轴压开口圆柱薄壳屈曲分析与试验

张展智 赵国伟 黄 海 黄承静

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 开口圆柱薄壳结构的轴向承载能力和稳定性分析是空间薄壁管式伸展机构(STEM, Storable Tubular Extendable Member)设计的关键问题之一. 基于特征值屈曲分析方法, 研究了轴压铍青铜开口圆柱薄壳结构在两端固支条件下的屈曲载荷与设计参数间的关系, 利用幂函数拟合的方法建立了一种轴压开口圆柱薄壳屈曲载荷模型. 通过铍青铜开口圆柱薄壳轴向压缩试验对特征值屈曲分析和所建立的轴压开口圆柱薄壳屈曲载荷模型进行了验证. 结果表明: 特征值屈曲分析方法可用于各向同性材料开口圆柱薄壳结构在两端固支条件下的轴向承载能力与稳定性分析; 使用轴压开口圆柱薄壳屈曲载荷模型计算各向同性材料的开口圆柱薄壳在两端固支条件下受轴压作用时的屈曲载荷, 最大误差为 21%.

关 键 词: 开口圆柱壳; 屈曲; 特征值; 建模; 试验

中图分类号: V 414.3; O 343.9

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2012)04-0557-06

Buckling analysis and experiment of open cylindrical thin shells under axial load

Zhang Zhanzhi Zhao Guowei Huang Hai Huang Chengjing

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The axial load-bearing capacity and stability of open cylindrical thin shells is a key point in the mechanism design of storable tubular extendable member (STEM). Based on eigenvalue buckling analysis, the relationship between the buckling loads and the design parameters of open cylindrical thin QBe2 shells with two ends clamped was studied. And a buckling load model was built by the power functions fitting method. To validate the eigenvalue buckling analysis method and the buckling load model, axial compression experiments of open cylindrical thin shells made from QBe2 were conducted. The experimental results indicate that: the eigenvalue buckling analysis method can be used to analyze the axial load-bearing capacity and stability of open cylindrical thin shells of isotropic material with two ends clamped; the maximum error of the buckling load model is 21% in calculating the buckling loads of axially loaded open cylindrical thin shells of isotropic material with two ends clamped.

Key words: open cylindrical shells; buckling; eigenvalue; model building; experiments

开口圆柱薄壳结构在航空航天以及其他领域中有着广泛的应用, 如 DODGE 卫星的重力梯度杆、Apollo-15 中使用的伸展臂、哈勃望远镜的太阳电池帆板支撑杆等, 均采用了以开口圆柱薄壳结构为基本构型的伸展机构(STEM, Storable Tubular Extendable Member)[1-3]. 在这类应用中, 开口圆柱薄壳结构通常只能使用铍青铜材料(QBe2)或碳纤维复合材料(CFRP), 且往往处于两端固支的条件下并需要承受轴向压力的作用, 而较大的长径比和径厚比使其容易发生屈曲而导致结构失效, 因此, 轴压开口圆柱薄壳在两端固支条件下的稳定性是值得工程人员关注的重要问题

收稿日期: 2010-12-18; **网络出版时间**: 2012-04-20 09:19

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20120420.0919.019.html

作者简介: 张展智(1982-), 男, 辽宁鞍山人, 博士生, James@sa.buaa.edu.cn.

之一.

针对圆柱壳体受轴压作用时的稳定性,已经形成了诸多理论,如非线性跳跃理论、缺陷理论、初始后屈曲理论、边界层理论等[4-8]. 但是,由于开口情况下沿壳体轴向的两条边完全自由,因此很难得到其屈曲载荷的闭合解,这很大程度限制了开口圆柱薄壳的稳定性研究. 参考文献[9]最先采用数值方法求解了小挠度假设下的壳体屈曲方程,得到了轴压开口圆柱薄壳的屈曲载荷. 此后,文献[10]又采用大挠度假设对该问题进行求解. 文献[11]对扇角 θ 为 82°的开口圆柱薄壳进行轴向压缩试验,得到了小挠度假设下的数值解更接近真实屈曲载荷的结论. 文献[12]将上述理论方法推广至正交各项异性层合壳,同时考虑了轴向压力、剪力、弯矩的共同作用. 文献[13]通过 Galerkin 方法求解屈曲基本方程,建立了扇角 $\theta \geqslant 180°$的轴压开口圆柱薄壳的屈曲载荷模型. 计算机的发展为求解屈曲问题提供了很大的便利,使得特征值屈曲分析和非线性屈曲分析更加方便快捷,近年来的壳体稳定性研究也开始广泛地借助 ANSYS、ABAQUS 等商用分析软件,如 Magnucki 和 Wilde 等学者在对三边简支的轴压开口圆柱壳进行屈曲应力计算与数值仿真的过程中即使用了商用有限元分析软件,并得到了可供工程应用参考的结论[14-15].

