三维引力辅助机理分析

贾建华 王 琪

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 针对星际探测中的引力辅助技术,通过引入两个参数,将平面椭圆型限制性三体模型拓展到三维椭圆型限制性三体模型. 通过逆向与正向积分,得到引力辅助前后飞行器的能量和角动量,据此将引力辅助轨道划分为 16 种类型. 深入讨论了这两个参数对轨道类型、轨道能量和轨道倾角的影响,总结出了相应的变化规律. 以地月系统为例,针对不同任务要求,给出了通过月球引力辅助,实现地月系统俘获与逃逸的引力辅助参数的选择区域,并对引力辅助参数进行了优化.

关 键 词: 三维椭圆型限制性三体问题; 引力辅助; 俘获; 逃逸

中图分类号: V 41

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2012)07-0981-06

Analysis of gravity-assist mechanism based on three-dimension elliptic restricted three-body model

Jia Jianhua Wang Qi

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: A three-dimension elliptic restricted three-body model for the gravity-assist technology in interplanetary exploration was developed based on the planar elliptic restricted three-body model by introducing two extra parameters. By using integrated backward and integrated forward method, the energies and angular momentums of the spacecraft before and after the gravity-assist were obtained. Thus, the orbits can be divided into sixteen different types. The influences of the two extra parameters on the orbit of spacecraft were discussed and the variation laws were summarized. With the Earth-Moon system as an example, the selection region of gravity-assist parameters that can achieve escape and captive was calculated. In addition, the gravity-assist parameters were optimized.

Key words: three-dimension elliptic restricted three-body model; gravity-assist; captive; escape

引力辅助技术(gravity-assist),又称借力飞行或引力甩摆,是一种航天任务中经常用来减少燃料消耗的方法. 目前已经有多个任务利用引力辅助技术设计了行星际探测轨道,完成了太阳系八大行星的探测任务[1].

引力辅助技术起源于 18 世纪, Laplace、leverrier、Tisserand 用此来解释行星对彗星轨道的摄动,Lawden 首先提出可将引力辅助技术应用于飞行器[2]. 目前对引力辅助技术的研究主要集中在应用方面,如引力辅助序列的选取[3-4]、小推力引力辅助的研究[5-6]、气动引力辅助的研究[7-8],而对引力辅助机理本身的探讨和研究较少. 1988 年文献[9]对二维引力辅助机理进行了分析,给出了前侧飞越使飞行器能量减少、后侧飞越使飞行器能量增加等重要结论,揭开了人类对引力辅助机理认识的新篇章,但讨论仅限于平面圆型限制性三体问题. 1997 年文献[10]采用平面椭圆型限制性三体模型对引力辅助机理进行了深入研

收稿日期: 2011-03-29; **网络出版时间**: 2012-05-22 16:03

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20120522.1603.011.html

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10832004)

作者简介: 贾建华(1987-),男,山西临汾人,博士生,jjh19870911@163.com.

究,结果表明,偏心率和真近点角对引力辅助轨道具有重要影响. 文献[11 -12]也对基于平面限制性三体问题模型的引力辅助机理进行了一些讨论. 以上的研究都只限于二维引力辅助,飞行器运动被限制在借力天体的运动平面内,这显然不能满足实际任务的需要. 目前,对三维引力辅助机理的研究尚不多见,文献[13]初步讨论了面外角对引力辅助轨道的影响,但是,对面外角的研究较为简略,而且对飞行器近心点速度有一定限制,因此需要对三维引力辅助机理进行进一步的研究.

为此,本文在前人研究工作的基础上,通过引入两个参数,将对引力辅助机理的探讨从平面椭圆型限制性三体模型拓展到三维椭圆型限制性三体模型,重点讨论了这两个参数对引力辅助前后的飞行器轨道类型、轨道能量和轨道倾角的影响. 最后,以地月系统为例,针对不同任务要求,给出了引力辅助参数的选择区域,并对引力辅助参数进行了优化.

1 问题描述

在三维椭圆型限制性三体模型下,三维引力辅助可通过 6 个自由参数来描述(如图 1 所示):①V_p:飞越借力天体时近心点处的速度;②r_p:飞越借力天体时近心点距离;③ν:借力天体的真近点角;④ψ:r_p 在 x-y 平面的投影与 M_1,M_2 连线的夹角;⑤α:r_p 与 x-y 平面的夹角;⑥β:V_P 与 x-y 平面的夹角.

