守恒律方程的导数人工压缩法

董海涛 刘福军 韩 冲

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 将高分辨率差分格式用于守恒律方程的导数方程,可以克服传统高分辨率格式在极值点精度退化的缺点,类似于 Harten 的人工压缩法,新方法称为导数人工压缩法. 本方法既能提高间断的分辨率,又能提高极值点处的分辨率,是一种高分辨率低耗散低扩散格式. 用单个守恒律方程带间断和多极值的初值问题和一维激波管问题进行了验证,比较了 Harten-TVD,人工压缩,导数人工压缩方法的在间断和极值点的分辨率问题.

关 键 词: 守恒律; 高分辨率; 差分格式; TVD 格式; 人工压缩; 导数人工压缩

中图分类号: O 35

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2012)07-0966-05

Derivative artificial compression method of conservation laws

Dong Haitao Liu Fujun Han Chong

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Applying high resolution difference schemes on the derivative equations of conservation laws could overcome the shortcoming of accuracy decay at extreme points that has plagued almost all high resolution schemes. Similar to Harten's artificial compression method, the new method is called derivative artificial compression method, which has high resolution, low dissipation and low diffusion properties, and could enhance the resolution(of numerical solution) both at discontinuities and at extreme points. Numerical experiments are implemented on a single conservation law with initial values of discontinuities and extremes, and on one dimensional shock tube problem. The resolution problem of discontinuities and extremes is compared with Harten's TVD scheme, artificial compression method and derivative artificial compression method.

Key words: conservation laws; high resolution; difference schemes; TVD; artificial compression; derivative artificial compression

流体力学方程组解的间断性在早期是一个主要难点,所有二阶以上的经典格式(如 Lax-Wendroff 格式)在激波等间断处会不可避免地出现伪振荡. 之后,由于 TVD(Total Variation Diminishing)判据及限制器技术的出现,产生了一批无振荡高精度格式,如 TVD, ENO(Essentially Non-oscillatory), NND(Non-Oscillatory and Non-free-parameter Dissipation), 无振荡紧致格式、熵条件格式等,统称为高分辨率格式,对激波的模拟取得了较好结果. 许多复杂流动问题,流动参数变化剧烈,除可能存在激波间断外,还有带极值点的涡结构等,尤其对低速问题(定常)没有激波间断,更多的(高雷诺数)是极值点. 而现有高分辨率格式若严格要求无振荡,则都存在极值点精度退化问题,为了更好地模拟复杂流动问题,须考虑提高极值点处的精度. 目前,对这个问题的研究还较少,本文提出的导数人工压缩,就是为了解决 20 世纪 80 年代以来这些高阶格式在极值点降阶的问题,以提高对极值点的分辨率. 本文先进行了导数人工压缩方法的推导,并构造了人工压缩和导数人

收稿日期: 2011-05-17; **网络出版时间**: 2012-06-29 20:20

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20120629.2020.005.html

基金项目: 国家重大基础研究发展计划(973 计划)资助项目; "大型风力机的空气动力学基础研究"(2007CB714600)

作者简介: 董海涛(1963 -),男,北京人,副教授, htdong@buaa.edu.cn.

工压缩结合的混合格式,然后用单个标量方程的多极值间断初值问题和 Shu-Osher 激波管算例进行了数值验证,极值点处的精度得到较好的改善.

1　导数人工压缩法的思想和推导

1977 年文献[1]提出人工压缩方法并在 1983 年用于 Harten-TVD[2]格式,以提高接触间断分辨率,本文受此启发,获得了导数人工压缩方法构造思路. 考虑守恒律方程初值问题

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in R \end{cases} \tag{1}$$

1.1　Harten 的人工压缩法

Harten 的原始二阶 TVD 格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{f}_{j-\frac{1}{2}})$$

$$\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)}{2} + \frac{g_j + g_{j+1}}{2} - \frac{1}{2}\frac{h}{\tau} \cdot |\nu_{j+\frac{1}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}}| \Delta_{j+\frac{1}{2}} u^n$$

$$g_j = \min \mathrm{mod}\left((|\nu_{j-\frac{1}{2}}| - \nu_{j-\frac{1}{2}})^2)\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n, (|\nu_{j+\frac{1}{2}}| - \nu_{j+\frac{1}{2}})^2)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n\right)$$

$$\gamma_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \dfrac{g_{j+1} - g_j}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n} & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n \neq 0 \\ 0 & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n = 0 \end{cases}$$

$$\nu_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{h}a(u_j^n, u_{j+1}^n)$$

$$a(u_j^n, u_{j+1}^n) = \begin{cases} \dfrac{f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n)}{\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n} & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n \neq 0 \\ f_u\left(\dfrac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}\right) & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n = 0 \end{cases}$$

