光纤陀螺分形噪声的预白化滤波方法

华春红 任 章 张敏虎

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘 要: 光纤陀螺分形噪声往往具有长相关特性,导致陀螺输出信号慢漂移. 为了滤除这类分形噪声,提出了一种分数阶预白化差分方法,通过该方法可以将分形噪声转化为高斯白噪声;利用小波变换,在小波变换域中采用 Bayes 软阈值去噪方法去除该白化噪声,从而形成了一种光纤陀螺分形噪声的预白化滤波方法. 对 VG949p 型光纤陀螺实测数据处理结果表明,该方法能够有效地去除其中的分形噪声,抑制了陀螺低频漂移,同时也滤掉了其高频噪声项.

关 键 词: 光纤陀螺; 随机误差; 差分方程; 小波分析

中图分类号: V 241.5

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2011)02-0216-04

Pre-whitening filter of fractal noise in fiber optic gyroscope

Hua Chunhong Ren Zhang Zhang Minhu

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Fractal noise in fiber optic gyroscope (FOG) usually is long-term dependent, which causes FOG a rather slow drift. In order to filter this noise, a pre-whitening filter based on fractional difference (FD) was proposed. By this filter, fractal noise could be transformed into Gaussian white noise (GWN). And through wavelet analysis, the pre-whitening noise could be eliminated by Bayes soft-threshold denoising in wavelet domain. On the two aforementioned steps, it came into a pre-whitening filter method of fractal noise. After the test data processing of FOG-VG949p, the results show that its fractal noise was removed efficiently, so the slow drift is restrained. The high frequency noise terms of FOG also greatly decrease.

Key words: fiber optic gyroscope (FOG); random errors; difference equations; wavelet analysis

光纤陀螺随机漂移噪声主要包括白噪声和 $1/f^{\gamma}$ 分形噪声,其中分形噪声往往具有长相关特性[1-2],采用自回归-滑动平均模型描述不合适[3]. 文献[4]对光纤陀螺分形噪声采用多尺度白化滤波结构,其白化滤波参数是利用最大似然估计法估计的分形谱指数 γ. 该估计算法复杂,且当存在其他噪声干扰时,仅当谱指数 $\gamma \in (0,1)$ 时才是相合估计,否则以概率 1 收敛到错误结果[5]. 文献[5]提出的基于分形参数的小波软阈值去噪方法难以很好地解决由长相关分形噪声引起光纤陀螺慢漂移问题,因为该漂移处于低频噪声段,而小波阈值去噪方法只能滤掉高频噪声分量. 因此如果能把长相关分形噪声转化为白噪声,再采用小波阈值去噪可将其滤除.

针对以上问题,本文从信号长相关的角度来描述光纤陀螺随机漂移噪声,并提出了一种有效的预白化滤波方法. 该方法仅通过分数阶差分方法就能将光纤陀螺分形噪声转化为高斯白噪声,有效地解决了其低频漂移问题,为其低频噪声的滤波提供了一条新思路.

1 分形过程预白化差分方法

1.1 连续域分形过程

连续域内分形过程 $x(t)$ 描述为分数布朗运

收稿日期: 2009-12-24

基金项目: 航空科学基金资助项目(20070851011)

作者简介: 华春红(1976 -),女,江西崇仁人,博士生,huachh@asee.buaa.edu.cn.