本文采用特征值屈曲分析方法来研究各向同性材料的开口圆柱薄壳在两端固支条件下受轴压作用时的稳定性问题,并通过对分析值的拟合给出计算轴压开口圆柱薄壳屈曲载荷的模型,最后采用试验的方法来验证模型的精度.

1 开口圆柱薄壳结构

在空间伸展机构等应用中,开口圆柱薄壳构件往往受到轴向压力 P 的作用,用来描述开口圆柱壳的几何参数包括长度 L、曲率半径 R、厚度 t、以及扇角 θ,如图 1 所示.

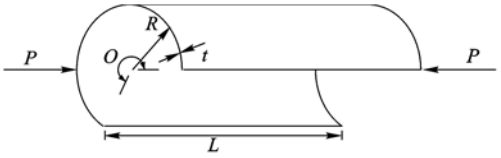

图 1 薄壳示意图

应用于空间伸展机构的开口圆柱薄壳结构,其常用的材料包括铍青铜(QBe2)、碳纤维复合材料(CFRP)等. 本文仅考虑各向同性材料,因此选择铍青铜作为开口圆柱薄壳的材料. 铍青铜经过热处理工艺后具有良好的弹性、强度和硬度,而且耐疲劳、耐腐蚀、耐低温、无磁性. 铍青铜的主要材料参数值如表 1 所示.

表 1 铍青铜的材料参数

材料	弹性模量 E/GPa	泊松比 ν	抗拉强度 σ_b/MPa
QBe2	130	0.35	1 160 ~ 1 380

2 特征值屈曲分析

2.1 基础理论

设薄壳结构在载荷状态 $\boldsymbol{P}_0$ 下满足:

$$\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{K}_e \boldsymbol{u}_0 \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{K}_e$ 为结构的弹性刚度矩阵;$\boldsymbol{u}_0$ 为结构在 $\boldsymbol{P}_0$ 作用下产生的位移.

假设位移足够小,则在任意状态下的增量平衡方程为

$$\Delta \boldsymbol{P} = [\boldsymbol{K}_e + \boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma})]\Delta \boldsymbol{u} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma})$ 是应力状态 $\boldsymbol{\sigma}$ 下的应力刚度矩阵. 式(2)表达了结构内的应力状态对结构净刚度的增强或削弱效应.

设加载行为是载荷 $\boldsymbol{P}_0$ 的线性函数,即

$$\boldsymbol{P} = \lambda \boldsymbol{P}_0 \tag{3}$$

不考虑任何非线性情况,则有

$$\boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda \boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_0) \tag{4}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 为载荷 $\boldsymbol{P}_0$ 状态下结构内部的应力. 于是,增量平衡方程变为

$$\Delta \boldsymbol{P} = [\boldsymbol{K}_e + \lambda \boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_0)]\Delta \boldsymbol{u} \tag{5}$$

当结构发生屈曲时,在 $\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$ 的情况下仍然会产生位移增量 $\Delta \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$,即

$$[\boldsymbol{K}_e + \lambda \boldsymbol{K}_\sigma(\boldsymbol{\sigma}_0)]\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

方程(6)代表了线性屈曲的特征值问题,λ 被称为特征值或载荷因子,它的最小值与初始载荷 $\boldsymbol{P}_0$ 的乘积即为结构的屈曲载荷.

