{i''}^{i'}=\begin{bmatrix}1 & -\varphi_3^{i'} & \varphi_2^{i'} & \delta_1^{i'}\\ \varphi_3^{i'} & 1 & -\varphi_1^{i'} & \delta_2^{i'}\\ -\varphi_2^{i'} & \varphi_1^{i'} & 1 & \delta_3^{i'}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中 $\varphi^{i'}=[\varphi_1^{i'}\quad\varphi_2^{i'}\quad\varphi_3^{i'}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\delta^{i'}=[\delta_1^{i'}\quad\delta_2^{i'}\quad\delta_3^{i'}]^{\mathrm{T}}$ 分别为弹性扭转变形和弹性位移变形.

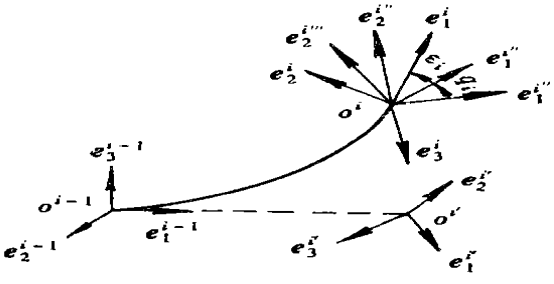


图 3　转动关节的坐标系

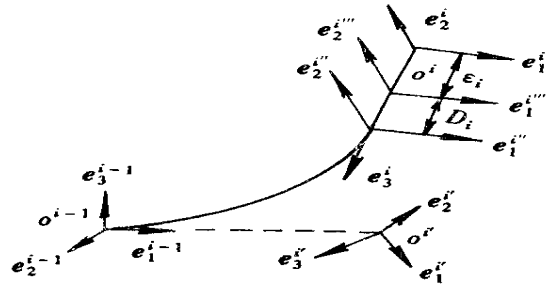


图 4　移动关节的坐标系

综合以上的变换最终可以得到从 $i-1$ 系到 i 系的变换, 记作

$$\boldsymbol{A}_i^{i-1}=\begin{bmatrix}R_i^{i-1} & P_i^{i-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

2.2　运动学分析

设 i 杆末端的弹性扭转变形和弹性位移变形在 i 系中分别描述为 φ^i 和 δ^i. 根据假设模态法, φ^i 和 δ^i 分别表示为

$$\varphi^i=\sum_{k=1}^{n_i}\varphi_k^i\phi_k^i(t)$$

$$\delta^i=\sum_{k=1}^{n_i}\delta_k^i\phi_k^i(t)$$

式中, $\phi_k^i(t)$ 为模态坐标; n_i 为 i 杆模态数; φ_k^i 和 δ_k^i 为定常系数, 各含三个分量 φ_{kj}^i, δ_{kj}^i $(j=1,2,3)$.

选取广义速率为各关节两端的速率和各杆的模态坐标对时间的一阶导数, 共有 $2N+\sum_{i=1}^{N}n_i$ (N 为机器人的关节数), 即

$$U_j=\begin{cases}\dot{q}_j & s_i=0\\ \dot{D}_j & s_i=1\end{cases}\qquad j=1,\ldots,N \tag{1}$$

$$U_j=\begin{cases}\dot{\theta}_{j-N} & s_i=0\\ \dot{d}_{j-N} & s_i=1\end{cases}\qquad j=N+1,\ldots,2N \tag{2}$$

$$U_j=\dot{\phi}_k^i(t)$$

$$j=2N+\sum_{r=1}^{i-1}n_r+k\qquad 1\leqslant k\leqslant n_i$$

$$i=1,\ldots,N \tag{3}$$

设 $i-1$ 杆末端的角速度为 ${}^*\omega^{i-1}$; i 系的角速度为 ω^i, 相应的第 j 个偏角速度为 ω_j^i; i 系的角加速度为 ε^i; i 系原点 o^i 的速度为 $\boldsymbol{v}^i$, 相应的第 j 个偏速度为 $\boldsymbol{v}_j^i$; i 系原点 o^i 的加速度为 $\boldsymbol{a}^i$; $\boldsymbol{P}_i^{i-1}$ 为在 $i-1$ 系中描述的 $i-1$ 系原点 o^{i-1} 到 i 系原点 o^i 的矢量. 则有[6]

