基于等效梁模型的长直机翼动力学与颤振分析

张 旭 吴志刚 杨 超

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100191)

摘 要：针对多自由度的复杂结构，建立简化的等效结构模型，可以快速、有效地进行结构分析.采用能量等效的方法，将多自由度、结构复杂的长直结构等效为空间梁，推导得出等效梁的刚度值和惯量值，利用有限元法得到总体刚度阵和质量阵.针对某机翼模型，得出了等效梁的刚度值和惯量值，进行了振动和颤振特性分析，并分别与有限元软件的计算结果作了对比.结果表明：该等效建模法大大降低了结构自由度，振动及颤振分析误差较小，而且其主要参数值方便修改，因此该方法可用于飞行器的初级设计或结构优化设计.

关 键 词：等效梁；机翼；自由度；振动特性；颤振特性

中图分类号：V 215.3

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2010)11-1373-05

Dynamic and flutter analysis of long-straight-wing based on equivalent beam model

Zhang Xu Wu Zhigang Yang Chao

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: For a complex structure of multiple degrees of freedom (DOF), building a simplified model of equivalent structure can lead to rapid and effective structural analysis. The method of energy equivalence was used to make a long-straight complex structure of multiple DOF equivalent to a beam element in space, the stiffness and inertia characteristics of the equivalent beam were derived, and the total stiffness matrix and mass matrix were obtained by using the finite element method. For a wing model, using the equivalence method, stiffness values and inertia values of the equivalent beam had been gotten. Analysis of vibration and flutter was carried out, and their respective results were separately compared with the calculation results of MSC Nastran. The contrast shows that the equivalent modeling method significantly reduces the structural DOF, and that the relative errors of results are small. And its main parameter values can be conveniently modified. Therefore, the method can be applied to preliminary design and structural optimization design of aircraft.

Key words: equivalent beam; wing; degree of freedom; vibration characteristics; flutter characteristics

在飞行器的初级设计及结构优化阶段，时常会遇到某结构设计参数的频繁改变，如果每一组设计参数下的静力学或动力学分析都要进行一次试验或者详细有限元分析的话，显然，其代价是昂贵的，也是很耗时的[1].飞行器都是由成千上万个构件组成的复杂结构，也是无限多自由度的弹性体.为了避免分析过于复杂，特别是在气动弹性分析中，常在建模时尽可能减少结构自由度.因此为了简单、有效地进行结构分析，发展简化的等效结构模型和相关的分析方法是十分必要的.

文献[2]利用等效刚度法建立了等效梁模型并分析了等效刚度梁在结构分析中的利弊；文献[3]提出利用结构模态势能和模态动能的概念探讨复合结构等效替代模型的建模原则；文献[4]利用等效前后总动能和势能相等的方法，将大型结构中的离散结构单元转化为宏单元，再由宏单元组装成整个结构；文献[5]利用原结构模型与等效模型的总应变能和动能相等，得到等效模型的结构特性；文献[6]针对某导弹的头部结构，采用静力学等效的方法得到相应的等效梁模型.对比研

收稿日期：2009-10-12

基金项目：国家自然科学基金资助项目(90716006，10902006)

作者简介：张 旭(1985－)，男，河北衡水人，硕士生，zhangxu250819185@163.com.

究发现,能量等效法的精度较高,可基于该方法建立等效梁模型,并用于动力学和颤振特性分析中.

本文用能量等效的方法,分别推导出原结构和等效梁元的刚度阵、质量阵,经减缩后令其对应项相等,得到与原结构等效的梁元刚度值和惯量值,利用有限元法推导出结构的整体刚度阵和质量阵.本文将一个长直机翼模型等效为一个空间梁,自由度数由2.7万减小至120,然后分别对三维有限元模型和空间等效梁模型进行了振动分析和颤振特性分析,并进行了结果对比和误差分析,检验了该等效建模法的精确性和有效性.

1 基于能量法的结构等效建模

目前在国内外的许多研究中,大多利用能量等效法进行结构等效建模.这里"等效"的意思就是指原结构与等效模型在沿中心线方向处于同样的位移和速度场时,具有相等的动能和应变能[7].本节利用能量等效法对长直结构等效为梁元进行了详细推导.