2.2 特征值屈曲载荷的有限元求解

应用有限元软件 ANSYS 建立开口圆柱薄壳的有限元模型,如图 2 所示. 模型包括两部分:作为分析对象主体的薄壳和对薄壳进行固定的紧固圈. 其中,薄壳部分使用弹性壳单元 SHELL63,两端的紧固圈使用三维结构实体单元 SOLID45.

由于结构的形状较为简单,因此在划分单元时采用正交型网格,即薄壳部分为四边形单元,紧固圈部分为六面体单元. 由于单元在横截面上是以多边形来逼近圆周,因此周向上应划分足够多的单元,一般整个圆周上应不少于 72 个. 另外,为了保证单元具有良好的形状,单元的长短边的长度之比应小于 3:1.



图 2　薄壳有限元模型

在设置单元材料参数方面,薄壳部分采用表 1 中 QBe2 的材料参数值,紧固圈部分则采用钢材或铝材的材料参数均可.

对有限元模型的一端施加总和为 1 N 的均布载荷,且加载端节点只具有轴向平动自由度;而模型另一端节点的 6 个自由度则被完全约束.

在特征值屈曲分析过程中,首先要进行静力学求解来获得结构载荷与位移之间的线性关系,然后再进行特征值屈曲求解,提取特征值与屈曲模态. 需要注意的是,在进行静力学求解时必须激活预应力效应.

3　屈曲载荷模型的推导

3.1　模型基本形式

根据文献[13]的结论,可以得到轴压开口圆柱薄壳在两端简支情况下的屈曲载荷模型为

$$P_{CR} = 2.13 \times 10^{-9} \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} t^2 \theta, \theta \geqslant 180^\circ \tag{7}$$

式中,屈曲载荷 P_{CR},弹性模量 E,厚度 t,扇角 θ 的单位分别为 N,Pa,mm,(°). 从式(7)可以看出,该模型中不包含薄壳长度 L 和曲率半径 R 两项,即认为轴压开口圆柱薄壳的屈曲载荷与薄壳长度和曲率半径无关,而这与实际情况是不相符的.

本文的研究中采用单变量拟合的方法,设置几何参数单独变化的序列,并逐一进行特征值屈曲分析,用幂函数对每个序列的分析值进行拟合,以此来推导轴压开口圆柱薄壳在两端固支条件下的屈曲载荷模型.

首先,参考文献[13]的模型,设各向同性材料的开口圆柱薄壳在两端固支条件下受轴压作用时的特征值屈曲载荷分析值 P_{EV} 与薄壳几何参数之间的关系满足:

$$P_{EV} = \alpha \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} L^a R^b \theta^c t^d \tag{8}$$

式中,α 为待定系数;a,b,c,d 分别为薄壳长度、曲率半径、厚度和扇角项对应的指数. 即式(8)中共包含 5 个需要确定的参数.

3.2　模型推导过程

模型推导的过程即是确定式(8)中 5 个未知参数的过程. 首先通过单变量拟合的方法分别研究 P_{EV} 随开口圆柱薄壳各几何参数的变化趋势,即确定 a,b,c,d 的值;再通过求解平均值的方法确定系数 α 的值.

为了研究 P_{EV} 与薄壳长度 L 的关系,设定薄壳的曲率半径和厚度为 $R=15$ mm,$t=0.2$ mm,设置薄壳扇角分别为 $\theta=120^\circ$,$\theta=180^\circ$ 和 $\theta=240^\circ$ 的 3 个长度序列,对长度 L 在 60 ~ 360 mm 之间的开口圆柱薄壳进行特征值屈曲分析,并使用幂函数对分析值进行拟合,如图 3 所示. 从图 3 中可以看出,当 $\theta=240^\circ$ 时,屈曲载荷 P_{EV} 与 $L^{-0.2}$ 成正比;当 $\theta=180^\circ$ 时,大多数分析值满足 P_{EV} 与 $L^{-0.2}$ 成正比,但在 $L=300$ ~ 330 mm 之间曲线出现了转折点;当 $\theta=120^\circ$ 时,在 $L=120$ mm 附近即出现转折点,此后屈曲载荷 P_{EV} 与 $L^{-1.5}$ 成正比. 由此可知,转折点的位置不仅仅与薄壳长度 L 有关,还需考虑其他几何参数. 在转折点之前,式(8)中长度项 L 的指数 $a=-0.2$,转折点之后 $a=-1.5$.