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}}u = u_{j+1} - u_j \tag{2}$$

其中绝对值号 Harten 原格式为 $Q(\nu)$[1],因其增加数值粘性,并且已有严格熵条件方法[3],本文忽略这种近似熵修正.

人工压缩法既给原通量加一具有收缩特征场的小通量(人工压缩通量),使特征线平行的线性(退化)场变成非线性压缩场,从而抑制数值耗散,达到提高(接触)间断分辨率的目的(不同于提高精度).

Harten 人工压缩通量的构造方法为:通过引入人工压缩通量 g_j^c 增加间断左端的特征速度,减小间断右端的特征速度,从而把原特征场变成压缩场[1],将原格式的 g_j 按如下公式替换,即可得到带人工压缩的 Harten-TVD 格式

$$g_j = g_j + \theta_j g_j^c$$

$$g_j^c = \min \mathrm{mod}\left((1 - |\nu_{j-\frac{1}{2}}|)\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n, (1 - |\nu_{j+\frac{1}{2}}|)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n\right)$$

其中 $$\theta_j = \frac{|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n - \Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n|}{|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n| + |\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n|}$$

1.2　导数人工压缩法

原方程用人工压缩可以提高接触间断的分辨率[1-2],那么如果对原方程关于 x 求导得到的导数方程用人工压缩,就可以改善导数方程的间断处的分辨率,也就是原方程极值点处的分辨率. 将守恒律方程式(1)写成非守恒型即拟线性形式,并在 x 方向求一次导数后变为如下形式(导数方程):$u_t' + (a(u)u')_x = 0$,其中 $u' = u_x$,该方程的通量为 $a(u)u'$,通过将 $a(u)$ 中的 u 当作常数,将此通量线化(非守恒地线化,不同于守恒方法中对通量的线化),加入非线性项,引入人工压缩通量,最后得数值通量:$f^{\#}(u') = au' + g^c(u')$. 将导数方程积分还原成原守恒量的方程:$u_t + f^{\#}(u_x) = 0$,即 $u_t + (au_x + g^c(u_x)) = 0$. 其中,$a(u)$ 中的 u 因为线化而固定,故在构造格式时局部只做常数处理;$g^c(u')$ 为人工压缩通量,本文采用 Harten 构造的人工压缩通量. 这种方程的格式只有一个数值通量,为非守恒型:$u_j^{n+1} = u_j^n - \tau\tilde{f}_j^{\#}$. 只要把普通格式的数值通量用到通量 $f^{\#}(u')$ 上即可. 例如五点格式

$$\tilde{f}_j^{\#} = \tilde{f}^{\#}(u'_{j-\frac{3}{2}}, u'_{j-\frac{1}{2}}, u'_{j+\frac{1}{2}}, u'_{j+\frac{3}{2}}) = \tilde{f}^{\#}\left(\frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{h}, \frac{u_j - u_{j-1}}{h}, \frac{u_{j+1} - u_j}{h}, \frac{u_{j+2} - u_{j+1}}{h}\right)$$

值得注意的是这个格式是非守恒形式,只能用在原函数连续的地方,不能用于间断处. 即使线性方程也不能在间断处用导数方程,因为间断的导数为无穷,这种情况使用数值格式误差非常大. 最后综合起来,数值方法用到两种途径推导的格式,需要研究一下如何匹配好.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - (1 - \theta)\frac{\tau}{h}(\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} - \tilde{f}_{j-\frac{1}{2}}) - \theta\tau\tilde{f}_j^{\#} \tag{3}$$

1.3　导数人工压缩法守恒修正

在计算中发现,对于非线性场有时甚至线性场,非守恒部分常常导致数值解的间断有明显相位误差. 如,用于激波管问题中时发现激波位置计算得不准确,非守恒通量权数 θ 越大,激波位置偏差越大. 因此,本文又进行了守恒修正,用守恒格式的一阶部分的主要项代替非守恒格式的一阶部分的主要项,这样导数方程的数值通量的非守恒