1.1 长直结构的动能和应变能推导

在一般的空间结构有限元计算中,每个结点有6个自由度,包括沿3个局部坐标轴方向的线位移自由度和绕3个局部坐标轴的角位移自由度.等效梁方法就是将一个具有多结点多自由度的长直结构等效为一个2结点12自由度的梁元.假设原长直结构有 n 个结点,用 $\boldsymbol{q}$ 表示其位移矢量,等效后的梁元有2个结点,位移矢量用 $\boldsymbol{q}_e$ 来表示,于是自由度的缩减可用公式表示如下:

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{q}_e \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{H}$ 是自由度缩减矩阵,它将一个 $6n\times1$ 的向量简化为一个 12×1 的向量,下面就 $\boldsymbol{H}$ 的推导进行详细介绍.

假设结构在垂直于弹性轴的面内是刚硬的,也就是在结构变形中截面形状保持不变(刚性截面假设).等效梁的轴线方向记为 x 轴,在任一横截面内,任一有限元结点 $A(x,y,z)$ 的自由度坐标向量记为 $\boldsymbol{q}_A=[u_A\quad v_A\quad w_A\quad \theta_{xA}\quad \theta_{yA}\quad \theta_{zA}]^T$,假设等效梁在相同截面位置有对应结点 $P_x(x,0,0)$(除梁段两端点外,x 取其他值时,该结点实际不存在),记其位移向量为 $\boldsymbol{q}_P=[u_P\quad v_P\quad w_P\quad \theta_{xP}\quad \theta_{yP}\quad \theta_{zP}]^T$.根据二者间的几何关系可得:

$$\boldsymbol{q}_A=\boldsymbol{h}_{AP}\boldsymbol{q}_p \tag{2}$$

将等效梁两端结点 $P_1(0,0,0)$ 和 $P_2(L,0,0)$ 的自由度记为

$$\boldsymbol{q}_e=[u_1\quad v_1\quad w_1\quad \theta_{x1}\quad \theta_{y1}\quad \theta_{z1}\quad u_2\quad v_2\quad w_2\quad \theta_{x2}\quad \theta_{y2}\quad \theta_{z2}]^T$$

假设等效梁上结点 $P_x(x,0,0)$ 的位移向量 $\boldsymbol{q}_P$ 与其两端结点的位移向量 $\boldsymbol{q}_e$ 之间有如下关系:

$$\left.\begin{aligned}
u_P&=N_5u_1+N_6u_2\\
v_P&=N_1v_1+N_2\theta_{z1}+N_3v_2+N_4\theta_{z2}\\
w_P&=N_1w_1-N_2\theta_{y1}+N_3w_2-N_4\theta_{y2}\\
\theta_{xP}&=N_5\theta_{x1}+N_6\theta_{x2}\\
\theta_{yP}&=-\frac{dN_1}{dx}w_1+\frac{dN_2}{dx}\theta_{y1}-\frac{dN_3}{dx}w_2+\frac{dN}{dx}\theta_{y2}\\
\theta_{zP}&=\frac{dN_1}{dx}v_1+\frac{dN_2}{dx}\theta_{z1}+\frac{dN_3}{dx}v_2+\frac{dN_4}{dx}\theta_{z2}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中,各插值函数[8](令 $\xi=x/L$,$0\leqslant\xi\leqslant1$)为

$$N_1=1-\xi^2+2\xi^3$$
$$N_2=(\xi-2\xi^2+\xi^3)L$$
$$N_3=3\xi^2-2\xi^3$$
$$N_4=(\xi^3-\xi^2)L$$
$$N_5=1-\xi$$
$$N_6=\xi$$

将式(3)代入式(2),得到自由度缩减矩阵 $\boldsymbol{h}_A$,其关系为

$$\boldsymbol{q}_A=\boldsymbol{h}_A\boldsymbol{q}_e \tag{4}$$

式中,$\boldsymbol{h}_A$ 为 6×12 维矩阵,于是式(1)中的整体自由度缩减矩阵可表示为

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{h}_A\quad \boldsymbol{h}_B\quad \boldsymbol{h}_C\quad \cdots]^T \tag{5}$$