动(FBM, Fractional Brownian Motion),其模型 $B_H(t)$ 为

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{\sigma_B^2}{\Gamma(H+1/2)}\left\{\int_0^t (t-\tau)^{(H-1/2)}\mathrm{d}B(\tau) + \int_{-\infty}^0 [(t-\tau)^{(H-1/2)} - (-\tau)^{(H-1/2)}]\mathrm{d}B(\tau)\right\} \tag{1}$$

式中,$H=0\sim1$,为 FBM 的长相关 Hurst 指数;σ_B^2 为分形过程的方差;Γ 为超几何函数,且 $\Gamma(H+1/2)=\int_0^{+\infty}\tau^{(H-1/2)}\mathrm{e}^{-\tau}\mathrm{d}\tau$;$B(t)$ 为普通的布朗运动,可以描述为高斯白噪声 $\omega(t)$ 的积分[6]:

$$B(t) = \int_{-\infty}^t \omega(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),整理可得

$$B_{\mathrm{H}}(t) - B_H(0) = \frac{\sigma_B^2}{\Gamma(H+1/2)}\left\{\int_{-\infty}^t (t-\tau)^{(H-1/2)}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau - \int_{-\infty}^0 (0-\tau)^{(H-1/2)}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right\} \tag{3}$$

由式(3)可以看出 $B_H(t)$ 有高斯白噪声的分数积分形式:

$$B_H(t) = \frac{\sigma_B^2}{\Gamma(q)}\int_{-\infty}^t (t-\tau)^{(q-1)}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad q = H+1/2 \tag{4}$$

其中,q 为分数因子.

将式(4)中 $B_H(t)$ 表示的分形过程 $x(t)$ 改写为分数微分形式:

$$\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}t^q}x(t) = \omega(t) \tag{5}$$

由式(5)可以看出分形过程 $x(t)$ 的 q 阶微分结果为高斯白噪声 $\omega(t)$. 对式(5)进行傅里叶变换,得到功率谱密度为

$$S_x(f) = \sigma_B^2/(|2\pi f|^{2q}) \tag{6}$$

1.2　离散域分形过程

用差分算子替代微分算子,式(5)的分数微分形式可以转化为离散域的分数差分形式[7]:

$$\nabla^q x(n) = \omega(n) \tag{7}$$

式中,∇^q 为后向差分算子:

$$\nabla^q = (1-L)^q = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{q}{k}L^k$$

式中,L 为滞后算子.

文献[8-9]又将离散域分形序列 $\{x(n)\}$ 描述为高斯白噪声序列 $\{\omega(n)\}$ 的 $-q$ 阶差分过程:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-q}{k}(-1)^k\omega(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty}c(k)\omega(n-k) \tag{8}$$

式(8)等价于下式:

$$x(n) = (1-L)^{-q}\omega(n) \tag{9}$$

由式(7)和式(9)看出,$1/f^\gamma$ 分形序列 $\{x(n)\}$ 经过 q 阶差分后转化为高斯白噪声序列,即通过 q 阶差分实现了 $1/f^\gamma$ 分形序列的白化滤波.

1.3　分数因子 q 的估计

由 1.1 节可知,q 与 $1/f^\gamma$ 分形过程的长相关 Hurst 指数 H 满足下式:

$$q = H + 1/2 \tag{10}$$

通常估计 H 指数的方法有:聚合时间序列方差法、周期图法、重标度极差 R/S(the Rescaled adjusted range Statistic)分析法等[10],其中 R/S 分析法是分析长相关指数的经典方法,算法如下.

假设给定的观察序列为 $\{x_i, i=1,2,\cdots,N\}$,将其分为 k 个长度为 n 的区间,即 $N=k\times n$. 在可变长度为 n 子区间内的累积极差 R_n 和标准差 S_n 为

$$R_n = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{t=1}^{j}(x_t-\bar{x}_n) - \min_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{t=1}^{j}(x_t-\bar{x}_n) \tag{11}$$

$$S_n = \left(\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x}_n)^2/n\right)^{1/2} \tag{12}$$

式中,$\bar{x}_n=\sum_{j=1}^{n}x_j/n$. 比值 R_n/S_n 随着子区间的长度 n 增加,并满足关系式 $R_n/S_n=cn^H$,该式两边取对数有

$$\log(R_n/S_n) = \log c + H\log n \tag{13}$$

H 即为所求的长相关 Hurst 指数,当 $0.5<H<1$ 时,则该序列具有长相关性. 但是当序列中同时存在长相关和短相关过程时,R/S 分析法不能将二者区分开. 为了解决这个问题,A. W. Lo 于 1991 年提出了 MR/S(the Modified R/S)分析法.