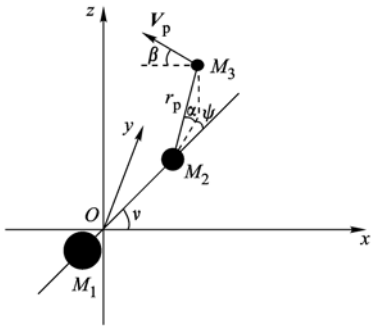


图 1 三维椭圆型限制性三体模型引力辅助示意图

2 三维椭圆型限制性三体模型

假设两个主天体分别为 M_1 和 M_2,绕其公共质心做椭圆运动,第三体 M_3(本文中为飞行器)的质量远远小于两个主天体的质量,在两个主天体的作用下运动,而不影响两个主天体的运动. M_3 的运动轨迹不限于两个主天体的运动平面内,可以是三维的.

为了讨论和计算上的方便,采用无量纲形式,定义:以 M_1 和 M_2 相对轨道的半长轴为单位长度 1;平均角速度为 1;单位质量为 $m_1 + m_2$,其中,m_1,m_2 分别是 M_1 和 M_2 的真实质量,这样,M_2 的质量可以用 $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ 表示,M_1 的质量为 $(1-\mu)$;定义单位时间,使得主天体的运动周期为 2π;M_1-M_2 系统的引力常数(万有引力常数 $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ 与系统总质量的乘积)定义为 1.

用于分析此模型的参照系有很多,本文采用惯性坐标系. 在惯性系中,坐标原点为 M_1 和 M_2 的公共质心;横轴 x 是初始时刻连接 M_1 和 M_2 的连线;纵轴 y 过原点垂直于 x 轴并且在两个主天体的运动平面内;z 轴符合右手定则. 在此参考系中,M_1 和 M_2 的位置分别为

$$x_1 = -\mu r\cos\nu \qquad y_1 = -\mu r\sin\nu$$
$$x_2 = (1-\mu)r\cos\nu \qquad y_2 = (1-\mu)r\sin\nu$$

其中,$r = (1-e^2)/(1+e\cos\nu)$,为 M_1 和 M_2 间的距离;ν 为 M_2 的真近点角;e 为椭圆轨道的偏心率.

M_3 的动力学方程可表示为

$$\ddot{x} = -(1-\mu)(x-x_1)/r_1^3 - \mu(x-x_2)/r_2^3 \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -(1-\mu)(y-y_1)/r_1^3 - \mu(y-y_2)/r_2^3 \tag{2}$$

$$\ddot{z} = -(1-\mu)z/r_1^3 - \mu z/r_2^3 \tag{3}$$

其中,r_1,r_2 分别为 M_3 到 M_1 和 M_2 的距离.

$$r_1^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2$$
$$r_2^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2) + z^2$$

此外,时间和真近点角的关系为

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} = p^{1/2}/r^2 \tag{4}$$

其中,$p = a(1-e^2)$,为椭圆的半正交弦.

可以求解出此惯性系下,M_3 的能量 E_I 和角动量 $\boldsymbol{C}_I$ 分别为

$$E_I = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2 - (1-\mu)/r_1 - \mu/r_2 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{C}_I = \boldsymbol{R}_I \times \boldsymbol{V}_I = (-\dot{y}z + \dot{z}y)\boldsymbol{i} + (\dot{x}z - \dot{z}x)\boldsymbol{j} + (-\dot{x}y + \dot{y}x)k \tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{R}_I$ 是 M_3 的矢径;$\boldsymbol{V}_I$ 是 M_3 的速度向量. 则 M_3 的轨道倾角 $i = \arccos(C_{Iz}/|\boldsymbol{C}_I|)$,其中,$C_{Iz}$ 为 $\boldsymbol{C}_I$ 的 z 轴分量.

3 数值算法

由于椭圆型限制性三体问题目前无法得到轨道变化的解析表达式,所以只能通过数值积分进

行分析. 数值算法流程如下:

1) 给参数 $V_p, r_p, \nu, \psi, \alpha, \beta, e, \mu$ 赋初值.

