含滚阻摩擦平面多体系统的建模和数值方法

曹 洁 吕 敬 王 琪

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 针对含滚阻和摩擦的平面多体系统,给出了通用的力学模型,利用第一类 Lagrange 方程建立了系统的动力学方程,为便于约束力的计算,利用局部方法列写约束方程,并以矩阵形式给出了该系统滚阻力偶和摩擦力的广义力.该系统动力学方程是非光滑的,通过建立滚阻定律的互补条件以及光滑铰链约束力的互补条件,给出了具有约束稳定化的基于事件驱动法的数值算法,将非光滑约束力、铰链约束力的求解以及滚轮滑动与粘滞的判断问题统一转化为一个线性互补问题进行求解.对两个算例进行了数值仿真,算例数值结果表明了该方法的可行性和有效性.

关 键 词: 多体系统; 滚动摩阻; 库伦摩擦; 线性互补问题

中图分类号: O 313.7

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2012)03-0410-06

Modeling and simulating of planar multi-body systems with rolling resistance and Coulomb friction

Cao Jie Lü Jing Wang Qi

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: To study the planar multi-body systems with rolling resistance and Coulomb friction, the generalized mechanics model with a number of rigid bodies and disks was established and the dynamical equations of the system were derived from Lagrange's equations of the first kind in Cartesian coordinate. In order to compute constraint forces, constraint equations of the system were expressed by local approach and the generalized forces of rolling resistance couples and Coulomb friction forces were given in the matrix notation. The complementarity conditions of the rolling resistance law and the reaction forces of the hinge were formed to solve the non-smooth differential equations. A constraint-stabilized event-driven method for the system was given. So the problems of the computation for non-smooth forces and the reaction forces of the hinge and the judgment for the stick-slip were transformed into a linear complementarity problem. The disk and the planar rigid multi-body system with rolling resistance and Coulomb friction were respectively considered as demonstrative application examples and numerical results were presented.

Key words: multi-body system; rolling resistance; Coulomb friction; linear complementarity problem

近年来非光滑多体系统动力学的研究逐渐成为多体系统动力学研究的热点问题之一,其主要原因在于研究航空航天、机械、车辆等多体系统动力学问题时,往往需要考虑摩擦对多体系统的影响,由此会导致系统的动力学方程不连续[1],已有的光滑多体系统的方法不能直接应用到非光滑多体系统,给系统的建模和数值计算带来了困难,故有必要对该类问题给予研究,以寻求新的解决方法[2-3].目前对含滚动摩阻和滑动摩擦的多体系统的研究比较少,对只含滑动摩擦多体系统的

收稿日期: 2010-11-09; **网络出版时间**: 2012-02-21 11:47

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20120221.1147.027.html

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11072014,10832004)

作者简介: 曹 洁(1987-),女,江苏徐州人,硕士生,caojie0122@163.com.

研究相对较多,其中利用互补方法研究含滑动摩擦多体系统的接触问题和摩擦问题是比较有效的方法. 文献[4]利用第一类 Lagrange 方程建模,并将互补思想引入含滑动摩擦多体系统的单边接触问题以及 stick-slip 状态切换问题的研究中. 文献[5]进一步讨论了采用线性互补方法求解含滑动摩擦多体系统问题的数值计算方法,给出了基于时间步进法的 LCP(Linear Complementarity Problem)形式. 文献[6]将互补方法应用到求解皮带轮与皮带系统的接触和摩擦问题当中. 目前互补方法主要被用于研究多体系统中的滑动摩擦和单边约束等问题,用于含滚阻的多体系统的研究尚不多见. 文献[7]研究了欧拉盘的运动,其中采用了 Coulomb-Contensou friction[8]模型,给出了单个欧拉盘的数值计算方法,但该方法用于求解含多个圆盘或滚轮的系统则比较复杂.

本文在前人关于含摩擦多体系统动力学研究工作的基础上,对同时含滚动摩阻和滑动摩擦的平面运动多体系统进行研究. 利用第一类 Lagrange 方程建立系统的动力学方程,采用局部方法列写约束方程[9],以矩阵形式给出滚阻力偶和摩擦力的广义力,建立滚阻力偶矩余量与滚轮角加速度的互补条件以及铰链约束力的互补条件,结合前人的工作,给出该系统动力学方程在非光滑点处的数值计算方法. 最后通过两个算例验证该方法的可行性和有效性.