部分是个小量,是近似守恒. 将数值通量分为主要部分与小量部分

$$\left.\begin{aligned}\tilde{f}_{j+\frac{1}{2}} &= f_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(1)} + g_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta)}\\ \tilde{f}_j^{\#} &= f_j^{\#\mathrm{O}(1)} + g_j^{\#\mathrm{O}(\Delta)}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中

$$g_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta)} = \frac{g_j + g_{j+1}}{2} - \frac{h}{2\tau}\left|\nu_{j+\frac{1}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}}\right|\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n$$

$$g_j^{\#\mathrm{O}(\Delta)} = \frac{g_{j-\frac{1}{2}}^{\#} + g_{j+\frac{1}{2}}^{\#}}{2} - \frac{h}{2\tau}\left|\nu_j^{\#} + \gamma_j^{\#}\right|\frac{\Delta_j^2 u^n}{h}$$

$$g_j = \min\ \mathrm{mod}\left((|\nu_{j-\frac{1}{2}}| - \nu_{j-\frac{1}{2}})^2\right)\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n,\ (|\nu_{j+\frac{1}{2}}| - \nu_{j+\frac{1}{2}})^2)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n\Big) + \theta_j\min\ \mathrm{mod}\left((1 - |\nu_{j-\frac{1}{2}}|\right)\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n,\ (1 - |\nu_{j+\frac{1}{2}}|)\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n\Big)$$

$$g_{j+\frac{1}{2}}^{\#} = \min\ \mathrm{mod}\left((|\nu_j^{\#}| - \nu_j^{\#})^2\right)\frac{\Delta_j^2 u^n}{h},\ (|\nu_{j+1}^{\#}| - \nu_{j+1}^{\#})^2)\frac{\Delta_{j+1}^2 u^n}{h}\Big) + \theta_j\min\ \mathrm{mod}((1 - |\nu_j^{\#}|\frac{\Delta_j^2 u^n}{h}, (1 - |\nu_{j+1}^{\#}|)\frac{\Delta_{j+1}^2 u^n}{h})$$

$$\frac{\Delta_j^2 u^n}{h} = \frac{\Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n}{h} - \frac{\Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n}{h} \tag{5}$$

式(3)其余记号同式(2),守恒修正后格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}(f_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(1)} - f_{j-\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(1)}) + (1-\theta)\frac{\tau}{h}(g_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta)} - g_{j-\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta)}) - \theta\tau g_j^{\#\mathrm{O}(\Delta)} \tag{6}$$

其中

$$\frac{f_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(1)} - f_{j-\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(1)}}{h} = \frac{\frac{f(u_j^n) + f(u_{j+1}^n)}{2} - \frac{f(u_{j-1}^n) + f(u_j^n)}{2}}{h} = \frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

$$f_j^{\#\mathrm{O}(1)} = a(u_j)\frac{\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}}{2} = a(u_j)\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

$$\theta = \begin{cases}\theta & \Delta_{j+\frac{1}{2}}u^n \cdot \Delta_{j-\frac{1}{2}}u^n < 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{7}$$

上述两者主部替换之后,相当于用$\frac{f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)}{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}$替换了$a(u_j)$,这是二阶精度的替换,本文这样处理是可行的,后面的计算结果也很好地说明了这一点. 假设两种通量都已加入人工压缩项,数值格式用于这两种通量线性情形,就分别起到人工压缩和导数人工压缩效果.