2) 计算 M_3 的初始位置和初始速度:

$$X_i = (1-\mu) r\cos\nu + r_p\cos\alpha\cos(\psi+\nu)$$

$$Y_i = (1-\mu) r\sin\nu + r_p\cos\alpha\sin(\psi+\nu)$$

$$Z_i = r_p\sin\alpha$$

$$\dot{X}_i = V_r\cos\nu - V_t\sin\nu - V_p\cos\beta\sin(\psi+\nu)$$

$$\dot{Y}_i = V_r\sin\nu + V_t\cos\nu + V_p\cos\beta\cos(\psi+\nu)$$

$$\dot{Z}_i = V_p\sin\beta$$

其中, $V_r = (1-\mu) e\sin\nu/\sqrt{1-e^2}$, 为 M_2 相对于惯性坐标系的速度的径向分量; $V_t = (1-\mu)(1+e\cos\nu)/\sqrt{1-e^2}$, 为 M_2 相对于惯性坐标系的速度的横向分量; 此外, $\dot{\nu} = a^{1/2}(1+e\sin\nu)^2/(1-e^2)^{3/2}$.

3) 在初始条件下, 对动力学方程进行向前积分, 直到 M_3 与 M_2 的距离大于指定距离 d 时停止. 计算出引力辅助之后飞行器的能量 E_+ 和角动量 C_+.

4) 在初始条件下, 对动力学方程进行向后积分, 直到 M_3 与 M_2 的距离大于指定距离 d 时停止. 计算出引力辅助之前飞行器的能量 E_- 和角动量 C_-.

本文所有数值模拟, 指定距离 d 都为 0.5, 通过变化参数的初值, 可以研究参数对引力辅助轨道的影响.

4　数值仿真

根据轨道动力学的基本定义: 轨道能量为"正"表示双曲线轨道, "负"表示椭圆轨道; 角动量 z 轴分量为"正"表示顺行轨道, "负"表示逆行轨道. 根据得到的 E_-, C_-, E_+, C_+, 可以将引力辅助轨道划分为 16 种类型, 分别用前 16 个英文字母表示, 具体见表 1.

表 1　英文字母与轨道类型的对应关系

引力辅助之前轨道类型	引力辅助之后轨道类型			
	顺行椭圆	逆行椭圆	顺行双曲	逆行双曲
顺行椭圆	A	E	I	M
逆行椭圆	B	F	J	N
顺行双曲	C	G	K	O
逆行双曲	D	H	L	P

关于引力辅助参数 V_p, r_p, ν, ψ 对飞行器轨道的影响, 文献[9-13]已经进行了讨论, 在此不再赘述. 本文将重点讨论参数 α 和 β 对引力辅助前后的飞行器轨道类型、轨道能量和轨道倾角的影响.

4.1　参数 α 的分析

4.1.1　α 对引力辅助前后轨道类型的影响

本文对大量不同的 α 取值进行了仿真, 特选取了其中较有代表性的情况, 见图 2. 图 2 所示是 α 分别为 0°, 60°, 90°, 120°时的 ψ-V_p 图, 图中字母代表对应的轨道类型. 其他参数取值分别为: $\mu = 0.0121$, $r_p = 0.00495$, $e = 0$, $\nu = 0$, $\beta = 0$. 此组参数下, $0 < \psi < \pi$ 图形与 $\pi < \psi < 2\pi$ 图形关于 $\psi = \pi$ 镜像(镜像规律: B 和 E, C 和 I, D 和 M, G 和 J, H 和 N, L 和 O 互为镜像, A, F, K, P 不变), 因此只给出 ψ 为 $\pi \sim 2\pi$ 时情况; α 与 $360° - \alpha$ 的图形完全相同, 因此只给出 α 为 0° ~ 180°情况.