$${}^*\omega^{i-1}=\omega^{i-1}+\dot{\varphi}^{i-1} \tag{4}$$

$$\omega^i=R_{i-1}^i\,{}^*\omega^{i-1}+(1-s_i)\boldsymbol{e}_3^i\dot{U}_{N+i}$$

$$i=1,\ldots,N \tag{5}$$

$$\varepsilon^i=R_{i-1}^i\varepsilon^{i-1}+(1-s_i)[(R_{i-1}^i\,{}^*\omega^{i-1})\times(\dot{U}_{N+i}\boldsymbol{e}_3^i)+\ddot{U}_{N+i}\boldsymbol{e}_3^i]+R_{i-1}^i[{}^*\omega^{i-1}\times\dot{\varphi}^{i-1}+\ddot{\varphi}^{i-1}] \tag{6}$$

$$\boldsymbol{v}^i=R_{i-1}^i[\boldsymbol{v}^{i-1}+\omega^{i-1}\times\boldsymbol{P}_i^{i-1}+\dot{\delta}^{i-1}]+s_i\dot{U}_{N+i}\boldsymbol{e}_3^i\qquad i=1,\ldots,N \tag{7}$$

$$\boldsymbol{a}^i=R_{i-1}^i[\boldsymbol{a}^{i-1}+\varepsilon^{i-1}\times\boldsymbol{P}_i^{i-1}+\omega^{i-1}\times(\omega^{i-1}\times\boldsymbol{P}_i^{i-1})+2\omega^{i-1}\times\dot{\delta}^{i-1}+\ddot{\delta}^{i-1}]+s_i[2(R_{i-1}^i\,{}^*\omega^{i-1})\times(\dot{U}_{N+i}\boldsymbol{e}_3^i)+\ddot{U}_{N+i}\boldsymbol{e}_3^i] \tag{8}$$

初始条件: $\boldsymbol{a}_0^0 = -\boldsymbol{g}^0$ ($\boldsymbol{g}^0$ 为重力加速度).

又设 i 杆上任一点 p 变形前的位矢为 $\boldsymbol{r}_p^i$, 变形量为 δ_p^i, 其速度为 $\boldsymbol{v}_p^i$, 相应的偏速度为 $\boldsymbol{v}_{pj}^i$, 加速度为 $\boldsymbol{a}_p^i$, 则有

$$\boldsymbol{v}_p^i = \boldsymbol{v}^i + \omega^i \times (\boldsymbol{r}_p^i + \delta_p^i) + \dot{\delta}_p^i = \boldsymbol{v}^i + \omega^i \times (\boldsymbol{r}_p^i + \delta_p^i) + \sum_{k=1}^{n_i} \delta_{pk}^i \dot{\phi}_k^i(t) \quad (9)$$

$$\boldsymbol{a}_p^i = \boldsymbol{a}^i + \varepsilon^i \times (\boldsymbol{r}_p^i + \delta_p^i) + \omega^i \times [\omega^i \times (\boldsymbol{r}_p^i + \delta_p^i)] + 2\omega^i \times \dot{\delta}_p^i + \ddot{\delta}_p^i \quad (10)$$

以上各式中,各运动量均在各杆自身的坐标系中描述; ω_j^i、$\boldsymbol{v}_j^i$、$\boldsymbol{v}_{pj}^i$ 可在上述递推过程中逐步得出.

3 柔性机器人的动力学分析

3.1 臂杆的第 j 个广义惯性力

设 i 杆上 p 处微元的质量为 $\mathrm{d}m$, 则其第 j 个广义惯性力为

$$\mathrm{d}(F_{\mathrm{L}}^*)_j^i = -\boldsymbol{v}_{pj}^i \cdot \boldsymbol{a}_p^i \mathrm{d}m \quad (11)$$

而整个 i 杆的第 j 个广义惯性力则为

$$(F_{\mathrm{L}}^*)_j^i = \iiint_i \mathrm{d}(F_{\mathrm{L}}^*)_j^i = -\iiint_i \boldsymbol{v}_{pj}^i \cdot \boldsymbol{a}_p^i \mathrm{d}m \quad (12)$$