1　系统描述和动力学方程的建立

假设平面多刚体系统由 n 个刚体和 n^* 个滚轮组成,刚体与刚体间及刚体和滚轮间由光滑柱铰链连接,滚轮受到定常单边约束作用,滚轮与单边约束间存在摩擦. 本文采用笛卡尔坐标描述系统的位形,即用$(x_{cj},y_{cj},\theta_j)(j=1,2,\cdots,n)$表示刚体 j 的质心坐标和转角,用$(x_{ci},y_{ci},\theta_i)(i=1,2,\cdots,n^*)$表示滚轮 i 的质心坐标和转角,将位形坐标按照一定顺序列写,先列写 n 个刚体的位形坐标,再列写 n^* 个滚轮的位形坐标,则系统的广义坐标为 $\boldsymbol{q}=[x_1,y_1,\theta_1,\cdots,x_{n+n^*},y_{n+n^*},\theta_{n+n^*}]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^N$,$N=3(n+n^*)$,物体间柱铰链的约束方程可以表示为 $f_k(\boldsymbol{q})=0((k=1,2,\cdots,2m)$,$m$ 表示柱铰链的个数),将其表示成矩阵形式为 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=[f_1,f_2,\cdots,f_{2m}]^{\mathrm{T}}=0$. 滚轮受到的单边约束表示为 $g_{\mathrm{N}i}(x_i,y_i)\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n^*)$,表示成矩阵形式为 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{N}}=[g_{\mathrm{N}1},g_{\mathrm{N}2},\cdots,g_{\mathrm{N}n^*}]^{\mathrm{T}}\geqslant 0$. 应用第一类 Lagrange 方程得到系统的动力学方程:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{f}}+\boldsymbol{W}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{f}}\\&\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q})=[f_1,f_2,\cdots,f_{2m}]^{\mathrm{T}}=0\\&\boldsymbol{g}_{\mathrm{N}}=[g_{\mathrm{N}1},g_{\mathrm{N}2},\cdots,g_{\mathrm{N}n^*}]^{\mathrm{T}}\geqslant 0\\&\text{库伦摩擦定律:}|F_{\mathrm{f}i}|\leqslant\mu_{0i}F_{\mathrm{N}i}\\&\text{滚动摩阻定律:}|M_{\mathrm{f}i}|\leqslant\delta_i F_{\mathrm{N}i}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{M}$ 为系统的广义质量矩阵;$\boldsymbol{h}$ 为主动力的广义力;$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}$ 为光滑柱铰链对应的约束方程的雅可比矩阵;$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{f}}=[\lambda_{\mathrm{f}1},\lambda_{\mathrm{f}2},\cdots,\lambda_{\mathrm{f}2m}]^{\mathrm{T}}$ 为对应铰链约束的 Lagrange 乘子列向量;$\boldsymbol{W}_{\mathrm{N}}$ 为单边约束 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{N}}$ 的雅可比矩阵的转置;$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{N}}=[\lambda_{\mathrm{N}1},\lambda_{\mathrm{N}2},\cdots,\lambda_{\mathrm{N}n^*}]^{\mathrm{T}}$ 为对应单边约束 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{N}}$ 的 Lagrange 乘子列向量;$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{f}}$ 为摩擦力和滚阻力偶的广义力的列向量.

根据库伦摩擦定律和滚动摩阻定律,作用于滚轮 $i(i=1,2,\cdots,n^*)$上的摩擦力 $F_{\mathrm{f}i}$和滚阻力偶矩 $M_{\mathrm{f}i}$与法向约束力 $F_{\mathrm{N}i}$的关系可表示为

$$F_{\mathrm{f}i}=\begin{cases}-\mu_i F_{\mathrm{N}i}\mathrm{Sgn}(v_{\mathrm{r}i}) & v_{\mathrm{r}i}\neq 0\\-\mu_{0i}F_{\mathrm{N}i}Sgn(\dot{v}_{\mathrm{r}i}) & v_{\mathrm{r}i}=0\end{cases}\tag{2}$$

$$M_{\mathrm{f}i}=\begin{cases}-\delta_i F_{\mathrm{N}i}\mathrm{Sgn}(\dot{\theta}_i) & \dot{\theta}_i\neq 0\\-\delta_i F_{\mathrm{N}i}\mathrm{Sgn}(\ddot{\theta}_i) & \dot{\theta}_i=0\end{cases}\tag{3}$$

$$\mathrm{Sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\[-1,1] & x=0\\-1 & x<0\end{cases}$$

其中,μ_i,μ_{0i}分别为滚轮与约束面间的动、静滑动摩擦系数;δ_i 为滚阻系数;$v_{\mathrm{r}i}$和 $\dot{v}_{\mathrm{r}i}$分别为滚轮与约束面接触点相对于约束面的切向速度和切向加速度,$\dot{\theta}_i$,$\ddot{\theta}_i$ 分别为其角速度和角加速度.

在平面问题中,滚轮受到的单边约束分为直线和曲线两种情形,记滚轮 i 的半径为 R_i,其质心到约束面的距离为 $H_i(x_i,y_i)$,当约束为直线时,其约束方程可以表示为

$$g_{\mathrm{N}i}(x_i,y_i)=H_i(x_i,y_i)-R_i\geqslant 0$$

当约束为曲线时,已知曲线的曲率中心和曲率半径 $\rho_i(\rho_i>R_i)$,记滚轮 i 的质心到曲率中心的距离为 $H_i^*(x_i,y_i)$,根据曲线的凹凸性,其约束方程可以分为两种情形:

1) 曲线为凸的情形:

$$g_{\mathrm{N}i}(x_i,y_i)=(\rho_i-R_i)-H_i^*(x_i,y_i)\geqslant 0$$

2) 曲线为凹的情形:

$$g_{\mathrm{N}i}(x_i,y_i)=H_i^*(x_i,y_i)-(\rho_i+R_i)\geqslant 0$$

采用笛卡尔坐标并通过局部方法列写约束方程,可以得到约束力与 Lagrange 乘子一一对应的关系[10]. 当滚轮与约束面接触时,其约束方程为 $g_{\mathrm{N}i}(x_i,y_i)=0$,对应的 Lagrange 乘子为 $\lambda_{\mathrm{N}i}$,可以得到法向约束力与拉格朗日乘子的关系[10]:

$$F_{\mathrm{N}i}=c_i\lambda_{\mathrm{N}i}$$

其中 $c_i=\sqrt{\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\right)^2}$.