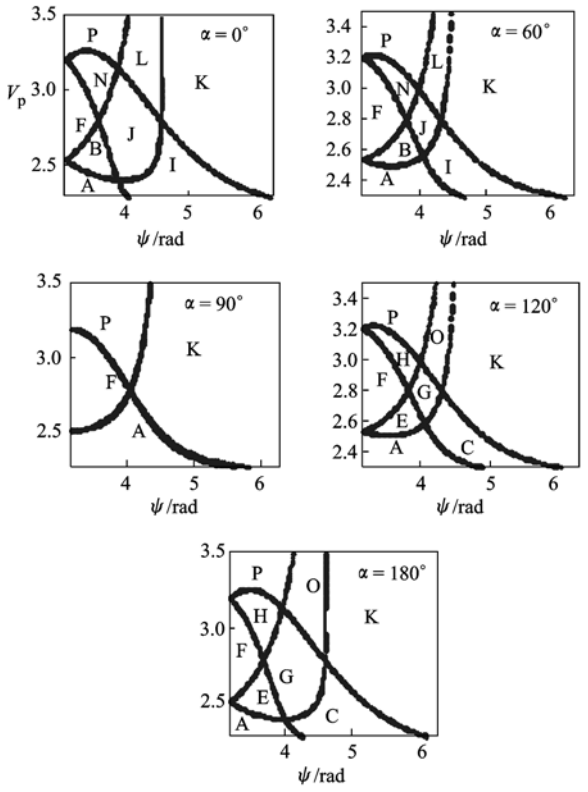


图 2　α 对引力辅助轨道类型的影响

当 $\alpha = \beta = 0°$时, 三维椭圆型限制性三体问题就退化为平面椭圆型限制性三体问题, 三维引力辅助退化为二维引力辅助, 本文结果与文献[10]的结果完全相同, 说明本文对三维引力辅助机理的研究可以很好地退化到二维情况.

当 $\alpha \neq 0°$时, 引力辅助为三维情况. 从图 2 可以看到: 随着 α 的变化, 各种轨道类型区域均发生变化. 现将其变化规律总结如下:

1) 椭圆轨道区域(引力辅助前后都为椭圆轨道, 包含类型 A, B, E, F)总是出现在左下方. α 从 0° ~ 90°, 整体区域增大, A, F 增大, B 减小; α = 90°时 B 消失; α 从 90° ~ 180°, 整体区域减小, A, F 减小, E(B 的镜像类型)增大.

2）双曲轨道区域(引力辅助前后都为双曲轨道,包含类型K,L,O,P)总是出现在右上方. α 从0°~90°,整体区域增大,K,P增大,L减小;α = 90°时L消失;α 从90°~180°,整体区域减小,K、P减小,O(L的镜像类型)增大.

3）逃逸轨道区域(引力辅助前后分别为椭圆轨道和双曲轨道,包含类型I,J,M,N)总是夹在椭圆轨道区域和双曲轨道区域之间. α 从0°~90°,整体区域缩小,I,J,N均减小;α =90°时均消失;α 为90°~180°时,不出现.

4）俘获轨道区域(引力辅助前后分别为双曲轨道和椭圆轨道,包含类型C,D,G,H)总是夹在椭圆轨道区域和双曲轨道区域之间. α 为0°~90°时,不出现;α 从90°~180°,整体区域增大,C,G,H均增大.

5）逆行轨道区域(引力辅助前后都为逆行轨道,包含类型F,H,N,P)总是出现在左上方. α 从0°~90°,整体区域略有增大,F,P增大,N减小;α =90°时N消失;α 从90°~180°,整体区域略有减小,F,P减小,H(N的镜像类型)增大.

6）顺行轨道区域(引力辅助前后都为顺行轨道,包含类型A,C,I,K)总是出现在右半部和底部 ,一直占据大部分. α 从0°~90°,整体区域增大,A,K增大,I减小;α = 90°时,I消失;α 从90°~180°,整体区域减小,A,K减小,C(I的镜像类型)增大.

7）逆行变顺行轨道区域(引力辅助前后分别为逆行轨道和顺行轨道,包含类型B,D,J,L)总是夹在逆行轨道区域和顺行轨道区域之间. α 从0°~90°,整体区域缩小,B,J,L均减小;α =90°时均消失;α 为90~180°时,不出现.

8）顺行变逆行轨道区域(引力辅助前后分别为顺行轨道和逆行轨道,包含类型:E,G,M,O)总是夹在逆行轨道区域和顺行轨道区域之间. α 为0°~90°时,不出现;α 从90°~180°,整体区域增大,E,G,O均增大.