$\dot{\boldsymbol{q}}$ 为长直结构位移矢量对时间的一阶导数,$\boldsymbol{K}_w^g$ 和 $\boldsymbol{M}_w^g$ 分别为全局坐标系下的刚度阵和质量阵,则该结构的动能和应变能可表示为

$$\left.\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T\boldsymbol{M}_w^g\dot{\boldsymbol{q}}\\
V&=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{K}_w^g\boldsymbol{q}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

将式(1)代入式(6),得到

$$\left.\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}_e^T\boldsymbol{M}_w\dot{\boldsymbol{q}}_e\\
V&=\frac{1}{2}\boldsymbol{q}_e^T\boldsymbol{K}_w\boldsymbol{q}_e
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

1.2 等效梁的动能和应变能推导

对于 Bernoulli-Euler 梁,设梁长方向为 x,y 和 z 轴作为横截面的主惯性轴,则梁的内力与位移关系可表示为

$$\begin{bmatrix} F \\ M_z \\ M_y \\ M_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z & 0 & \eta_{24} \\ 0 & 0 & EI_y & \eta_{34} \\ 0 & \eta_{24} & \eta_{34} & GJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \\ -\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta_x}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} \tag{8}$$

同样采用前述的插值函数,于是有如下关系:

$$\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \quad -\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \quad \frac{\mathrm{d}\theta_x}{\mathrm{d}x}\right]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}} \tag{9}$$

为书写方便,"′"表示相应位移对 x 的一阶导数,""表示相应位移对 x 的二阶导数.

梁的应变能和动能为

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{F^2}{EA} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_x^2}{GJ}\right)\mathrm{d}x \tag{10}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L (\rho A\dot{u}^2 + \rho A\dot{v}^2 + \rho A\dot{w}^2 + \rho I_z\dot{v}'^2 + \rho I_y\dot{w}'^2 + \rho I_p\dot{\theta}_x^2 - 2\rho R_z\dot{v}\dot{\theta}_x - 2\rho R_y\dot{w}\dot{\theta}_x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

也采用同样的插值函数,于是有:

$$[\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{v}' \quad \dot{w}' \quad \dot{\theta}_x] = \boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{c}} \tag{12}$$

与式(7)类似,得到等效梁的应变能和动能为

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{V} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{c}} \\ T &= \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}\dot{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{c}} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

1.3　求解等效梁的刚度值和惯量值

由能量等效可知,式(13)中的 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}$,$\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}$ 与式(7)中的 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{w}}$,$\boldsymbol{K}_{\mathrm{w}}$ 应是对应相等的,即有:$\boldsymbol{M}_{\mathrm{w}} = \boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}$,$\boldsymbol{K}_{\mathrm{w}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}$,但由上述两个等式所得的关于结构等效参数的方程数大于未知量的数目,为计算方便,有必要对上述两对矩阵进行缩减,采用的缩减方法[7]如下:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{M}} &= \frac{1}{3}(\boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{M}_{22} + \boldsymbol{M}_{12} + \boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{T}}) \\ \overline{\boldsymbol{K}} &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{K}_{11} + \boldsymbol{K}_{22} - \boldsymbol{K}_{12} - \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}}) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中,$\boldsymbol{M}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{K}_{ij}$ 分别为对应质量阵和刚度阵的分块子矩阵,经缩减后,再利用 $\overline{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{w}} = \overline{\boldsymbol{M}}_{\mathrm{c}}$,$\overline{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{w}} = \overline{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{c}}$ 即得到等效梁的刚度特性相关量 EA,EI_z,EI_y,GJ 和惯性特性相关量 ρA,ρI_z,ρI_y,ρI_p,ρR_z,ρR_y.