下面给出 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{f}}$ 的表达式. 设约束方程 $g_{\mathrm{N}i}(x_i,y_i)=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}$,切向量为 $\boldsymbol{\tau}$,则有:

$$\boldsymbol{n}=\frac{\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\boldsymbol{j}\right)}{c_i}\qquad \boldsymbol{\tau}=\frac{\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\boldsymbol{i}-\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\boldsymbol{j}\right)}{c_i}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 分别为惯性系中两个正交坐标轴的单位向量. 记摩擦力 $F_{\mathrm{f}i}$ 作用点的虚位移为 δs_{1i},则

$$\delta s_{1i}=(\delta x_i\boldsymbol{i}+\delta y_i\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{\tau}+R_i\delta\theta_i=\frac{\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\delta x_i-\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\delta y_i\right)}{c_i}+R_i\delta\theta_i$$

滚轮转动的虚位移为 $\delta s_{2i}=\delta\theta_i$,则作用于滚轮 i 的摩擦力 $F_{\mathrm{f}i}$ 和滚阻力偶 $M_{\mathrm{f}i}$ 在任意虚位移中所作的虚功可以表示为

$$\delta W_i=F_{\mathrm{f}i}\delta s_{1i}+M_{\mathrm{f}i}\delta s_{2i}=\left(\frac{F_{\mathrm{f}i}\frac{\partial g_i}{\partial y_i}}{c_i}\right)\delta x_i+\left(\frac{-F_{\mathrm{f}i}\frac{\partial g_i}{\partial x_i}}{c_i}\right)\delta y_i+(F_{\mathrm{f}i}R_i+M_{\mathrm{f}i})\delta\theta_i$$

由此得到 $F_{\mathrm{f}i}$ 和 $M_{\mathrm{f}i}$ 对应于滚轮 i 的位形坐标 (x_i,y_i,θ_i) 的广义力为

$$\begin{bmatrix}Q^{\mathrm{f}}_{xi}\\Q^{\mathrm{f}}_{yi}\\Q^{\mathrm{f}}_{\theta i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\Big/c_i & -\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\Big/c_i & R_i\\0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}F_{\mathrm{f}i}\\M_{\mathrm{f}i}\end{bmatrix}$$

$i=1,2,\cdots,n^*$,为便于计算,将摩擦力和滚阻力偶的广义力用矩阵形式表示,广义力的矩阵形式为

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{f}}=\boldsymbol{W}_{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{T}}\tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{f}}=\begin{bmatrix}Q_{x_1}&Q_{y_1}&Q_{\theta_1}&\cdots&Q_{x(n+n^*)}&Q_{y(n+n^*)}&Q_{\theta(n+n^*)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{W}_{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{A}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}F_{\mathrm{f}1}&M_{\mathrm{f}1}&\cdots&F_{\mathrm{f}n^*}&M_{\mathrm{f}n^*}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_2&\cdots&\boldsymbol{0}\\\vdots&\vdots&\ddots&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_{n^*}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix}\frac{\partial g_i}{\partial y_i}\Big/c_i&0\\-\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\Big/c_i&0\\R_i&1\end{bmatrix}$$

$i=1,2,\cdots,n^*$,$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{(3n^*\times 2n^*)}$,$\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^{(3n\times 2n^*)}$,$\boldsymbol{P}$ 为零矩阵. 其中 $F_{\mathrm{f}i}$ 由式(2)确定,$M_{\mathrm{f}i}$ 由式(3)确定.

故动力学方程式(1)中的第1式可以表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{f}}+\boldsymbol{W}_{\mathrm{N}}\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{W}_{\mathrm{T}}\lambda_{\mathrm{T}}\tag{5}$$

式(5)在非光滑点($\dot\theta_i=0$ 或 $v_{ri}=0$)不连续.

2 动力学方程的算法

对于含滚动摩擦的多体系统,滚阻力偶矩和摩擦力在非光滑点处使得动力学方程右端向量场不连续,给方程的数值求解带来困难. 本文在前人工作的基础上,通过建立滚阻定律的互补条件以及铰链约束力的互补条件,将摩擦力、滚阻力偶矩、铰链约束力的求解以及滑动与粘滞的判断问题统一转化为一个线性互补问题进行求解.