经进一步整理,则臂杆的第 j 个总广义惯性力为

$$(F_{\mathrm{L}}^*)_j = \sum_{i=1}^{N} (F_{\mathrm{L}}^*)_j^i = \begin{cases} 0 & j \leqslant N \\ \sum_{i=j-N}^{N} (F_{\mathrm{L}}^*)_j^i & N < j \leqslant 2N \\ \sum_{i=m}^{N} (F_{\mathrm{L}}^*)_j^i & 2N + \sum_{r=1}^{m-1} n_r < j \leqslant 2N + \sum_{r=1}^{m} n_r \\ & 1 \leqslant m \leqslant N \end{cases} \quad (13)$$

3.2 转子的第 j 个总广义惯性力

$i-1$ 杆上的第 i 个驱动转子的第 j 个总广义惯性力为

$$(F_{\mathrm{R}}^*)_j^i = (F_{\mathrm{G}}^*)_j^i + (F_{\mathrm{T}}^*)_j^i \quad i = 1, \ldots, N \quad (14)$$

其中, $(F_{\mathrm{G}}^*)_j^i$ 是转子的惯性力主矢对第 j 个总广义惯性力的贡献. 此时可认为转子固连于 $i-1$ 杆之上, 因此在计算 $(F_{\mathrm{G}}^*)_j^i$ 时, 可以把转子的质量与惯量包括到 $i-1$ 杆中,归入到 3.1 节中计算即可.对于 $(F_{\mathrm{T}}^*)_j^i$ 的计算, 设坐标系 $(\zeta_1^i\ \zeta_2^i\ \zeta_3^i)$ 固定在 $i-1$ 杆上, ζ_3^i 轴与转子自转轴重合,设 I_3^i 为转子沿自转轴的转动惯量.则转子的惯性力主矩为

$$\boldsymbol{M}^i = -I_3^i \ddot{\beta}_i \zeta_3^i = -I_3^i \mu_i \ddot{q}_i \zeta_3^i \quad (15)$$

而转子的绝对角速度

$$\omega_{\mathrm{R}}^i = \mu_i \dot{q}_i \zeta_3^i \quad (16)$$

对于转动关节,相应的偏角速度为

$$\omega_{\mathrm{R}j}^i = \mu_i \zeta_3^i \delta_{ij} \quad (17)$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

对于移动关节,由于 D_i 是转子转动 q_i 而产生的,即 $D_i = f(q_i)$. 令 $1/b_i = \mathrm{d}f/\mathrm{d}q_i$, 则 $\dot{q}_i = b_i \dot{D}_i$, 相应的偏角速度为

$$\omega_{\mathrm{R}j}^i = \mu_i b_i \zeta_3^i \delta_{ij} \quad (18)$$

所以

$$(F_{\mathrm{T}}^*)_j^i = \boldsymbol{M}^i \cdot \omega_{\mathrm{R}j}^i = -(1-s_i) I_3^i \mu_i^2 \ddot{q}_i \delta_{ij} - s_i I_3^i \mu_i^2 b_i \ddot{q}_i \delta_{ij} \quad (19)$$

则转子的第 j 个总广义惯性力为

$$(F_{\mathrm{T}}^*)_j = \sum_{i=1}^{N} (F_{\mathrm{T}}^*)_j^i = -(1-s_i) I_3^i \mu_i^2 \ddot{q}_i \delta_{ij} - s_i I_3^i \mu_i^2 b_i \ddot{q}_i \delta_{ij} \quad (20)$$

3.3 广义主动力

在用 Kane 方法进行动力学分析时,不仅要考虑全部主动力对广义主动力的贡献, 还要考虑柔杆内力以及柔性关节内力对广义主动力的贡献.

1) 相邻臂杆之间的理想约束力所对应的广义主动力为零.

2) 重力对广义主动力的贡献实际已由(8)式的初始条件考虑了, 不用另求.

3) 关节的驱动力(或力矩)对第 j 个广义主动力的贡献.

