Weibull 分布更新函数的指数近似算法

刘天华 张志华 李大伟 张光宇

(海军工程大学 兵器工程系, 武汉 430033)

摘 要: 针对 Weibull 分布的更新函数较难确定的问题,研究了在平均寿命相等情况下指数分布与 Weibull 分布之间的贴近性. 在此基础上,提出利用指数分布的更新函数模型计算 Weibull 分布的更新函数,能够比较方便有效地得到近似解. 通过实例计算,分别比较了指数方法(直接利用指数分布的更新函数)、线性加权模型以及几何加权模型等三种方法的精度. 结果表明:当时间较短时,线性加权和几何加权模型比指数方法精确度有所提高;当时间较长时,几何加权模型的精度较高. 利用该结论能够为工程应用提供方便.

关 键 词: 更新函数; 指数近似; 线性加权; 几何加权

中图分类号: TP 391.9

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2012)06-0816-03

Applications of exponential-approximate method with multi-resolution in spare requirement determination

Liu Tianhua Zhang Zhihua Li Dawei Zhang Guangyu

(Dept. of Weapon Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

Abstract: As to the fact that it is difficult to determine the renewal function (RF) of the Weibull distribution, the closeness between the two distributions with the same average life was studied. On this condition, the RF of exponential distribution was applied to compute that of the Weibull distribution, and the approximate solution would be gained expediently. Furthermore, the accuracy of the three methods was compared. That is, exponential method (The RF of the exponential), linear weight model and geometrical weight model respectively. The result shows that compared with the exponential method, the precision of the two models are highly enhanced when the time is short; and the precision of the geometrical weight model is still high when time is long. This conclusion would provide convenience for the engineering.

Key words: renewal function; exponential approximation; linearly weighted; geometrically weighted

更新过程(renewal process)是可靠性与维修性研究领域里的一项基本理论. 利用更新过程对部件或系统进行可靠性评估、可用度计算以及维修费用分析时,常常需要预测一段时间内的平均失效(更换)次数,这就涉及到更新函数(RF,Renewal Function)的确定问题. 然而,对于有些常见的分布族来说,如 Weibull 分布、Gamma 分布等,其更新函数的确定比较复杂,有时要得到明显的表达式也是比较困难的.

为此,学者们提出了一些近似方法或数值方法来计算 RF. 例如扩展三次样条算法(extended cubic splining algorithm)、生成函数算法(generating function algorithm)以及幂级数展开(power series expansion)等方法[1-3]. 但由于实施条件复杂、具有离散化误差或者计算量过大等原因,导致这些方法未能得到广泛的应用. 文献[4-5]利用累积分布函数和失效函数的线性加权或几何加权,对特征寿命内的更新函数进行近似,思路简

收稿日期: 2011-09-23; **网络出版时间**: 2012-06-15 15:44

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20120615.1544.040.html

基金项目: 总装预研资助项目(51327020105,51304010206); 海军工程大学博士生创新基金资助项目(HGBSJJ2011009)

作者简介: 刘天华(1984-),男,湖北南漳人,博士生,111navy@163.com.

单,精确度较高,但对于特征寿命处更新函数值的确定方法并没有明确给出,故仍然需要通过计算机模拟得到.

指数分布由于具有“无记忆性”以及与 Poisson 过程之间的关系,在可靠性理论与应用概率模型中有着非常重要的地位. 指数分布的更新函数形式简单,在已知其平均寿命的情况下能够直接得出结果. 因此,本文在研究指数分布与 Weibull 分布之间的紧密关系基础上,提出利用指数分布近似计算 Weibull 分布的更新函数. 进而结合更新函数的上下限——累积失效函数和累积分布函数进行线性加权或几何加权,能够比较方便得到更新函数的近似解,最后通过模拟验证其有效性.