2　基于等效梁的振动和颤振分析

2.1　等效梁的振动特性分析

在上节中,根据能量法可得到各个等效梁段的刚度和惯性量特性,将它们代回 $\boldsymbol{M}_{\mathrm{c}}$,$\boldsymbol{K}_{\mathrm{c}}$ 中即可得到各个梁段的单元刚度阵和单元质量阵,再用有限元的方法将多个梁段的单元矩阵组装成总体矩阵,其无阻尼自由振动运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = 0 \tag{15}$$

式中,$\boldsymbol{M}$ 为结构整体质量矩阵;$\boldsymbol{K}$ 为结构整体刚度矩阵;$\boldsymbol{x}$ 为结点位移列阵.

设 $\boldsymbol{x} = f\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,代入式(15)中,得

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}) = 0 \tag{16}$$

要使式(16)中的 f 有非零解,则

$$\det(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}) = 0 \tag{17}$$

即求 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的广义特征值问题,求解特征方程,得到 ω_i 后,再分别代回式(16),即可求得特征向量 f_i. 其中,ω_i 为固有振动频率;f_i 为固有振型(模态)[9]. 本文的等效结构为机翼,因此选取前 4～5 阶模态进行计算分析即可.

2.2　基于等效梁的颤振特性分析

气动弹性运动方程可写为以下形式:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}\rho\mathrm{V}^2\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \tag{18}$$

式中,$\boldsymbol{A}$ 为广义气动力影响系数矩阵,是关于马赫数与减缩频率 $k = \omega b/\mathrm{V}$ 的复函数. 其表达式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{D}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}_H}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{k}{b}\boldsymbol{F}_H\right) \tag{19}$$

式中,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}$ 为网格气动作用点处的模态矩阵;$\boldsymbol{S} = \mathrm{diag}(\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n)$ 为面积加权阵,对角项为各气动网格的面积;$\boldsymbol{D}$ 为非定常气动力影响系数;$\boldsymbol{F}_{\mathrm{H}}$ 为控制点的模态矩阵;k 为减缩频率;b 为参考长度.

颤振方程求解常用的方法有 V-g 法、p-k 法等. 由于 p-k 法可以反映一定的亚临界特性[10],因此本文采用 p-k 法进行颤振求解.

由于涉及到减缩频率 k,需要反复迭代来求解. 给定一系列的飞行速度,对于每一个速度 V_i,迭代求得 n 组收敛的 g,ω,k 值. 于是可以绘制出 V-g 图和 V-ω 图. 从 V-g 图中可以确定 g 由负变正的临界点,即 $g = 0$ 时,相应的 V 为颤振速度,相应的 ω 为颤振频率.

3　算　例

3.1　模型描述

本文选取某长直机翼为算例,机翼展长 17.5 m,弦长 3.5 m,是由翼肋,桁条和蒙皮等组成的薄壁结构机翼,翼型为 NACA0020,8 对桁条在上下翼面对称布置. 机翼的整体结构如图 1 所示.

该机翼的结构有限元模型如图 2 所示,主要包括翼肋、桁条、蒙皮 3 部分. 翼肋和蒙皮由板单



图1 机翼模型结构图

元模拟，桁条由梁单元模拟，考虑到等效梁模型采用了刚性截面假设，因此翼肋的刚度相对较大，保证机翼不会发生较大的截面翘曲. 约束条件为左端固支，右端自由.



图2 机翼的有限元模型

利用软件建立的三维有限元模型比较真实地模拟了机翼各组成构件，其结构复杂，结点个数为4 581，自由度数为26 880；利用本文方法建立的等效梁模型是由20段梁元组成的一个空间梁，其结点个数为21，整体自由度数为120. 与三维有限元模型相比，等效梁结构简单，结点数和自由度数都大大降低，方便后续分析和模型修改.

3.2 固有振动特性计算

针对上述机翼模型，分别用本文方法和有限元软件进行了固有振动特性分析，对比结果如表1所示(只列出了其中的主要模态).

表1 两种模型的固有振动特性结果对比 Hz

项目	频率		
	机翼一弯	机翼二弯	机翼扭转
本文计算结果	1.75	8.96	14.68
有限元计算结果	1.74	8.69	14.04

注：机翼一弯、二弯、扭转的误差分别为0.57%，3.11%和4.56%.