MR/S 分析法不再将时间序列分段,其累积极差 R_n 和 R/S 分析法的 R_n 计算方法相同,只不过在标准差 S_n 中增加了权重因子 $\lambda_j(\rho)$:

$$S_\rho(N) = \left\{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(x_j-\bar{x}_N)^2 + \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{\rho}\lambda_j(\rho)\left[\sum_{i=j+1}^{N}(x_i-\bar{x}_N)(x_{i-j}-\bar{x}_N)\right]\right\}^{1/2} \tag{14}$$

式中,$\bar{x}_N=\sum_{j=1}^{N}x_j/N$;$\lambda_j(\rho)=1-\frac{j}{\rho+1}$,$\rho<N$,最佳 $\rho_{\mathrm{opt}}=\left[\left(\frac{3N}{2}\right)^{1/3}\left(\frac{2\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}^2}\right)^{2/3}\right]$,$\hat{\rho}$ 为一阶自相关系

数估计.

1.4 q 阶预白化差分

采用 R/S 分析法或 MR/S 分析法估计得到 H 后,根据式(10)计算 q. 假设差分后序列为 $\{y(n)\}$,则分数阶差分过程如下:

$$y(n) = (1-L)^q x(n) \tag{15}$$

对于任何 $q > -1$ 的实数有

$$(1-L)^q = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{q}{k} (-1)^k L^k \tag{16}$$

式中 $\binom{q}{k} = \dfrac{\Gamma(1+q)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1+q-k)} = \dfrac{q(q-1)\cdots(q-k+1)}{k!}$

当 q 确定后,式(16)只是 k 的函数[11].

令 $h(n) = (-1)^n \binom{q}{n}$,则

$$y(n) = x(n) * h(n) \tag{17}$$

因此 q 阶差分过程可以通过序列 $\{x(n)\}$ 和序列 $\{h(n)\}$ 的卷积实现.

2 小波软阈值去噪

设光纤陀螺随机噪声采样序列经过上述 q 阶预白化差分后,得到 $f(n)$ 可以表示为有用信号 $s(n)$ 和差分后增强了的白噪声 $z(n)$ 叠加:

$$f(n) = s(n) + z(n) \tag{18}$$

式中,$z(n) = \sigma_z e(n)$ 是预白化差分后方差为 σ_z^2 的广义平稳白噪声.

2.1 阈值估计

设预白化差分后的信号 $f(n)$ 小波系数服从零均值的广义高斯分布 $GG_{\sigma_s,\beta}$,如果求 Bayes 风险最小的条件下理想阈值会使阈值去噪的误差进一步减少,则 Bayes 阈值估计值为[12]

$$T_{\text{Bayes}} = \sigma_z^2/\sigma_s \tag{19}$$

σ_s 为信号的标准差,对于式(18)的含噪信号模型有:$\sigma_f^2 = \sigma_s^2 + \sigma_z^2$.

2.2 软阈值去噪算法

对含噪信号 $f(n)$ 进行软阈值去噪,其过程如下:

1) 将 $f(n)$ 进行多尺度小波分解,得到各尺度小波系数 f_i^j 和粗糙系数,j 为分解尺度;

2) 按式(19)估计各尺度上 Bayes 阈值 T_{Bayes}^j,其中 $\sigma_z^j = \text{median}(f_i^j)/0.6745$,median 为取尺度 j 上的小波系数绝对值的中值;

3) 对 f_i^j 按式(20)进行软阈值处理,得到去噪后的小波系数 $\hat{f}_i^j$

$$\hat{f}_i^j = \begin{cases} \text{sgn}(f_i^j)\cdot(|f_i^j| - T_{\text{Bayes}}^j) & |f_i^j| \geqslant T_{\text{Bayes}}^j \\ 0 & |f_i^j| < T_{\text{Bayes}}^j \end{cases} \tag{20}$$

4) 利用 $\hat{f}_i^j$ 和粗糙系数进行信号重构,得到去噪之后的信号 $\hat{f}(n)$.