2.1 互补条件

1) 摩擦定律和滚阻定律的互补条件. 滑动摩擦的正向和负向摩擦余量的定义[5]:

$$\left.\begin{aligned}F_{\mathrm{f}i}^{+}&=\mu_{0i}F_{\mathrm{N}i}+F_{\mathrm{f}i}\\F_{\mathrm{f}i}^{-}&=\mu_{0i}F_{\mathrm{N}i}-F_{\mathrm{f}i}\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

切向加速度 $\dot v_{ri}$ 的正向和负向分别定义为[5]

$$\left.\begin{aligned}\dot v_{ri}^{+}&=\frac{(|\dot v_{ri}|+\dot v_{ri})}{2}\\\dot v_{ri}^{-}&=\frac{(|\dot v_{ri}|-\dot v_{ri})}{2}\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

本文建立了滚阻力偶矩余量的正向和负向:

$$\left.\begin{aligned}M_{\mathrm{f}i}^{+}&=\delta_iF_{\mathrm{N}i}+M_{\mathrm{f}i}\\M_{\mathrm{f}i}^{-}&=\delta_iF_{\mathrm{N}i}-M_{\mathrm{f}i}\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

以及角加速度 $\ddot\theta_i$ 的正向和负向:

$$\left.\begin{aligned}\ddot\theta_i^{+}&=\frac{(|\ddot\theta_i|+\ddot\theta_i)}{2}\\\ddot\theta_i^{-}&=\frac{(|\ddot\theta_i|-\ddot\theta_i)}{2}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

将式(6)与式(8)统一表示为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{\mathrm{H}i}^{+}&=\mu_i^*c_i\lambda_{\mathrm{N}i}+\lambda_{\mathrm{H}i}\\\lambda_{\mathrm{H}i}^{-}&=\mu_i^*c_i\lambda_{\mathrm{N}i}-\lambda_{\mathrm{H}i}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{若 }\lambda_{\mathrm{H}i}=F_{\mathrm{f}i},\text{则 }\mu_i^*=\mu_{0i}\\&\text{若 }\lambda_{\mathrm{H}i}=M_{\mathrm{f}i},\text{则 }\mu_i^*=\delta_i\end{aligned}\tag{10}$$

将式(7)与式(9)统一表示为

$$\left.\begin{aligned}\ddot g_{\mathrm{H}i}^{+}&=\frac{(|\ddot g_{\mathrm{H}i}|+\ddot g_{\mathrm{H}i})}{2}\\\ddot g_{\mathrm{H}i}^{-}&=\frac{(|\ddot g_{\mathrm{H}i}|-\ddot g_{\mathrm{H}i})}{2}\end{aligned}\right\}\quad\ddot g_{\mathrm{H}i}=\dot v_{ri}\text{或 }\ddot\theta_i\tag{11}$$

因此 $\ddot g_{\mathrm{H}i}^{+}$ 与 $\lambda_{\mathrm{H}i}^{+}$,$\ddot g_{\mathrm{H}i}^{-}$ 与 $\lambda_{\mathrm{H}i}^{-}$ 构成下列互补条件:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot g_{\mathrm{H}i}^{+}\geqslant 0\\&\lambda_{\mathrm{H}i}^{+}\geqslant 0\\&\ddot g_{\mathrm{H}i}^{+}\lambda_{\mathrm{H}i}^{+}=0\\&\ddot g_{\mathrm{H}i}^{-}\geqslant 0\\&\lambda_{\mathrm{H}i}^{-}\geqslant 0\\&\ddot g_{\mathrm{H}i}^{-}\lambda_{\mathrm{H}i}^{-}=0\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

式(12)成立的条件是:$\dot g_{\mathrm{T}i}=0$($\dot g_{\mathrm{T}i}=v_{ri}$或$\dot\theta_i$).

另外当 $\dot{g}_{Ti}=0$ 时,$\dot{v}_{ri}$ 或 $\ddot{\theta}_i$ 用 $\ddot{g}_{Hi}$ 表示,当 $\dot{g}_{Ti}\neq 0$ 时,$\dot{v}_{ri}$ 或 $\ddot{\theta}_i$ 用 $\ddot{g}_{Ti}$ 表示.

2) 接触定律的互补条件. 单边约束的法向约束力 λ_{Ni} 与法向加速度 $\ddot{g}_{Ni}$ 满足的互补条件[4]:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{g}_{Ni}\geqslant 0\\&\lambda_{Ni}\geqslant 0\\&\ddot{g}_{Ni}\lambda_{Ni}=0\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

式(13)的适用条件:$g_{Ni}=\dot{g}_{Ni}=0$.

3) 铰链约束力的互补条件. 设 λ_{fi} 为柱铰链约束对应的约束力,λ_{fi}^{+},λ_{fi}^{-} 分别表示约束力的正向和负向:

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{fi}^{+}&=(|\lambda_{fi}|+\lambda_{fi})/2\\\lambda_{fi}^{-}&=(|\lambda_{fi}|-\lambda_{fi})/2\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

λ_{fi}^{+},λ_{fi}^{-} 满足的互补条件为

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_{fi}^{+}\geqslant 0\\&\lambda_{fi}^{-}\geqslant 0\\&\lambda_{fi}^{+}\lambda_{fi}^{-}=0\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

2.2　动力学方程的 LCP 形式

利用 Baumgarte 方法[11],铰链约束方程为

$$\boldsymbol{\Phi}_{q}\ddot{\boldsymbol{q}}+\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{q}\dot{\boldsymbol{q}}+\alpha\boldsymbol{\Phi}_{q}\dot{\boldsymbol{q}}+\beta\boldsymbol{\Phi}=0\tag{16}$$