表1的结果表明，等效梁模型与三维有限元模型前几阶频率的相对误差较小，在数值上证明了等效梁模型的精确性. 误差产生的原因是多方面的，其中主要的原因为：①等效梁模型虽然保留了与主要模态相关的自由度，但原结构大量自由度的缩减肯定会在一定程度上影响结构的振动特性；②等效梁推导过程中采用了刚性截面假设，虽然翼肋的刚度较大，而实际上，机翼截面在振动中不可能严格地保证这一假设，微小的截面翘曲是产生频率误差的另一原因.

为检验等效梁模型的模态准确与否，分别将它们的模态结果用振型图表示出来. 图3～图5为利用有限元软件得出的表1所示各阶模态的机翼振型图，图6～图8为利用本文方法得出的等效梁振型图(为了显示直观，在等效梁的轴向均匀布置了刚性杆).



图3 机翼一弯振型图



图4 机翼二弯振型图



图5 机翼扭转振型图

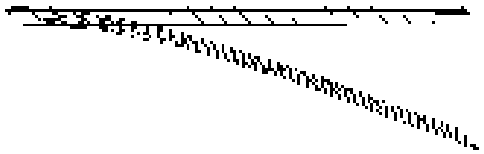

图6 等效梁一弯振型图

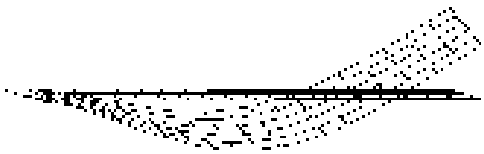

图7 等效梁二弯振型图

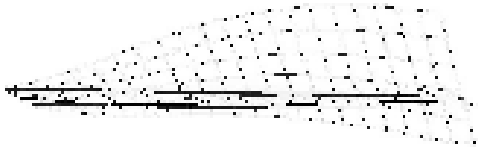

图8 等效梁扭转振型图

振型图对比表明，机翼有限元模型与等效梁模型前几阶振动模态的节线位置基本吻合，由此说明等效梁的振动模态是准确的.

3.3 颤振特性分析

在该机翼的颤振计算中，非定常气动力的计算采用亚声速偶极子格网法，颤振求解采用 p-k 法.

针对机翼结构有限元模型和等效梁模型，选取表1中各自对应的3阶模态，分别利用MSC Nastran的气动弹性模块和本文方法进行颤振计算. 两种模型的颤振分析 V-g 和 V-f 曲线如图9、图10所示.

经上述分析，分别得出机翼模型和等效梁模型的颤振特性，两者的颤振形式均为机翼二阶弯曲与一阶扭转耦合，结果对比见表2. 结果表明，

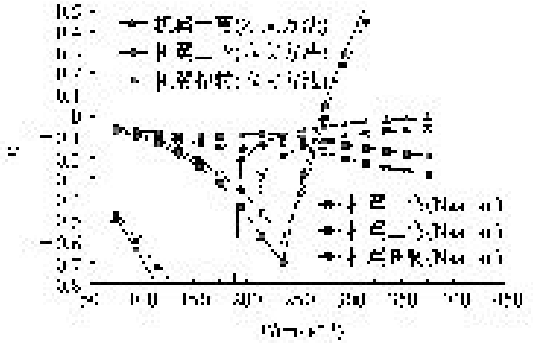

图 9　机翼的颤振分析 V-g 曲线

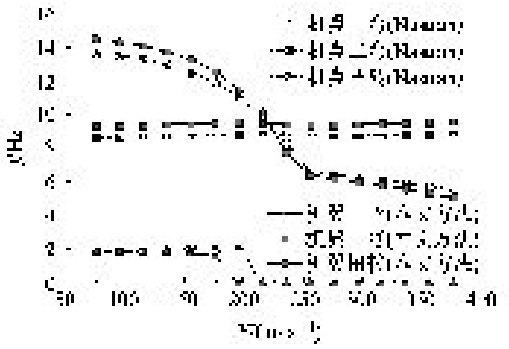

图 10　机翼的颤振分析 V-f 曲线

利用等效梁模型进行的颤振分析结果与 Nastran 的计算结果相对误差较小,进一步检验了该等效方法的精确性.