关节 i 处的驱动力(或力矩) τ_i 的第 j 个总广义主动力, 仿照刚性关节可求得

$$(F_{\mathrm{A}})_j = \sum_{i=1}^{N} (F_{\mathrm{A}})_j^i = \tau_i \delta_{ij} \quad (21)$$

4) 杆的内力对广义主动力的贡献.

臂杆 i (设杆长为 L_i)的内力对第 j 个广义主动力的贡献为[6]

$$(F_{\mathrm{L}})_j^i = -\int_0^{L_i} E_i I_i \left(\frac{\partial^4 \delta_p}{\partial x^4} \right) \boldsymbol{v}_{pj}^i \cdot \boldsymbol{s} \mathrm{d}x \quad (22)$$

其中, x 为臂杆变形前微元 p 沿梁方向离坐标原点的距离; $\boldsymbol{s}$ 为微元变形位移方向的单位矢量; $E_i I_i$ 为截面的抗弯刚度.

则臂杆的内力对第 j 个广义主动力的贡献为

$$(F_{\mathrm{L}})_j = \sum_{i=1}^{N} (F_{\mathrm{L}})_j^i =$$

$$\begin{cases} 0 & j \leqslant N \\ \sum_{i=1}^{N}(F_{\mathrm{L}})_j^i & N < j \leqslant 2N \\ \sum_{i=m}^{N}(F_{\mathrm{L}})_j^i & 2N + \sum_{r=1}^{m-1} n_r < j \leqslant 2N + \sum_{r=1}^{m} n_r \\ & 1 \leqslant m \leqslant N \end{cases} \tag{23}$$

5) 柔性关节的内力对广义主动力的贡献.

现在考虑转动关节 i(见图 1), 移动关节的分析与此类似. 关节两端分别受有弹簧施加的扭力矩 τ_{J}^{i-1} 和 τ_{J}^{i}: $\tau_{\mathrm{J}}^{i} = -\tau_{\mathrm{J}}^{i-1} = -k_i\varepsilon_i \boldsymbol{e}_3^i$. 由于柔性, 关节两端的角速度不相等, 设靠近 $i-1$ 杆一端的角速度为 $\omega_{\mathrm{J}}^{i-1}$, 靠近 i 杆一端的角速度为 ω_{J}^{i}, 则

$$\omega_{\mathrm{J}}^{i} = \omega_{\mathrm{J}}^{i-1} + \dot{\varepsilon}_i \boldsymbol{e}_3^i = \omega_{\mathrm{J}}^{i-1} + (\dot{\theta}_i - \dot{q}_i)\boldsymbol{e}_3^i \tag{24}$$

从而有偏角速度关系

$$\omega_{\mathrm{J}j}^{i} = \omega_{\mathrm{J}j}^{i-1} + \boldsymbol{e}_3^i \eta_{ij} \tag{25}$$

其中 $\eta_{ij} = \begin{cases} -1 & j = i \\ 1 & j = N + i \\ 0 & j \neq i \quad j \neq N + i \end{cases}$

则扭力矩 τ_{J}^{i-1} 和 τ_{J}^{i} 的第 j 个广义主动力为

$$(F_{\mathrm{J}})_j^i = \tau_{\mathrm{J}}^{i} \cdot \omega_{\mathrm{J}j}^{i} + \tau_{\mathrm{J}}^{i-1} \cdot \omega_{\mathrm{J}j}^{i-1} = -k_i\varepsilon_i\eta_{ij} \tag{26}$$

上式对移动关节也成立. 则柔性关节的内力对第 j 个广义主动力的贡献为

$$(F_{\mathrm{J}})_j = \sum_{i=1}^{N}(F_{\mathrm{J}})_j^i = \begin{cases} k_j\varepsilon_j & j \leqslant N \\ -k_{j-N}\varepsilon_{j-N} & N < j \leqslant 2N \\ 0 & j > 2N \end{cases} \tag{27}$$

3.4 系统的动力学方程

将式(13)、(20)、(21)、(23)、(27)代入 Kane 方程:

$$(F_{\mathrm{L}}^{*})_j + (F_{\mathrm{T}}^{*})_j + (F_{\mathrm{A}})_j + (F_{\mathrm{L}})_j + (F_{\mathrm{J}})_j = 0$$