通过互补条件式(12)、式(13)、式(15),约束方程式(16),运动微分方程式(5),关系式(10)、式(11)、式(14)和文献[5]中运动学关系,可得到非光滑点处动力学方程的 LCP 形式:

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{q}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{q}^{T}&0&0&0\\\boldsymbol{W}_{N}^{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{q}^{T}&\boldsymbol{E}&0&0\\\boldsymbol{W}_{H}^{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{q}^{T}&0&\boldsymbol{E}&0\\0&0&0&\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_{f}^{-}\\\ddot{\boldsymbol{g}}_{N}\\\ddot{\boldsymbol{g}}_{H}^{+}\\\boldsymbol{\lambda}_{H}^{-}\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{q}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{q}^{T}&\boldsymbol{\Phi}_{q}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{\Phi}_{q}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{W}_{H}&0\\\boldsymbol{W}_{N}^{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{q}^{T}&\boldsymbol{W}_{N}^{T}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{W}_{N}^{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{W}_{H}&0\\\boldsymbol{W}_{H}^{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_{q}^{T}&\boldsymbol{W}_{H}^{T}\boldsymbol{D}&\boldsymbol{W}_{H}^{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{W}_{H}&\boldsymbol{E}\\0&2\boldsymbol{\mu}_{H}\boldsymbol{c}&-\boldsymbol{E}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_{f}^{+}\\\boldsymbol{\lambda}_{N}\\\boldsymbol{\lambda}_{H}^{+}\\\ddot{\boldsymbol{g}}_{H}^{-}\end{bmatrix}+\\&\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_{q}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{h}+\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{q}\dot{\boldsymbol{q}}+\alpha\boldsymbol{\Phi}_{q}\dot{\boldsymbol{q}}+\beta\boldsymbol{\Phi}\\\boldsymbol{W}_{N}^{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{h}+\hat{\boldsymbol{W}}_{N}^{T}\dot{\boldsymbol{q}}\\\boldsymbol{W}_{H}^{T}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{h}+\hat{\boldsymbol{W}}_{H}^{T}\dot{\boldsymbol{q}}\\0\end{bmatrix}\\&[\boldsymbol{\lambda}_{f}^{-}\quad\ddot{\boldsymbol{g}}_{N}\quad\ddot{\boldsymbol{g}}_{H}^{+}\quad\boldsymbol{\lambda}_{H}^{-}]^{T}\geqslant\boldsymbol{0}\\&[\boldsymbol{\lambda}_{f}^{+}\quad\boldsymbol{\lambda}_{N}\quad\boldsymbol{\lambda}_{H}^{+}\quad\ddot{\boldsymbol{g}}_{H}^{-}]^{T}\geqslant\boldsymbol{0}\\&[\boldsymbol{\lambda}_{f}^{-}\quad\ddot{\boldsymbol{g}}_{N}\quad\ddot{\boldsymbol{g}}_{H}^{+}\quad\boldsymbol{\lambda}_{H}^{-}][\boldsymbol{\lambda}_{f}^{+}\quad\boldsymbol{\lambda}_{N}\quad\boldsymbol{\lambda}_{H}^{+}\quad\ddot{\boldsymbol{g}}_{H}^{-}]^{T}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

其中,$\boldsymbol{\mu}_0=\mathrm{diag}[\mu_1^{*}\quad\mu_2^{*}\quad\cdots\quad\mu_{2n^{*}}^{*}]$;$\boldsymbol{\mu}_H=(\boldsymbol{\mu}_0\boldsymbol{B})^{T}$;$\boldsymbol{c}=\mathrm{diag}[c_1\quad c_2\quad\cdots\quad c_{2n^{*}}]$;$\boldsymbol{W}_H=\boldsymbol{W}_T\boldsymbol{B}$;$\boldsymbol{B}$ 由 $\boldsymbol{s}$ 中非零的列向量构成,$\boldsymbol{s}=\mathrm{diag}[s_1\quad s_2\quad\cdots\quad s_{2n^{*}}]$,$s_i=1-|\mathrm{sgn}(g_{Ti})|(i=1,2,\cdots,2n^{*})$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{2n^{*}\times n_H}$,$\lambda_H\in\mathbf{R}^{n_H}$,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{W}_N-\boldsymbol{W}_T\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{c})$,$\mu=\mathrm{diag}[\mu_1\quad\mu_2\quad\cdots\quad\mu_{2n^{*}}]$ if $\dot{g}_{Ti}=0$, then $\mu_i=\mu_i^{*}$ $(i=1,2,\cdots,2n^{*})$; if $\dot{g}_{Ti}\neq 0$, then $\mu_i=\hat{\mu}_i\mathrm{sgn}(\dot{g}_{Ti})$ $(\hat{\mu}_i=\mu_i$ 或 $\delta_i)$.

应用 LCP 的相关算法求解式(17),可以得到 $\boldsymbol{\lambda}_f^{\pm}$,$\boldsymbol{\lambda}_N$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_H^{\pm}$,分别代入式(10)和式(14)中得到 $\boldsymbol{\lambda}_f$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_H$,连同 $\boldsymbol{\lambda}_N$ 再代入到方程式(5),用常微分方程的相关数值方法求解式(5).