4.1.2 α 对飞行器能量的影响

图3所示为 α 对飞行器能量变化的影响. 其中参数设置如下:$\mu = 0.0121$, $r_p = 0.00495$, $e = 0$, $\nu = 0$, $\beta = 0$, $\psi = 20°$, $V_p = 2.6$.

可以看到,曲线呈钟形,关于 $\alpha = 180°$ 对称. $\alpha = 0°$ 或180°时,引力辅助前后飞行器轨道能量改变最大. 当 $\alpha = 90°$ 或270°时,$\Delta e = 0$. 本文对其他 r_p 值进行了模拟,所得曲线仍呈钟形.

4.1.3 α 对飞行器轨道倾角的影响

图4所示为 α 对飞行器轨道倾角变化的影响. 参数设置与图3相同.

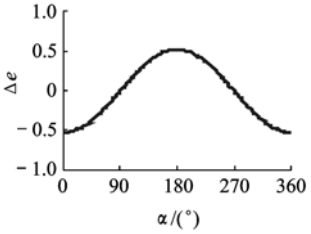


图3 α 对轨道能量变化的影响

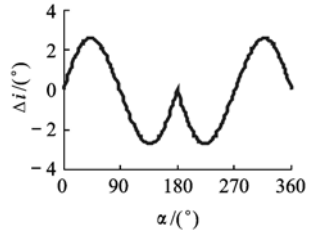


图4 α 对轨道倾角变化的影响

可以看到,图形关于 $\alpha = 180°$ 对称. $\alpha = 0°$ ~180°曲线形状类似于正弦曲线. $\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°$ 时,$\Delta i = 0$. 本文对其他 r_p 值进行了模拟,所得曲线形状类似.

4.2 参数 β 的分析

4.2.1 β 对引力辅助前后轨道类型的影响

本文对大量的不同 β 取值进行了仿真,特选取了其中较有代表性的情况,见图5. 图5所示是 β 分别为0°,67.5°,75°,90°,105°,112.5°,180°时的 ψ-V_p 图,其他参数取值分别为:$\mu = 0.0121$, $r_p = 0.00495$, $e = 0$, $\nu = 0$, $\alpha = 0$. 此组参数下,$0 < \psi < \pi$ 图形与 $\pi < \psi < 2\pi$ 图形关于 $\psi = \pi$ 镜像(镜像规则与4.1.1节中相同),因此只给出 ψ 为 π ~2π 时情况;β 与 $360° - \beta$ 的图形完全相同,因此只给出 β 为0°~180°情况.

从图5可以看到:随着 β 的变化,各种轨道类型区域均发生变化. 现将其变化规律总结如下:

1）椭圆轨道区域总是出现在左下方、右下方. β 从0°~180°,左下方区域减小,右下方区域增大;B,F初始在左下角,不断减小至消失,后又从右下角出现,并不断增大.

2）双曲轨道区域总是出现在上部. β 从0°~90°,整体区域增大,P,L先增大后减小; $\beta = 75°$ 时P,L消失,只剩K;β 从90°~180°,整体区域减小;P,L又从右上角出现.

3）逃逸轨道区域总是出现在椭圆轨道区域和双曲轨道区域之间. β 从0°~67.5°, J,N均减小;$\beta = 67.5°$ 时J,N消失,只剩下I;β 从112.5°~180°,J,N再次出现并不断增大.

4）俘获轨道区域没有出现在图中,在 ψ 为0°~180°中会出现.