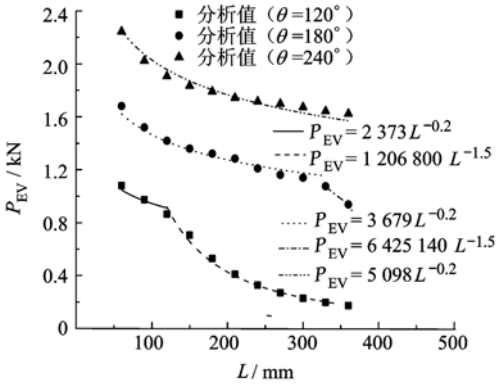

图 3　P_{EV}-L 曲线($R=15$ mm,$t=0.2$ mm)

设定薄壳厚度为 $t=0.2$ mm、扇角为 $\theta=240^\circ$,设置 $L=60$ mm,$L=180$ mm 和 $L=300$ mm 3 个曲率半径序列来分别进行特征值屈曲分析,并对分析值进行拟合,如图 4 所示. 由图 4 可见,薄壳长度越大,转折点对应的曲率半径越大. 在转折点之前,P_{EV} 与 $R^{2.4}$ 成正比,即式(8)中曲率半径项 R 的指数 $b=2.4$;在转折点之后,P_{EV} 与 $R^{0.1}$ 成正比,即 $b=0.1$.

设定薄壳的曲率半径 $R=15$ mm、厚度 $t=0.2$ mm,设置 $L=60$ mm,$L=180$ mm 和 $L=300$ mm 3 个扇角序列来研究特征值屈曲载荷 P_{EV} 与薄壳扇角 θ 的关系,如图 5 所示. 从图 5 中可以看出,薄壳的长度越大,转折点对应的扇角也越大. 在转

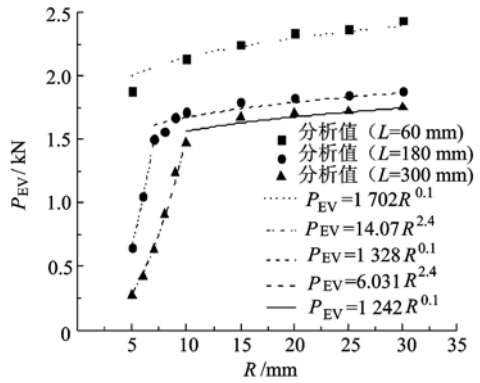

图 4 P_{EV}-R 曲线（t = 0.2 mm，θ = 240°）

折点之前，屈曲载荷 P_{EV} 与 $\theta^{3.5}$ 成正比，即式(8)中扇角项 θ 的指数 c = 3.5，在转折点之后，P_{EV} 与 θ 成正比，即 c = 1.

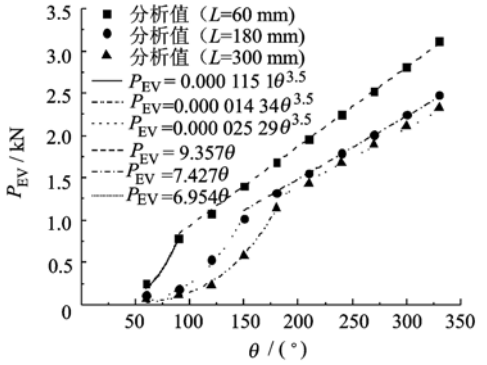

图 5 P_{EV}-θ 曲线（R = 15 mm，t = 0.2 mm）

薄壳特征值屈曲载荷 P_{EV} 与薄壳厚度之间的关系较为独立. 设定 L = 180 mm，R = 15 mm，θ = 240°，对不同厚度的壳体进行特征值屈曲分析，并对分析值进行拟合，如图 6 所示. 由图 6 可见，特征值屈曲载荷 P_{EV} 与 t^2 成正比，即式(8)中厚度项 t 的指数 d = 2.