1.4 方程组的导数人工压缩

导数人工压缩格式可按特征方向单个化的方法推广于双曲型守恒律方程组

$$\boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})_x = 0$$

方程组的导数人工压缩格式为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{u}_j^{n+1} &= \boldsymbol{u}_j^n - \frac{\tau}{h}(\boldsymbol{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(1)} - \boldsymbol{f}_{j-\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(1)}) + (1-\theta)\frac{\tau}{h}(\boldsymbol{g}_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta)} - \boldsymbol{g}_{j-\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta)}) - \theta\tau\boldsymbol{g}_j^{\#\mathrm{O}(\Delta)}\\ \boldsymbol{f}_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(1)} &= \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_j^n) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_{j+1}^n)}{2}\\ \boldsymbol{g}_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta)} &= \sum_k \boldsymbol{r}_{j+\frac{1}{2}}^k(g_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta),k})\\ \boldsymbol{g}_j^{\#\mathrm{O}(\Delta)} &= \sum_k \boldsymbol{r}_j^k(g_j^{\#\mathrm{O}(\Delta),k})\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$g_{j+\frac{1}{2}}^{\mathrm{O}(\Delta),k} = \frac{g_j^k + g_{j+1}^k}{2} - \frac{h}{2\tau}\left|\nu_{j+\frac{1}{2}}^k + \gamma_{j+\frac{1}{2}}^k\right|\boldsymbol{l}_{j+\frac{1}{2}}^k\Delta_{j+\frac{1}{2}}\boldsymbol{u}^n$$

$$g_j^{\#\mathrm{O}(\Delta),k} = \frac{g_{j-\frac{1}{2}}^{\#,k} + g_{j+\frac{1}{2}}^{\#,k}}{2} - \frac{h}{2\tau}\left|\nu_j^{\#,k} + \gamma_j^{\#,k}\right|\boldsymbol{l}_j^k\frac{\Delta_j^2\boldsymbol{u}^n}{h}$$

其中$\boldsymbol{l}_j^k, \boldsymbol{l}_{j+\frac{1}{2}}^k$和$\boldsymbol{r}_j^k, \boldsymbol{r}_{j+\frac{1}{2}}^k$是相应节点上通量雅可比矩阵$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{f}_u(u)$(半点处为 Roe 平均)对应于第 k 特征的左右特征向量,未说明记号按单个情形式(5)~式(7)定义. 式(8)为本文提出的用于双曲型守恒律(Euler 方程)的导数人工压缩格式的最终形式.

2 算例验证

单个方程算例取线性通量$f(u) = u$. 方程组算例为一维完全气体 Euler 方程

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ E\end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix}\rho u\\ \rho u^2 + p\\ u(E+p)\end{pmatrix}_x = 0$$

$$p = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho u^2)$$

算例 1 极值间断算例

初值条件

$$u(x,0) = \begin{cases}4(x+1) & -1 \leqslant x \leqslant -0.75\\ -4(x+0.5) & -0.75 \leqslant x \leqslant -0.25\\ -1 & -0.25 \leqslant x \leqslant 0\\ 1 & 0 \leqslant x \leqslant 0.25\\ 4(0.5-x) & 0.25 \leqslant x \leqslant 0.75\\ -4(1-x) & 0.75 \leqslant x \leqslant 1\end{cases}$$

计算时间为 2,计算网格为 100,CFL 数为 0.5,格式混合参数 $\theta = 0.12$. 分别采用 Harten-

TVD格式(原格式)、带人工压缩的 Harten-TVD 格式(人工压缩)和本文新格式(导数人工压缩)进行计算,结果如图 1 所示. 可以看出,原格式在间断处和极值点处抹光都很厉害,人工压缩在极值点处和间断处相对于原格式都有明显改善. 导数人工压缩在间断处同人工压缩格式重合,在极值点处导数人工压缩比人工压缩格式更接近于精确解.

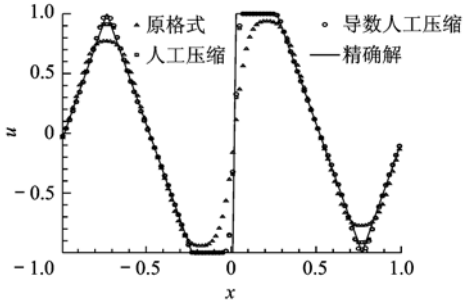


图 1　单个方程间断问题的数值解

算例 2　极值间断相邻算例[4]

初值条件

$$u(x,0) = \begin{cases} -x\sin(3\pi x^2/2) & -1 \leqslant x \leqslant -1/3 \\ |\sin(2\pi x)| & |x| \leqslant 1/3 \\ 2x - 1 - \dfrac{1}{6}\sin(3\pi x) & 1/3 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

计算时间为 0.5,计算网格为 100,CFL 数为 0.3,格式混合参数 $\theta = 0.4$. 所采用的格式同上,在图 2 中也可以看出人工压缩和导数人工压缩在间断和极值点处的作用.