1　Weibull 分布与指数分布的贴近性

工程中遇到的分布常常是非指数的. 由于这些分布并不具有“无记忆性”,给一些定性定量分析带来了不便. 很多情况下常常直接按指数分布来对待. 这样处理是否具有合理性,有必要进行研究. 首先需要研究这些寿命分布类的分布函数与指数分布的差异有多大.

对于 Weibull 分布 $F(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda t^{\beta}}$,指数分布 $G(t)=1-\mathrm{e}^{-\lambda' t}$,当两种分布具有相同的平均寿命时,即 $\mu=\frac{1}{\lambda^{1/\beta}}\Gamma(1+1/\beta)$,用 C_{d} 描述这两种分布函数大小的接近程度[3]

$$C_{\mathrm{d}}=\left[\int_0^{\infty}[F(t)-G(t)]^2\mathrm{d}t\right]^{1/2} \tag{1}$$

通过数值的方法评估 C_{d},将区间(0,1)划分成 $K+1$ 个子区间:$(0,p_1),(p_1,p_2),\cdots,(p_K,1)$,其中,$p_j=(j-0.5)/K, j=1,2,\cdots,K$. (p_j,p_{j+1}) 的中间值为 $m_j=j/K$. 则

$$t_{pj}=F^{-1}(pj),t_{mj}=F^{-1}(mj)$$

这样,式(1)可以通过下式近似计算

$$C_{\mathrm{d}}^2=\int_0^{\infty}[F(t)-G(t)]^2\mathrm{d}t\approx$$

$$\sum_{j=1}^{K-1}[F(t)-G(t)]^2(t_{p(j+1)}-t_{pj})$$

为不失一般性,取 $\lambda=1, K=50$,能够获得如图 1 的结果.

由图 1 可知,当 $\beta\in(0.6,3.3)$ 时,$C_{\mathrm{d}}<0.25$,此时指数分布与 Weibull 分布比较贴近,误差比较小. 实际上进一步还能证明当 $\beta>1$,且 $t<\mu$ 时,有 $F(t)\leqslant G(t)$.

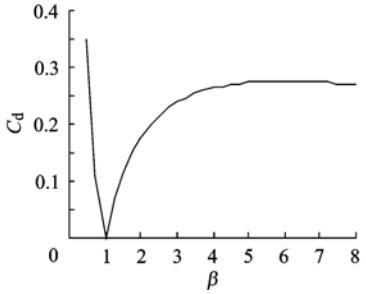


图 1　Weibull 分布与指数分布的逼近程度 C_{d} 与 β 关系

2　更新函数的指数近似算法

2.1　近似思想

对于寿命分布函数为 $F(t)$ 的部件,其累积失效函数(CHF, Cumulative Hazard Function)为 $H(t)$,则其失效率函数为 $r(t)=\mathrm{d}H(t)/\mathrm{d}t$. $F(t)$ 与 $H(t)$ 的关系为

$$F(t)=1-\mathrm{e}^{-H(t)}$$

$F(t)$ 的更新函数为

$$M(t)=\sum_{i=1}^{\infty}F^{(n)}(t) \tag{2}$$

其物理意义表示 $[0,t)$ 内的平均更新次数. 当 $F(t)$ 服从 Weibull 分布时,更新函数的计算是比较困难的. 实际上,更新函数还有另一种表达形式,即

$$M(t)=F(t)+\int_0^t M(t-x)f(x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

其中,$f(t)=\mathrm{d}F(t)/\mathrm{d}t$ 是概率密度函数.

由式(3)可知 $M(t)>F(t)$. 当 t 比较小时,后一项几乎等于 0,则

$$M(t)\approx F(t) \tag{4}$$

即 $F(t)$ 可以看作 $M(t)$ 的下限.