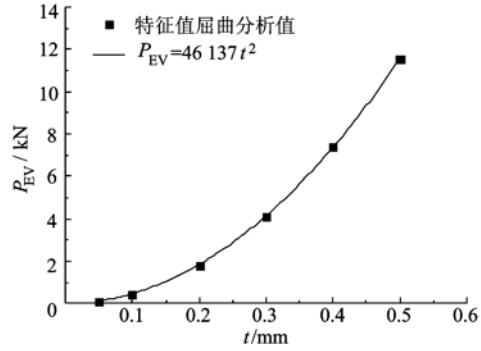

图 6 P_{EV}-t 曲线（L = 180 mm，R = 15 mm，θ = 240°）

根据转折点处薄壳长度 L、曲率半径 R 和扇角 θ 之间的关系，定义转折点判定参量为

$$Z = L/(R^x\theta^y) \tag{9}$$

式中，x，y 分别为曲率半径 R 和扇角 θ 的指数，其值待定. 在转折点处，$Z = Z_0$，Z_0 即为转折点的判定阈值.

于是，式(8)可以按照判定参量 Z 与阈值 Z_0 的关系表达成一个分段函数：

$$\left.\begin{aligned} P_{EV} &= \alpha_1 \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{R^{0.1}\theta t^2}{L^{0.2}} \qquad Z \leqslant Z_0 \\ P_{EV} &= \alpha_2 \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{R^{2.4}\theta^{3.5} t^2}{L^{1.5}} \qquad Z > Z_0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

式中，α_1，α_2 为对应两种情况下的待定系数，从已有的数据来看，α_1 与 α_2 在各自情况下都是基本保持一致的. 因此，根据已有的薄壳几何参数值与屈曲载荷分析值，便可求出 α_1 和 α_2 的平均值为：α_1 = 5.0×10^{-9}，α_2 = 3.2×10^{-14}. 再根据函数的连续性，可以求得 x = 1.8，y = 1.9，Z_0 = 1.0×10^{-4}.

于是，建立各向同性材料的开口圆柱薄壳在两端固支条件下受轴压作用时的屈曲载荷模型（BLOOM，Buckling Load of Open cylindrical thin shells Model）为

$$\left.\begin{aligned} P_{EV} &= 5.0\times10^{-9} \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{R^{0.1}\theta t^2}{L^{0.2}} \\ & Z \leqslant 1.0\times10^{-4} \\ P_{EV} &= 3.2\times10^{-14} \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{R^{2.4}\theta^{3.5} t^2}{L^{1.5}} \\ & Z > 1.0\times10^{-4} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中，$Z = L/(R^{1.8}\theta^{1.9})$，为判定参量；其中长度 L，曲率半径 R 的单位为 mm.

4 轴向压缩试验

4.1 试件与试验设备

为了验证特征值屈曲分析以及屈曲载荷模型的准确性，对 9 组不同几何参数的开口圆柱薄壳按每组 5 个试件的规模进行了轴向压缩试验.

45 个铍青铜开口圆柱薄壳试件均采用手工制作. 首先对铍青铜带材进行 790 ℃下保温 8 min 的固溶处理，淬火后对其进行剪裁与成型工艺，之后再进行 320 ℃下保温 2 h 的时效处理. 经过上述工艺后，所获得试件的圆柱度公差在毫米量级，弹性模量略低于表 1 中所列的数值. 加工完成的 9 组试件如图 7 所示，其几何参数如表 2 所示.



图 7 压缩试验试件

表 2　试件几何参数

组号	L/mm	R/mm	t/mm	θ/(°)	$Z\times10^4$
1	300	15	0.2	240	0.7
2	300	15	0.2	180	1.2
3	300	15	0.2	120	2.6
4	180	15	0.2	240	0.4
5	180	15	0.2	180	0.7
6	180	15	0.2	120	1.5
7	180	10	0.2	240	0.9
8	60	15	0.2	240	0.1
9	60	10	0.2	240	0.3

压缩试验使用 REGER RGM-3100 型电子万能试验机,其静态载荷测量精度为示值的 ±1%. 首先将试件的两端用喉箍和垫片箍紧,再通过特制的夹具将其安装于试验机的压头与平台之间,如图 8 所示.