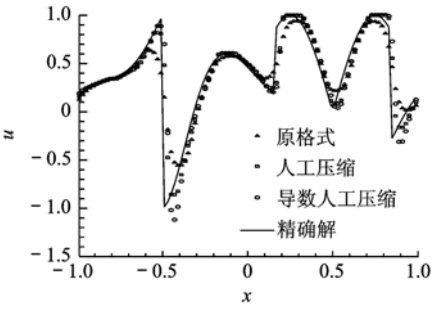


图 2　单个方程极值间断相邻的数值解

算例 3　多极值算例

初值条件

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left((3x)^2+\frac{\cos(100x)}{2}\right)}$$

$$x \in [-1,1] \pm 2n \quad n = 0,1,2,\cdots$$

计算时间为 2,计算网格 260,CFL 数为 0.3,仍然采用上述 3 种格式,格式混合参数 θ 取 0.07. 计算结果如图 3、图 4 所示. 此算例显示原格式完全失去对脉动波的分辨能力,人工压缩可以分辨出脉动但有较大误差,而本文提出的导数人工压缩则可以很小的误差分辨脉动.

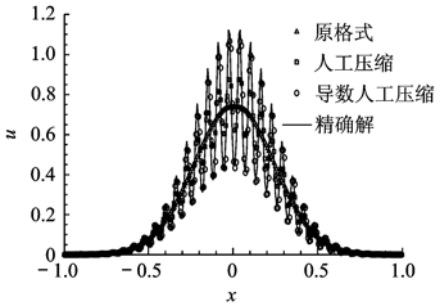


图 3　单个方程多极值问题的数值解

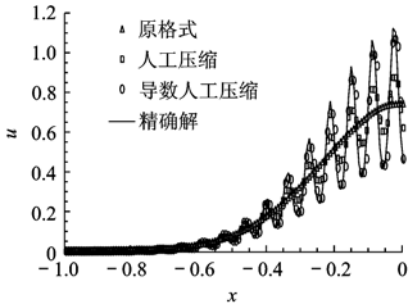


图 4　单个方程多极值问题的数值解局部放大图

算例 4　振荡激波管算例

文献[5]中构造了初始值一端有密度脉动的激波管算例,初值条件为

$$(\rho,u,p) = \begin{cases} (3.857\,143, 2.629\,369, 10.333\,3) & -5 \leqslant x < -4 \\ (1 + 0.2\sin 5x, 0, 1) & -4 \leqslant x \leqslant 5 \end{cases}$$

此算例没有精确解,本文采用 10 000 网格上的 TVD 格式的解作为精确解,用 400 网格上的计算结果进行比较. CFL 数为 0.8,计算时间为 1.8,格式混合参数 θ 取 0.04,计算结果如图 5 所示.

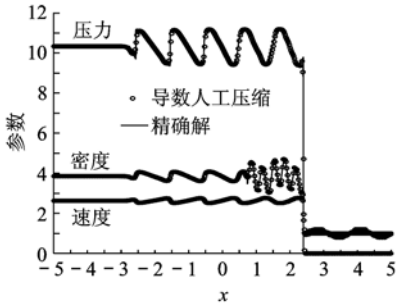


图 5　导数人工压缩计算结果与精确解的比较

为显示新方法的优点,以密度图为例,对不同格式进行对比,同时显示计算过程发现的问题. 图 6 显示的是 Harten 人工压缩过压缩造成的阶梯现象,本文按照文献[6]的方法,只在线性场中进行压缩明显改善了这个现象. 图 7 是格式(3)计算的 Shu-Osher 算例密度图,因格式的非守恒性造成的激波位置的偏移很明显,可以看出,随着非守