类似地,由于 $M(t)$ 的物理意义可以看作对于不可修产品,在完全更换条件下的平均故障次数;而 $H(t)$ 可以看作在最小维修条件下的平均故障次数. 显然最小维修的故障次数要大于完全替换时的故障次数,即 $M(t)<H(t)$. 当 t 比较小时,则有

$$M(t)\approx H(t) \tag{5}$$

即 $H(t)$ 可以看作 $M(t)$ 的上限.

由以上分析,结合 $M(t)$ 的上限和下限,能够对 $M(t)$ 进行近似计算.

2.2　指数近似方法

结合更新函数的上下限,采用以下两种模型近似计算 $F(t)$ 的更新函数 $M(t)$[4-5].

模型 1:线性加权模型

$$M(t)\approx pF(t)+qH(t)\triangleq M_1(t) \tag{6}$$

模型2:几何加权模型

$$M(t) \approx F(t)^x \cdot H(t)^y \triangleq M_2(t) \quad (7)$$

其中,p,q,x,y 是待确定参数,且满足 $p+q=1$, $x+y=1$.

在 $M(T)$ 已知的情况下,联立方程组

$$\left.\begin{aligned} M(T) &= M_1(T) = M_2(T) \\ p+q &= 1 \text{ 或 } x+y=1 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

即可确定参数 p,q,x,y. 从式(7)可以看出,只需要知道时刻 T 的更新函数值 $M(T)$,即可利用式(5)或式(6)对时间 T 以内的更新函数 $M(t)$ 进行近似计算.

当 $F(t)$ 服从 Weibull 分布时,其更新函数值 $M(T)$ 确定比较困难. 通过前面的研究发现,在形状参数 $\beta \in (0.6,3.3)$ 时,平均寿命相同的指数分布与 Weibull 分布函数比较接近,即 $F(t) \approx G(t)$. 那么,当时间 T 比较小时,会有 $F^{(n)}(t) \approx G^{(n)}(t)$. 也就意味着两种分布的更新函数会比较接近. 而指数分布的更新函数形式为

$$M'(t) = H(t) = \frac{t}{\mu} \quad (9)$$

显然,指数分布的更新函数形式简单,容易计算. 因此,利用指数分布的更新函数近似计算 Weibull 更新函数可以避免计算机模拟,便于工程应用. 具体的计算步骤如下:

1) 根据分布参数 (β,λ),确定平均寿命 $\mu = \frac{1}{\lambda^{1/\beta}}\Gamma(1+1/\beta)$,那么可求得 $M_a(T) \approx T/\mu$;

2) 利用式(8)计算 p,q 或 x,y;

3) 利用式(6)或式(7)求得 T 以内的更新函数值.

3 实例分析

下面通过实例验证第2节提出的 Weibull 更新函数的两种指数近似方法精确性.

为方便比较,可取 $F(t)$ 的平均寿命为 $\mu=1$,根据 β 的范围,可分别取参数为 $(\beta,\lambda)=(1.5,0.8577),(2.0,0.7854),(2.5,0.7415)$. 计算 $T=\mu=1$ 以及 $T=10$ 以内的更新函数值. 首先通过模拟的方法得到精确度较高的更新函数值 $M(t)$,然后分别采用两种模型进行近似计算,以及直接利用指数分布的更新函数式(9)(这里简称指数法)计算,结果如表1~表3所示.

从表1~表6中结果可以看出:

1) 当时间在平均寿命以内时(见表1~表3),两种近似计算模型结果与真实值比较接近,而指数方法得到的更新函数值则保守度较高;

2) 当时间比较长时,大于平均寿命时(见表4~表6),模型1即线性加权的结果会比真实值偏小,而模型2的近似效果与真实值比较接近.