3　算　例

算例 1　研究质量为 m 半径为 r 的均质圆盘在半径为 R 的半圆柱面上滚动,其位形坐标为 (x,y,θ),模型见图 1.

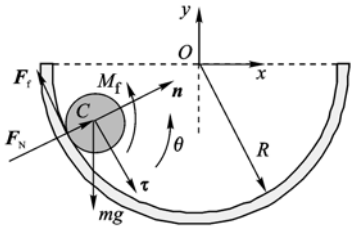

图 1　算例 1 模型示意图

该系统的参数分别为:$m=20$ kg,$R=2.5$ m,$r=0.5$ m,$\mu=0.4$,$\mu_0=0.5$. 系统初始条件为:$x=2.0$,$y=0.0$,$\theta=0.0$,$\dot{x}=0.0$,$\dot{y}=0.0$,$\dot{\theta}=0.0$.

情形 1　不考虑滚阻力偶作用.

图 2 给出了轮心坐标 x,y 的时间历程,图 3 为相对速度 v_r 和摩擦力 F_f 的时间历程. 由计算结果可知,在运动的约前 10 s 内,圆盘相对于半圆柱面出现滑动现象,由于纯滚动与滑动的切换导致了摩擦力的突变. 在此时间之后圆盘作纯滚动,这与理论分析结果(当 $|\tan\psi|\leqslant 3\mu_0$ 时,圆盘将作纯滚动,其中 ψ 为 OC 与铅垂线的夹角)相吻合.

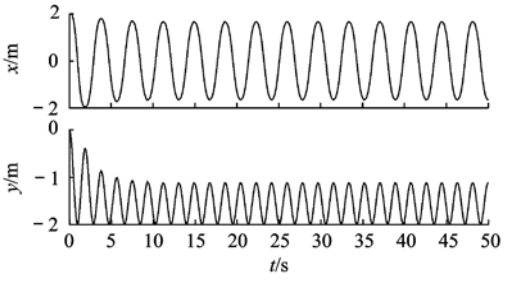

图 2　x,y 的时间历程

情形 2　考虑滚阻力偶作用($\delta=0.01$ m).

图 4 ~ 图 6 给出了 x,y 的时间历程,ν_r 和 F_f 的时间历程以及 $\dot{\theta}$ 与滚阻力偶矩 M_f 的时间历程. 数值结果表明,圆盘在约前 5 s 内有滑动现象,在此之后作纯滚动,由于滚阻力偶作用消耗系统的能量,使得圆盘最终静止在最低点附近.

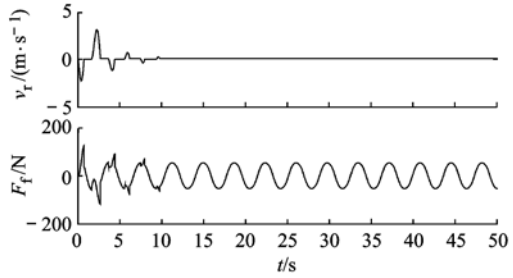

图 3 ν_r 和 F_f 的时间历程(情形 1)

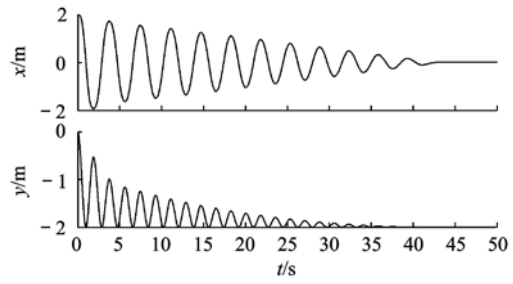

图 4 x,y 的时间历程(情形 1)

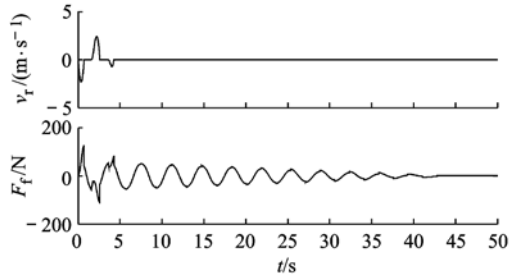

图 5 ν_r 和 F_f 的时间历程(情形 2)

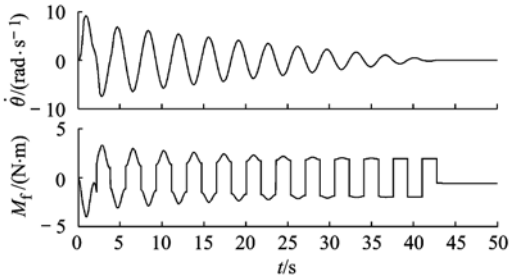

图 6 $\dot{\theta}$ 与 M_f 的时间历程(情形 2)

算例 2 机构见图 7,杆 OA 长 l_1 质量为 m_1,杆 AB 长 l_2 质量为 m_2,滚轮 B 半径为 r 质量为 m_3;滚轮与水平约束面的动、静滑动摩擦系数分别为 μ,μ_0,滚阻系数为 δ,不考虑柱铰链处摩擦. (x_1,y_1),(x_2,y_2) 和 (x_3,y_3) 分别为杆 OA,AB 和滚轮 B 的质心坐标,θ_3 表示滚轮 B 的转角. 系统位形坐标表示为:$(x_1,y_1,\theta_1,x_2,y_2,\theta_2,x_3,y_3,\theta_3)$.