即得柔性机器人动力学方程为

$$\begin{cases} (1-s_i)I_3^i\mu_j^2\ddot{q}_j + s_iI_3^i\mu_j^2b_j\ddot{q}_j - k_j\varepsilon_j = \tau_j & j \leqslant N \\ \sum_{i=j-N}^{N}(F_{\mathrm{L}}^{*})_j^i + \sum_{i=1}^{N}(F_{\mathrm{L}})_j^i - k_{j-N}\varepsilon_{j-N} = 0 & N < j \leqslant 2N \\ \sum_{i=m}^{N}(F_{\mathrm{L}}^{*})_j^i + \sum_{i=m}^{N}(F_{\mathrm{L}})_j^i = 0 & 2N + \sum_{r=1}^{m-1} n_r < j \leqslant 2N + \sum_{r=1}^{m} n_r \\ & 1 \leqslant m \leqslant N \end{cases} \tag{28}$$

上式中, 第一行对应于各关节的名义运动, 第二行对应于各关节的实际运动, 而第三行对应于各臂杆的弹性变形运动. 共有 $2N + \sum_{i=1}^{N} n_i$ 个方程, 与广义速率的数目相等.

4 数值算例与结果分析

为简单起见, 以位于水平面具有柔性转动关节的单杆柔性臂为例. 见图 5, 臂杆为均质细长的 Bernoulli 梁, 杆长为 1 m, 杆的横截面积为长方形, 截面长度为 0.05 m, 截面宽度为 0.005 m, 材料密度为 2 710.0 kg/m^3, 弹性模量为 71.0 GPa, 关节刚度为 2 000 N·m/rad, q 为关节的理论转角, θ 为实际转角. 关节的运动规律由下式确定:

$$q = \begin{cases} 15 \times [1 - \cos(2\pi t)] & 0 \leqslant t \leqslant 0.5\,\mathrm{s} \\ 30 & 0.5\,\mathrm{s} < t < 1.0\,\mathrm{s} \end{cases}$$

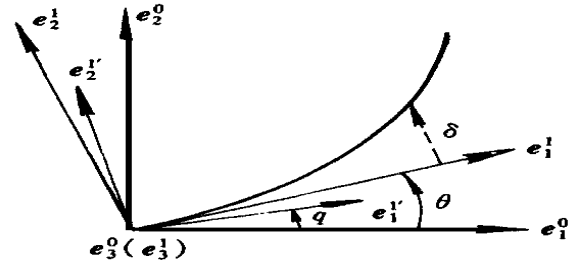


图 5　单柔性关节单柔杆的模型及其坐标

图 6 所示为机械臂的实际转角变化曲线(用实线表示), 作为比较, 图中也作出了理论转角的运动规律曲线(用点划线表示). 从图中可以看出, 由于关节柔性的存在, 关节的实际转角与理论转角发生偏差, 特别在机械臂加速或减速运动时, 关节角产生较大振荡, 最大变形误差达到 12°, 表明关节变形误差的存在对于末端保持精确的轨迹是极为不利的, 如果在动力学建模的过程中忽略关节变形的存在, 必将与实际情况产生较大偏差. 另外, 在运动初期关节的运动表现为实际转角滞后于理论转角, 这可以解释为柔性关节在运动初期吸收能量所致, 说明关节柔性在柔性机器人的动力学性能中起着非常重要的影响作用.

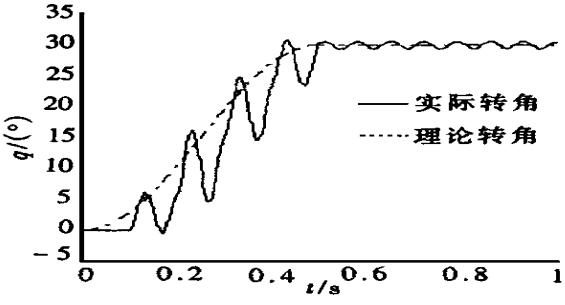


图 6　关节转角变化曲线

图7和图8所示为机械臂末端的误差曲线. 从图中可以看到, 机械臂在运动过程中其末端发生了大幅度的振动与偏差, 其中y轴方向的误差已接近10 cm. 在一般情况下, 这种偏差与振动是不希望存在的, 它严重影响了柔性机器人的性能并限制了它的应用. 因此, 如何消减这种偏差与振动便成为进一步的研究重点.