表1 $(\beta,\lambda)=(1.5,0.8577)$, $T=1$ 以内

时间	$M(t)$	指数法结果	模型1结果	模型2结果
$T=0.2$	0.0769	0.2	0.0782	0.0778
$T=0.4$	0.2112	0.4	0.2281	0.2261
$T=0.5$	0.2853	0.5	0.3243	0.3210
$T=0.6$	0.3590	0.6	0.4339	0.4293
$T=0.8$	0.5380	0.8	0.6920	0.6866
$T=1$	0.7405	1	1	1

表2 $(\beta,\lambda)=(2.0,0.7854)$, $T=1$ 以内

时间	$M(t)$	指数法结果	模型1结果	模型2结果
$T=0.2$	0.0308	0.2	0.0319	0.0317
$T=0.4$	0.1135	0.4	0.1324	0.1309
$T=0.5$	0.1792	0.5	0.2124	0.2092
$T=0.6$	0.2601	0.6	0.3152	0.3096
$T=0.8$	0.4338	0.8	0.5983	0.5890
$T=1$	0.6160	1	1	1

表3 $(\beta,\lambda)=(2.5,0.7415)$, $T=1$ 以内

时间	$M(t)$	指数法结果	模型1结果	模型2结果
$T=0.2$	0.0129	0.2	0.0134	0.0133
$T=0.4$	0.0714	0.4	0.0783	0.0775
$T=0.5$	0.1235	0.5	0.1408	0.1386
$T=0.6$	0.1855	0.6	0.2305	0.2256
$T=0.8$	0.3634	0.8	0.5177	0.5061
$T=1$	0.5630	1	1	1

表4 $(\beta,\lambda)=(1.5,0.8577)$, $T=10$ 以内

时间	$M(t)$	指数法结果	模型1结果	模型2结果
$T=1$	0.7405	1	0.6730	0.7604
$T=2$	1.7441	2	1.433	1.8045
$T=4$	3.7234	4	3.0187	3.8319
$T=6$	5.7310	6	4.9983	5.8590
$T=8$	7.7375	8	7.3417	7.9173
$T=10$	9.7028	10	10	10

表5 $(\beta,\lambda)=(2.0,0.7854)$, $T=10$ 以内

时间	$M(t)$	指数法结果	模型1结果	模型2结果
$T=1$	0.6160	1	0.5721	0.6604
$T=2$	1.6324	2	1.2104	1.7917
$T=4$	3.6126	4	2.3425	3.8022
$T=6$	5.6296	6	4.1657	5.8327
$T=8$	7.6304	8	6.7182	7.9018
$T=10$	9.6125	10	10	10

表6 $(\beta,\lambda)=(2.5,0.7415)$, $T=10$ 以内

时间	$M(t)$	指数法结果	模型1结果	模型2结果
$T=1$	0.5630	1	0.5320	0.6064
$T=2$	1.5885	2	1.1086	1.8151
$T=4$	3.5983	4	1.8761	3.8041
$T=6$	5.5898	6	3.4818	5.8343
$T=8$	7.5871	8	6.1353	7.9026
$T=10$	9.5896	10	10	10

(下转第822页)

参考文献（References）

[1] Fielding A J, Davis C C. Tapered single-mode optical fiber evanescent coupling[J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2002, 14(1): 53 – 55

[2] 吴晨,李荣玉,殷宗敏,等. 单模光纤耦合器耦合系数影响因素的研究[J]. 光纤与电缆及其应用技术,2003(2):14 – 15
Wu Chen, Li Rongyu, Yin Zongmin, et al. Analysis of the factors affecting the coupling ratio of single mode fiber coupler[J]. Optical Fiber & Electric Cable, 2003(2): 14 – 15(in Chinese)

[3] 柳春郁,余有龙,高应俊. 熔锥型光纤耦合器损耗分析[J]. 激光杂志,2004,25(5):43 – 44
Liu Chunyu, Yu Youlong, Gao Yingjun. Analysis of the excess loss of fused-tapered optical fiber coupler[J]. Laser Journal, 2004, 25(5): 43 – 44(in Chinese)