表 2　两种模型的颤振特性结果对比

项目	颤振速度 V_f/(m·s^{-1})	颤振频率 ω_f/Hz
本文计算结果	296	6.21
Nastran 计算结果	300	6.42

注:颤振速度、频率的误差分析为 1.33%和 3.27%.

4　结　论

本文用能量等效的方法将一长直机翼等效为一个空间梁,并分别进行了动力学分析和颤振特性分析.通过与有限元软件计算结果的对比,得出以下结论:①基于能量法的等效梁模型能极大地缩减结构自由度,而且能在很大程度上保证后续分析的精度;更重要的是,本方法可得到机翼(或者其他复杂结构)的弯曲刚度、扭转刚度以及截面各惯量值,因此这在已知这些量进行模型初级设计时将发挥重要作用.而且对这些重要参数的修改也无需再建立新的有限元模型,修改后的参数值即可作为本方法的输入量,进行后续的分析计算.②由于本文的等效梁法是将结构等效为 Bernoulli-Euler 梁,推导过程中没有考虑剪切变形的影响,因此该方法适用于展弦比(长细比)较大的结构;另外,由于推导过程中使用了刚性截面假设,因此,这种等效梁建模法适用于变形(或振动)过程中不发生截面翘曲的结构.③经研究发现,本方法的计算精度随梁元选取个数的增加而提高,其中,选取个数由 2 增至 20 过程中,误差减小最为显著.综合考虑计算精度、建模便利性以及计算机时等因素,梁元个数取 20 为本方法的建议值.④本文的等效梁模型推导过程中考虑了梁弯曲扭转的耦合系数,因此本方法也可以推广应用到有弯扭耦合的结构,比如采用复合材料铺层的长直结构分析中.

参考文献(References)

[1] Lee U. Dynamic continuum modeling of beamlike space structures using finite-element matrices[J]. AIAA Journal, 1990,28(4): 726

[2] 张世联,金玉文. 等效梁的刚度分析及应用[J]. 海洋工程, 1994,12(2): 26－31
Zhang Shilian, Jin Yuwen. Analysis and application of stiffness of equivalent beam[J]. The Ocean Engineering, 1994,12(2): 26－31 (in Chinese)

[3] 权成七. 复合材料等效替代模型的建模原则[J]. 延边大学学报:自然科学版,2005,31(4): 284－285
Quan Chengqi. Basic principles for establishing the structural equivalent model[J]. Journal of Yanbian University: Natural Science, 2005,31(4): 284－285 (in Chinese)

[4] Abdul-salam Alani H R. Dynamic and static analysis of large structures using energy equivalent macro-elements[D]. Colorado: School of Mechanical Engineering, University of Colorado at Boulder, 1984

[5] Hefzy M S. Continuum Modeling and Analysis of Discrete Repetitive Large Structures [D]. Ohio: School of Materials, University of Cincinnati, 1981

[6] Kim B J. A methodology of an equivalent beam modeling for a nose-cone of a missile [R]. AIAA-87-0818, 1987

[7] Lee U. Equivalent dynamic beam-rod models of aircraft wing structures [J]. Aeronautical Journal, 1995,28(8): 450－457

[8] 王勖成,绍敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京:清华大学出版社,1997: 278－282
Wang Xucheng, Shao Min. Basic principles and numerical methods of finite element technique [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997: 278－282(in Chinese)

[9] 王尚文,余旭东. 飞行器结构动力学[M]. 西安: 西北工业大学出版社,1986: 97－112
Wang Shangwen, Yu Xudong. Structural dynamics of aircraft [M]. Xi'an : Northwestern Polytechnical University Press, 1986: 97－112(in Chinese)

[10] 陈桂彬,邹丛青,杨超. 气动弹性设计基础[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社,2004: 106－110
Chen Gunbin, Zou Congqing, Yang Chao. Elements of Aeroelastic dynamics [M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 2004: 106－110(in Chinese)

(编　辑:李　晶)