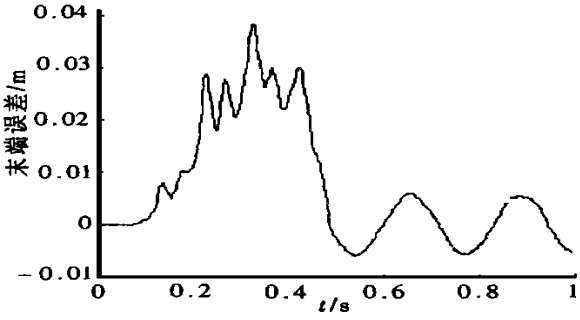


图7 柔性机械臂x轴方向末端误差

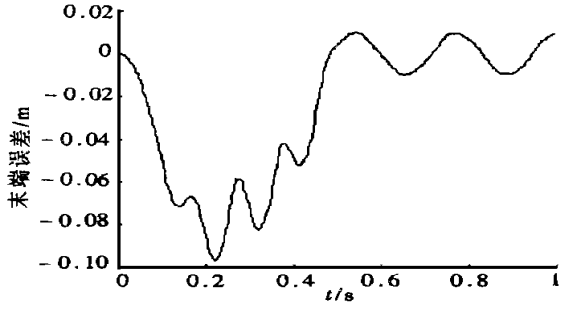


图8 柔性机械臂y轴方向末端误差

5 结 论

本文首先给出一种建立具有柔性关节的多柔杆机器人动力学方程的方法, 这种方法具有以下特点: 1) 叠加性. 在求总的广义主动力和广义惯性力时具有叠加性, 特别适用于建立多杆柔性机器人的动力学方程; 2) 递推性. 仅需向后递推一次即可建立方程, 整个算法简洁, 便于计算机编程; 3) 通用性. 该方法分别考虑了转动关节和移动关节的柔性, 并且可以处理臂杆的空间弹性变形, 因而建立的模型更加通用.

然后利用一个算例研究了两种柔性对柔性机器人动力学响应的影响. 结果表明: 关节柔性与臂杆柔性在柔性机器人系统中都起着非常重要的作用, 忽略关节柔性会带来严重的误差, 因此在柔性机器人的动力学建模与控制中应充分考虑这些因素的影响.

参 考 文 献

1 Spong M W. Modeling and control of elastic joint robots. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1987, 109: 310~319

2 Book W J. Recursive lagrange dynamics of flexible manipulator arms. International Journal of Robotics Research, 1984, 3(3): 87~106

3 Smaili A A. A three-node beam element for dynamic analysis of planar manipulators with flexible joints. Mechanisms and Machine Theory, 1993, 23(2): 193~206

4 Gaultier P E, Cleghorn W L. A spatially translating and rotating beam finite element for modeling flexible manipulators. Mechanisms and Machine Theory, 1992, 27(4): 415~433

5 马香峰. 机器人机构学. 北京: 机械工业出版社, 1991

6 管贻生, 安永辰. 机器人手臂弹性动力学分析的Kane方法. 机器人, 1992, 14(1): 45~51

Method for Dynamic Modeling of Flexible Manipulators

Bian Yushu Lu Zhen

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Dept. of Mechanical and Electronical Engineering)

Abstract A method was presented for establishing the dynamic equation of the flexible multi-link manipulator with flexible joints. Firstly, the simplified models of a flexible joint and a flexible link are described respectively, then based on Kane´s method and assumptive modes method, the complete dynamic equation of the flexible manipulator is derived and its recursive formulation is given. On this basis, the influence caused by the link flexibility and joint flexibility on the dynamic response is studied using an example. The results show the dynamic model described in this paper is more similar to the actual flexible manipulator system, and both link flexibility and joint flexibility are important in the flexible manipulator system, therefore their influence should be taken fully into account in the dynamic modeling and control of flexible manipulators.

Key words model building; kinetics equations; modal analysis; flexible manipulator