[4] 魏秀珍,赵红,李勤,等. 保偏光纤耦合器波长耦合比研究[J]. 光纤与电缆及其应用技术,2008(1):41 – 42
Wei Xiuzhen, Zhao Hong, Li Qin, et al. Research of wavelength dependent coupling ratio of PM fiber coupler[J]. Optical Fiber & Electric Cable, 2008(1): 41 – 42(in Chinese)

[5] 李绪友,杨汉瑞,杨建华,等. 光纤耦合器稳定性分析及对光纤陀螺的影响[J]. 中国惯性技术学报,2010,18(2):246 – 250
Li Xuyou, Yang Hanrui, Yang Jianhua, et al. Analysis of stability of optical fiber coupler splitting ratio and its influence on FOG [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2010, 18(2): 246 – 250(in Chinese)

[6] Lee S H, Song K Y, Kim B Y. Fused bitapered single-mode fiber directional coupler for core and cladding mode coupler[J]. IEEE Photonics Technology Letters, 2005, 17(12): 2631 – 2633

[7] Yang Yuanhong, Wu Di. Experimental study on fused fiber coupler[C]// Liu Jian, Wang Zhigong. Fiber Optics and Optoelectronics for Network Applications. Nanjing, China: SPIE, 2001, 4603: 6 – 9

[8] 杨学礼,王学峰,张蔚. 单模光纤耦合器的偏振温度特性研究[J]. 光子学报,2009,38(4):841 – 846
Yang Xueli, Wang Xuefeng, Zhang Wei. Polarization-temperature characteristic of single-mode fiber coupler[J]. Acta Photonica Sinica, 2009, 38(4): 841 – 846(in Chinese)

[9] Salazar D, F lix M A, Valenzuela J, et al. Fused fiber optics couplers[C]// Brudny V L, Ledesma S A, Marconi M C. 4th Iberoamerican Meeting on Optics and 7th Latin American Meeting on Optics, Lasers, and Their Applications. Tandi, Argentina: SPIE, 2001, 4419: 330 – 333

[10] Anjan Y, Habbel S. Environmental performance of fused PM fiber couplers for fiber gyro Application[J]. IEEE, Photonics Technology Letters, 1991, 3(6): 578 – 580

[11] 刘新宇. 熔锥型单模光纤耦合器的传感特性研究[D]. 广东:暨南大学物理系,2006
Liu Xinyu. The sensitive characteristic of fused-tapered single mode fiber coupler[D]. GuangHong: Department of Physics, Ji'nan University, 2006(in Chinese)

[12] Lefèvre H C. The fiber-optic gyroscope[M]. London: Artech House, 1993

（编　辑:刘登敏）

（上接第 818 页）

4 结　论

利用指数分布模型近似计算 Weibull 分布的更新函数是比较方便的,两种模型的使用时机是:①当精确度要求较低时,直接利用指数方法进行近似计算;②当精确度要求较高,且时间较短时,可利用线性加权或几何加权进行近似计算;③当精确度要求较高,且时间较长时,可利用几何加权模型进行近似计算.

类似地,对于其它分布如对数正态分布以及 Gamma 分布等更新函数计算比较复杂的寿命分布同样可通过指数分布的近似方法来解决.

参考文献（References）

[1] Eric Smeitink, Rommert Dekker. A simple approximation to the renewal function[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1990, 39(1): 71 – 75

[2] McConalogue D J. Numerical treatment of convolution integrals involving distributions with densities having singularities at the origin[J]. Communications in Statistics, 1981, B10: 265 – 280

[3] Jiang R. A Gamma-normal series truncation approximation for computing the Weibull renewal function[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2008, 93: 616 – 626

[4] Jiang R. A simple approximation for the renewal function with an increasing failure rate[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2010, 95: 963 – 969

[5] Jiang R. A simple approximation for the Weibull renewal function [C]//Proceedings of the 2009 IEEE IEEM. Hong Kong: IEEE, 2009: 1146 – 1149

（编　辑:娄　嘉）