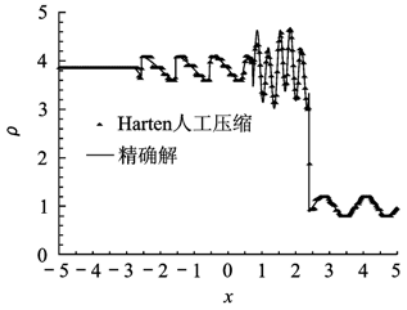


图6 Harten人工压缩与精确解的比较

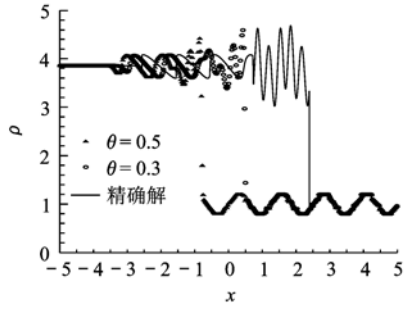


图7 未做守恒修正时的计算结果与精确解的比较

恒数值通量$\tilde{f}^{\#}$的增大,激波位置的偏移越大来越大,这种偏移在使用守恒修正(式(4)~式(6))后消除. 从图8、图9可以看出,采用人工压缩格式的解在极值处比原始格式要好得多,导数人工压缩格式在极值处的解又比人工压缩的格式有明显改善. 导数人工压缩格式在极值点不再受TVD或保单调限制,但仍受保凸性限制,故仍然严格满足无振荡条件.

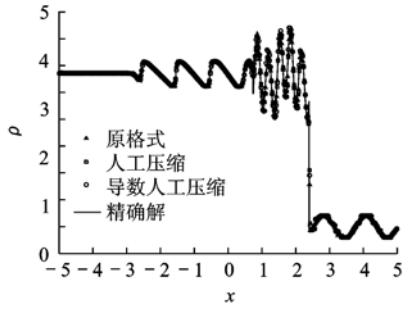


图8 三种格式的密度图比较

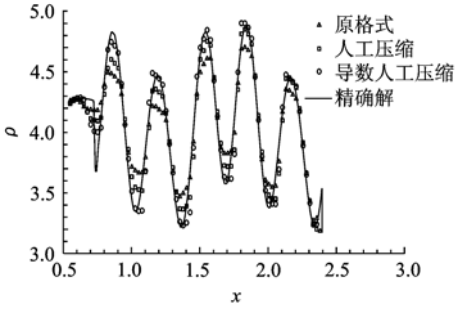


图9 三种格式密度分布局部放大图比较

2.4 格式混合参数θ的选取

由于本文构造的新格式压缩性较大,作为导数人工压缩权重的混合参数θ都很小,综合几个算例来看都在0.1附近,算例2中取值为0.4,注意到精确解中有两处同时存在间断和极值,为了抵消由此带来的双重数值耗散,所以取值有所偏大. 而算例1和算例4中尽管也存在间断和极值,但不在同一点出现,因此数值耗散没有那么大,所以θ取值较小. 关于混合格式的研究近年来已有不少学者进行了研究,如文献[7-8]等. 本文对混合参数的详细研究会在后续的工作中进行.

3 结 论

比较上述数值实验,可以看出人工压缩方法比原TVD格式在间断处和极值点处都提高了分辨率,本文发展的导数人工压缩格式又比人工压缩方法在极值点处提高了分辨率. 当脉动多而网格不够密时,一般格式可能会完全或部分丧失对脉动的分辨力,本文提出的导数人工压缩法则能在相同情形较准确地分辨脉动,这种特性对于网格数不能太大的三维流体计算很有价值,特别是对脉动比较多的流场(如湍流)更有价值.

参考文献(References)

[1] Harten A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1977, 30(5): 611-638

[2] Harten A. High resolution schemes for hypersonic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 1983, 49(2): 357-393

[3] Dong Haitao, Zhang Lidong, Lee Chun-Hian. High order discontinuities decomposition entropy condition schemes for Euler equations [J]. Computational Fluid Dynamics Journal, 2002, 10(4): 448-457

[4] Harten A, Osher S. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes [J]. SIAM J Numer Anal, 1987, 24(2): 279-309

[5] Shu C W, Osher S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes Ⅱ [J]. Journal of Computational Physics, 1989, 83(1): 32-78

[6] Lie K A, Noelie S. On the artificial compression method for second-order non-oscillatory central difference schemes for systems of conservation laws [J]. SIAM J Sci Comput, 2003, 24(4): 1157-1174

[7] Ren Y X, Liu M E, Zhang H X. A characteristic-wise hybrid compact-WENO scheme for solving hyperbolic conservation laws [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 192(2): 365-386

[8] Ziegler J L, Deiterding R, Shepherd J E, et al. An adaptive high-order hybrid scheme for compressive, viscous flows with detailed chemistry [J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(20): 7598-7630

(编 辑:李 晶)