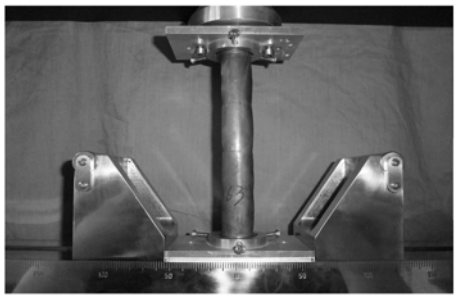

图 8　试件安装示意图

试验机与一台计算机相连接,由计算机控制试验过程以及采集处理试验数据. 进行压缩试验时,以 20 mm/min 的加载速度对试件缓慢加载,由于屈曲是在瞬间发生的,而计算机采样频率的限制使其很难采集到屈曲载荷的峰值,因此也会使试验结果产生一定的误差.

4.2　试验结果及讨论

以 L = 180 mm, R = 15 mm, t = 0.2 mm, θ = 120°的第 6 组第 3 号铍青铜开口圆柱薄壳试件为例,试验获得的载荷-位移曲线如图 9 所示,临近屈曲时的试件形状如图 10 所示. 图 11 是使用有限元法进行特征值屈曲分析时所得到的屈曲模态图. 将图 10 与图 11 进行比较可以发现,试件临近屈曲时的形状与分析得到的屈曲模态较为相似,但屈曲模态中的挠度更为显著.

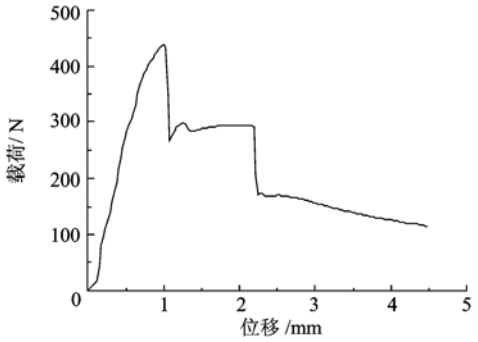

图 9　试验载荷-位移曲线



图 10　临近屈曲时的试件形状

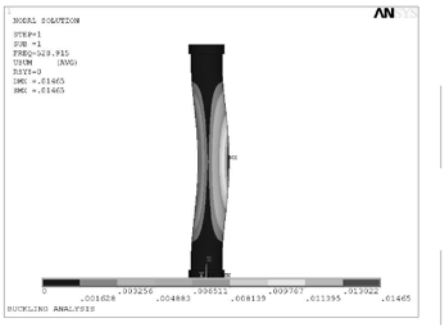

图 11　屈曲模态示意图

将轴向压缩试验得到的开口圆柱薄壳屈曲载荷试验结果与特征值屈曲分析结果和屈曲载荷模型计算结果进行比较,如表 3 所示. 其中,相对误差的计算均以各组试验的平均值作为真值.

表 3　试验结果与分析结果、计算结果的比较

组号	试验结果/N							特征值屈曲分析结果		BLOOM 计算结果	
	试件 1	试件 2	试件 3	试件 4	试件 5	平均值 $\overline{P}$	标准差 σ	分析值/N	误差/%	计算值/N	误差/%
1	1415	1899	1601	1756	1414	1617	213	1673	3.5	1611	−0.4
2	848	862	1016	655	864	849	128	1139	34.2	1027	21.0
3	237	217	211	243	221	226	14	228	0.9	248	9.7
4	1902	1928	1707	2251	1930	1944	195	1792	−7.8	1785	−8.2
5	1749	1404	1275	1371	829	1326	330	1322	−0.3	1338	0.9
6	463	433	437	519	506	472	39	529	12.1	534	13.1
7	1843	1811	1744	1686	1803	1777	62	1712	−3.7	1714	−3.5
8	1966	2086	2120	2484	3046	2340	439	2245	−4.1	2223	−5.0
9	2383	1961	1714	1917	2101	2015	248	2132	5.8	2135	6.0

由表 3 中试验结果可见,试验值的分布往往较为离散,标准差较大. 其主要原因在于,试件在加工和安装阶段所产生的形位公差,以及淬火时冷却不均产生的材料缺陷,都会导致同组试件的屈曲载荷有所不同.