该系统的参数分别为:$m_1=10$ kg,$l_1=1$ m,$m_2=20$ kg,$l_2=2$ m,$m_3=30$ kg,$r=0.15$ m,$\mu=0.4$,

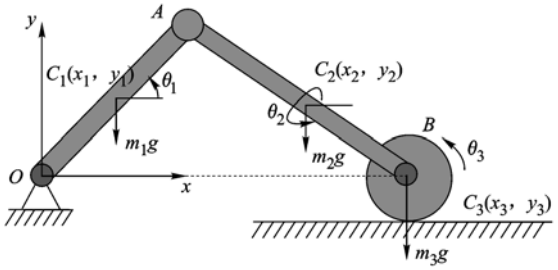

图 7 算例 2 模型示意图

$\mu_0=0.5$,$\delta=0.01$ m. 系统初始条件为:$\theta_1=0.0$,$\dot{\theta}_1=0.0$,$\theta_2=2\pi$,$\dot{\theta}_2=0.0$,$\theta_3=0.0$,$\dot{\theta}_3=0.0$.

情形 1 系统在重力作用下由静止开始运动.

图 8 ~ 图 10 分别给出了 $\theta_1,\dot{\theta}_1,\ddot{\theta}_1$ 的时间历程,$\dot{\theta}_3$ 和 M_f 的时间历程以及铰链 O 处的约束力 F_{ox} 和 F_{oy} 的时间历程. 由于滚阻力偶和摩擦力的存在,系统的能量不断减小,最终静止在平衡位置处.

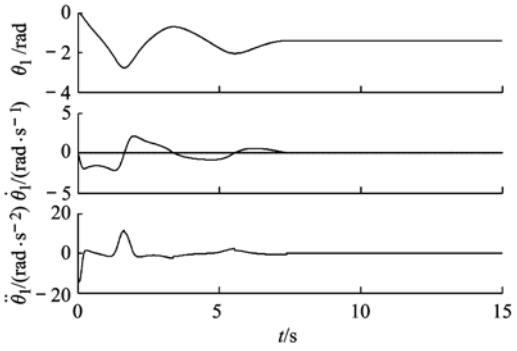

图 8 $\theta_1,\dot{\theta}_1,\ddot{\theta}_1$ 的时间历程(情形 1)

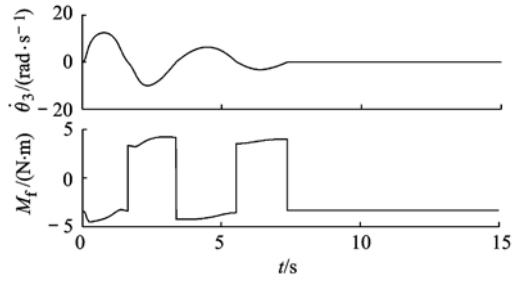

图 9 $\dot{\theta}_3$ 和 M_f 的时间历程(情形 1)

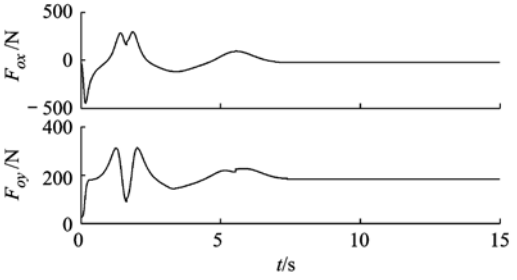

图 10 F_{ox} 和 F_{oy} 的时间历程(情形 1)

情形 2 杆 OA 处施加周期力矩.

设周期力偶矩为 $M=40\sin(\pi t)$ N · m. 图 11

为 $\dot{\theta}_1$,$\ddot{\theta}_1$ 的时间历程,在周期力矩的作用下,系统在运动中出现了频繁的 stick-slip 切换现象. 图 12 为 $\dot{\theta}_3$ 和 M_f 的时间历程,$\dot{\theta}_3=0$ 的时段,用本文的互补方法可有效求解 M_f 的大小. 图 13 为铰链 O 处的约束力 F_{ox} 和 F_{oy} 的时间历程. 图 14 为约束方程二次范数 $\|\Phi\|$ 的时间历程,未加违约修正时 $\|\Phi\|$ 随时间递增,加上违约修正后($\alpha=\beta=20$),$\|\Phi\|$ 始终保持在很小的范围内($\|\Phi\|\leqslant 10^{-6}$).