3 实验结果与分析

光纤陀螺 VG949p 静止采样 1 h,采样周期为 1.0 s,取其中 2 048 s 数据进行分析,去除其均值并进行单位换算得到采样序列 $\{\tilde{\omega}(n)\}$,标准差为 14.622,如图 1 所示.

分别采用 R/S 和 MR/S 分析方法计算采样序列的 Hurst 指数,结果为 0.8038 和 0.7483,可见该序列具有长相关特性. 取 MR/S 分析法估计的 H 指数,计算 $q = H + 0.5 = 1.2483$,则预白化差分结果为 $f(n) = (1-L)^{1.2483}\tilde{\omega}(n)$,如图 1 所示,其标准差为 13.251.

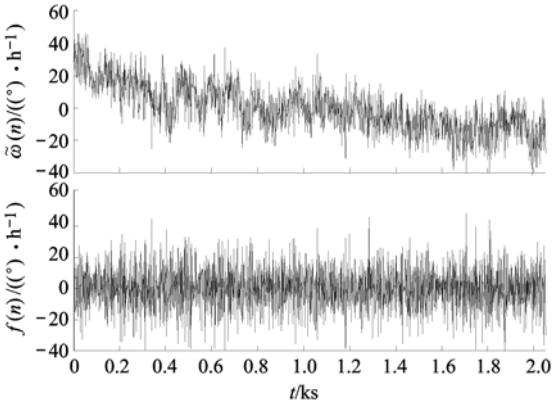


图 1 采样序列与预白化差分结果

将预白化差分结果 $f(n)$ 以 db5 小波做 5 尺度分解,采用小波域 Bayes 软阈值去噪方法去噪,见图 2 预白化滤波结果 $\hat{f}_q(n)$,其标准差为0.103. 就同一组数据,采用文献[5]基于分形参数的小

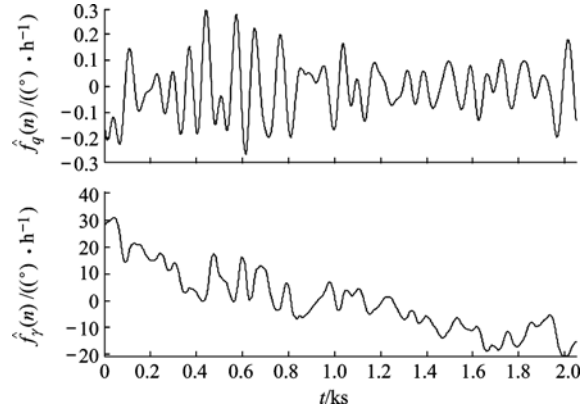


图 2 预白化滤波和分形参数法去噪结果

波阈值去噪方法,简称为分形参数法,滤波结果 $\hat{f}_\gamma(n)$ 见图 2 分形参数法结果,其标准差为 11.844,显然其低频漂移仍然存在.

对本文预白化滤波结果和分形参数法去噪结果进行 Allan 方差对比分析,如图 3 所示,从图中可以看出,分形参数法能够有效地滤除其中的高频噪声成分,但其低频噪声项没有改变. 而预白化滤波方法不但能很好地滤掉其高频噪声,而且也能有效地抑制光纤陀螺低频噪声项.