由表 3 中特征值屈曲分析结果可见,除第 2 组和第 6 组外,轴压开口圆柱薄壳在两端固支条件下的特征值屈曲分析值与试验平均值较为接近,所有分析值均在($\bar{P} \pm 3\sigma$)范围内.

由表 3 中 BLOOM 计算结果可见,计算值与特征值屈曲分析值较为接近,拟合情况较好. 与试验均值相比,$Z \leqslant 1.0 \times 10^{-4}$时 BLOOM 的计算误差在 ±10% 以内,$Z > 1.0 \times 10^{-4}$时的计算误差较大,最大为 21%.

5 结 论

本文通过对各向同性材料的开口圆柱薄壳在两端固支条件下受轴压作用时的一系列分析与试验研究,可以得到以下结论:

1) 特征值屈曲分析结果与试验均值基本一致,因此可以采用特征值屈曲分析方法来求解各向同性材料的开口圆柱薄壳在两端固支条件下受轴压作用时的屈曲载荷.

2) 经过试验验证,使用单变量拟合方法所推导的屈曲载荷模型 BLOOM 适用于估算各向同性材料的开口圆柱薄壳在两端固支条件下受轴压作用时的屈曲载荷,计算值与试验均值相比,最大误差为 21%.

参考文献 (References)

[1] Pellegrino S. Large retractable appendages in spacecraft[J]. Journal of Spacecraft and Rockets,1995,32(6):1006 - 1014

[2] 陈烈民. 航天器结构与机构[M]. 北京:中国科学技术出版社,2005:312 - 321
Chen Liemin. Spacecraft structures and mechanisms[M]. Beijing:China Science and Technology Press,2005:312 - 321(in Chinese)

[3] Higuchi K,Ishimura K. A survey of space structures research in Japan[R]. AIAA-2009-2387,2009

[4] 杜启端. 现代薄壳非线性稳定性理论的发展和应用[J]. 强度与环境,2002,29(1):41 - 51
Du Qiduan. Advance and application for the modern nonlinear stability theory of the thin shell [J]. Structure & Environment Engineering,2002,29(1):41 - 51(in Chinese)

[5] Karman T V,Tsien H. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression [J]. Journal of the Aeronautical Sciences,1941,8(8):303 - 312

[6] Donnell L H,Wan C C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression [J]. Journal of Applied Mechanics,1950,17(1):73 - 83

[7] Koiter W T. On the stability of elastic equilibrium [D]. Delft: Department of Mechanics,Shipbuilding,and Airplane Building,Delft University of Technology,1945(in Dutch with English summary)

[8] 沈惠申,陈铁云. 圆柱薄壳在外压作用下屈曲的边界层理论[J]. 应用数学和力学,1988,9(6):515 - 528
Shen Huishen,Chen Tieyun. A boundary layer theory for the buckling of thin cylindrical shells under external pressure[J]. Applied Mathematics and Mechanics,1988,9(6):515 - 528(in Chinese)

[9] Chu K H,Krishnamoorthy G. Buckling of open cylindrical shells [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division,1967,93(2):177 - 205

[10] Chu K H,Turula P. Buckling of open cylindrical shells under axial load [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division,1970,96(6):1143 - 1156

[11] Yang T H,Guralnick S A. Buckling of axially loaded open shells [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division,1976,102(2):199 - 211

[12] Silver M J,Warren P,Hinkle J D,et al. Buckling of curved shells with free edges under multi-axis loading [R]. AIAA-2006-2100,2006

[13] Magnucka-Blandzi E,Magnucki K. Elastic buckling of an axially compressed open circular cylindrical shell [J]. Proc Appl Math Mech,2004,4(1):546 - 547

[14] Magnucki K,Maćkiewicz M. Elastic buckling of an axially compressed cylindrical panel with three edges simply supported and one edge free[J]. Thin-Walled Structures,2006,44(4):387 - 392

[15] Wilde R,Zawodny P,Magnucki K. Critical state of an axially compressed cylindrical panel with three edges simply supported and one edge free[J]. Thin-Walled Structures,2007,45(10 - 11):955 - 959

(编 辑:张 嵘)