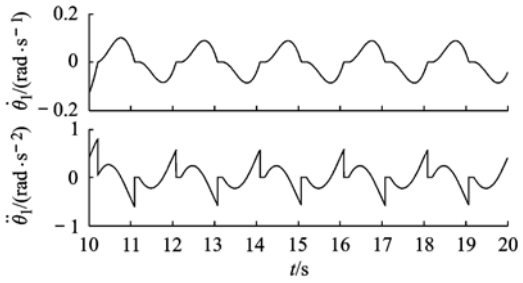

图 11　$\dot{\theta}_1$,$\ddot{\theta}_1$ 的时间历程(情形 2)

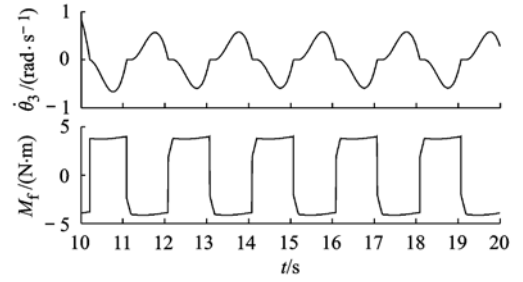

图 12　$\dot{\theta}_3$ 和 M_f 的时间历程(情形 2)

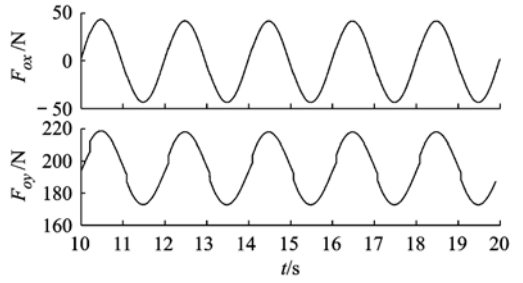

图 13　F_{ox} 和 F_{oy} 的时间历程(情形 2)

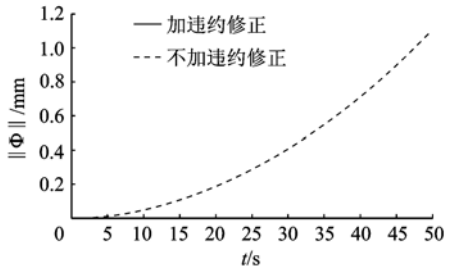

图 14　约束方程二次范数 $\|\Phi\|$ 的时间历程

4　结　论

本文采用笛卡尔全局坐标描述系统位形,利用局部方法列写约束方程,应用第一类 Lagrange 方程给出了含滑动摩擦和滚动摩阻的平面多体系统非光滑动力学方程,用该方程便于求解系统中所有的约束力;为便于编程计算以矩阵形式给出了摩擦力和滚阻力偶的广义力的一般形式.

通过建立滚阻力偶矩余量与滚轮角加速度的互补条件,将研究含滑动摩擦的非光滑动力学中常用的 LCP 方法推广,应用到含滑动摩擦与滚动摩阻的非光滑多体系统动力学中,有效地解决了该系统非光滑动力学方程数值计算的困难,并将 Baumgarte 约束稳定化方法应用于该非光滑系统,有效地抑制了约束方程的违约.

参考文献(References)

[1] Albert C J, Brandon C G. Stick and non-stick periodic motions in periodically forced oscillators with dry friction [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 291(1/2): 132 – 168

[2] Wiercigroch M. Modelling of dynamical systems with motion dependent discontinuities [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2000, 11(15): 2429 – 2442

[3] Schiehlen W. Research trends in multibody system dynamics [J]. Multibody System Dynamical, 2007, 18(1): 3 – 13

[4] Pfeiffer F. On non-smooth dynamics [J]. Meccanica, 2008, 43(5): 533 – 554

[5] Pfeiffer F, Foerg M, Ubrlch H. Numerical aspects of non-smooth multibody dynamics [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Enginneering, 2006, 195(50/51): 6891 – 6908

[6] Cepon G, Boltezar M. Dynamics of a belt-drive system using a linear complementarity problem for the belt-pulley contact description [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 319(3/4/5): 1019 – 1035

[7] Le Saux C, Leine R I, Glocker C. Dynamics of a rolling disk in the presence of dry friction [J]. Nonlinear Science, 2005, 15(1): 27 – 61

[8] Leine R I, Glocker Ch. A set-valued force law for spatial Coulomb-Contensou friction [J]. European Journal of Mechanics A: Solids, 2003, 22(2): 193 – 216

[9] 洪嘉振. 计算多体系统动力学[M]. 北京:高等教育出版社, 1999: 202 – 206
Hong Jiazhen. Computational dynamics of multi-body systems [M]. Beijing: Higher Education Press, 1999: 202 – 206 (in Chinese)

[10] 彭慧莲,郭易圆,王琪. 用第一类 Lagrange 方程求解平面多体系统约束力的方法[J]. 工程力学, 2008, 25(12): 65 – 71
Peng Huilian, Guo Yiyuan, Wang Qi. A method for solving constrained force of planar multi-body system via the first kind of Lagrange's equations [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(12): 65 – 71 (in Chinese)

[11] 潘振宽,赵维加,洪嘉振,等. 多体系统动力学微分:代数方程数值方法 [J]. 力学进展, 1996, 26(1): 28 – 40
Pan Zhenkuan, Zhao Weijia, Hong Jiazhen, et al. On numerical algorithms for differential/algebraic equations of motion of multi-body systems [J]. Advances in Mechanics, 1996, 26(1): 28 – 40 (in Chinese)

(编　辑:李　晶)