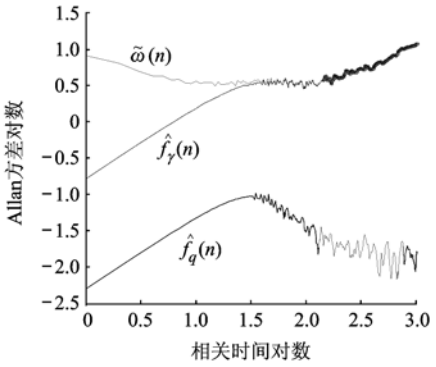


图 3　Allan 方差综合分析对比图

4　结　论

分形噪声是光纤陀螺主要噪声源,其中长相关分形噪声引起的慢漂移是光纤陀螺随机漂移的主要成分,产生的误差耦合到低频惯性信号中,因此该类分形噪声的滤波尤其重要. 为了滤除这类噪声,本文利用其长相关特征来分析其白化滤波的方法,并对陀螺输出静态随机误差进行处理,结果表明其各噪声项都得到了有效抑制.

由于光纤陀螺随机漂移具有时变性,在动态条件下采用本文方法进行在线滤波,需要就其全动态范围进行随机误差测试,建立输入角速率和长相关 Hurst 指数的模型,并要估计最佳在线预白化差分滤波器的长度.

参考文献(References)

[1] Skaloud J, Bruton A M, Schwarz K P. Detection and filtering of short-term ($1/f^\gamma$) noise in inertial sensors[J]. Journal of the Institute of Navigation, 1999, 46(2): 97 – 107

[2] Han Junliang, Ge Shengmin, Shen Yi, et al. Modeling and simulation of digital closed-loop fiber optic gyroscope[C]//Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian: IEEE, 2006: 1659 – 1663

[3] Torre K, Delignières D, Lemoine L. Detection of long-range dependence and estimation of fractal exponents through ARFIMA modeling[J]. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, 2007, 60: 85 – 106

[4] Gao Yukai, Deng Zhenglong. Extraction of FOG signal from fractal noise[C]//Proceedings of the 2003 International Conference on Neural Networks and Signal Processing. Nanjing: IEEE, 2003: 768 – 771

[5] 武华伍,任章. 光纤陀螺中分形噪声的参数估计和去除[J]. 北京航空航天大学学报,2008,34(6):630 – 633
Wu Huawu, Ren Zhang. Parameter estimation and elimination to fractal noise of fiber optic gyro[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 34(6): 630 – 633 (in Chinese)

[6] 杨福生. 小波变换的工程分析与应用[M]. 北京:科学出版社,2003:217 – 241
Yang Fusheng. Engineering analysis and application of wavelet transform[M]. Beijing: Science Industry Press, 2003: 217 – 241 (in Chinese)

[7] 陈彦辉,谢维信. 随机分形信号参数的分数差分估计[J]. 电子与信息学报,2001,23(1):9 – 15.
Chen Yanhui, Xie Weixin. Fractional difference estimationfor the parameters of random fractal signal[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2001, 23(1): 9 – 15 (in Chinese)

[8] Deriche M, Tewfik A H. Maximum likelihood estimation of the parameters of discrete fractionally differenced Gaussian noise process[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(10): 2977 – 2989

[9] Rao R, Lee S, Bayraktar E, et al. Signal processing models for discrete-time self-similar and multifractal processes[C]//The thirty-seventh Asilomar Conference on Signals Systems and Computers. California: IEEE, 2003, 1: 8 – 12

[10] Xie Chi, Yang Ni. Analysis and empirical research on thelong-memory property of exchange rate time series[C]//International conference on wireless communications, networking and mobile computing. Shanghai: IEEE, 2007: 5911 – 5914

[11] Jin Xiu, Yao Jin. Empirical study of ARFIMA model based on fractional differencing[J]. Physica A, 2007, 377: 138 – 154

[12] 成礼智,王红霞,罗永. 小波的理论与应用[M]. 北京:科学出版社,2004:269 – 286
Cheng Lizhi, Wang Hongxia, Luo Yong. The theory and application of wavelet[M]. Beijing: Science Press, 2004: 269 – 286 (in Chinese)

(编　辑:赵海容)