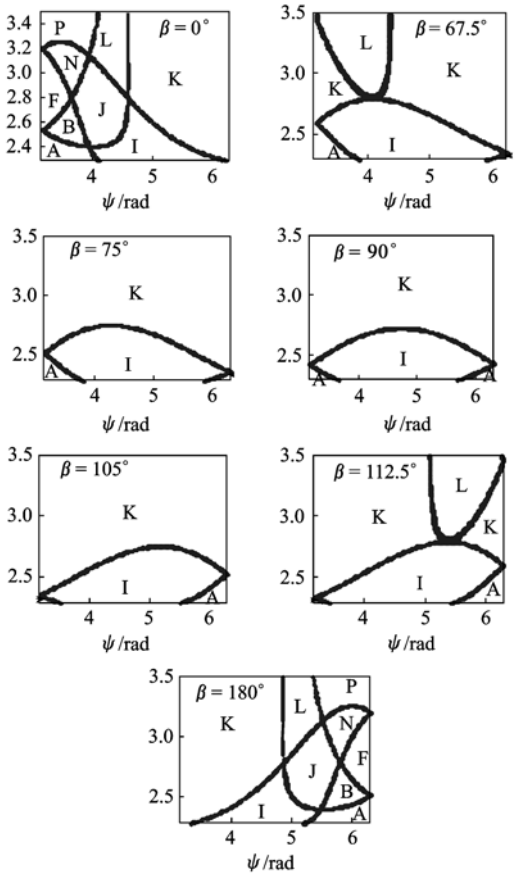


图 5　β 对引力辅助轨道类型的影响

5）逆行轨道区域,β 为 0° ~ 67. 5 时,出现在左上方;β 为 0° ~ 67. 5°时,出现在右上方. β 从 0° ~ 67. 5°,整体区域减小;β = 67. 5°时消失;β 从 112. 5 ~ 180°,F,N,P 都再次出现并不断增大.

6）顺行轨道区域一直占据大部分. β 从 0° ~ 75°,整体区域增大,从右侧不断向左侧扩张(主要是 K 在扩张);β 为 75° ~ 105°时独占整个平面;β 从 105° ~ 180°,整体区域减小,向左侧缩小(主要是 K 在缩小).

7）逆行变顺行轨道区域总是出现在逆行轨道区域和顺行轨道区域之间. β 从 0° ~ 75°,向上部移动,β = 75°时均消失;β 为 75° ~ 105°时,不出现;β 为 105° ~ 180°时,B,J,L 再次出现.

8）顺行变逆行轨道区域没有出现在图中,在 ψ 为 0° ~ 180°中会出现.

4. 2. 2　β 对飞行器能量的影响

图 6 所示为 β 对飞行器能量变化的影响. 参数设置如下:μ = 0. 0121,r_p = 0. 004 95,e = 0,ν = 0,α = 0,ψ = 20°,V_p = 2. 6.

可以看到,曲线呈钟形,关于 β = 180°对称;曲线变化幅度很小,说明不同的 β 引起的轨道能量差别很小. 本文对其他 r_p 值进行了模拟,所得曲线仍呈钟形.

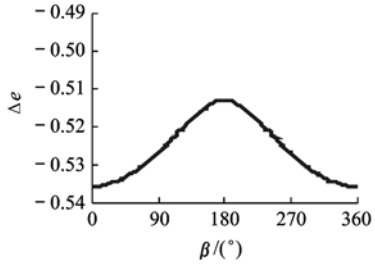


图 6　β 对轨道能量变化的影响

4. 2. 3　β 对飞行器轨道倾角的影响

图 7 和图 8 所示为不同 r_p 下 β 对飞行器轨道倾角变化的影响. 其余参数设置与图 6 相同.

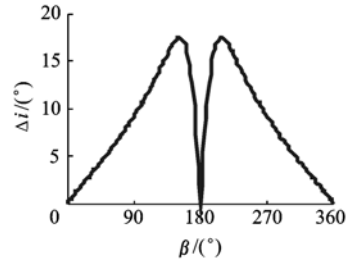


图 7　r_p = 0. 008 时 β 对轨道倾角变化的影响

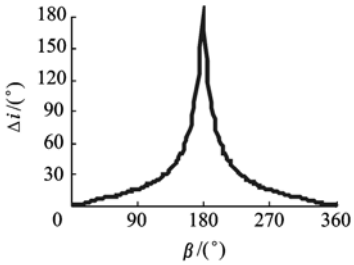


图 8　r_p = 0. 004 95 时 β 对轨道倾角变化的影响

从图 7 可以看出:曲线关于 β = 180°对称. 轨道倾角变化的两个峰值约在 β = 150°和 β = 210°处取得,而当 β = 0°或 180°时,轨道倾角变化为 0. 从图 8 可以看出:此参数下,轨道倾角变化较大,β = 180°时,轨道倾角变化为 180°,说明轨道发生顺逆转换. 本文对其他 r_p 值进行了模拟,发现 β = 180°时,使轨道发生顺逆转换的临界 r_p 值约为 0. 005 36.

综合图 7 和图 8,可以看到:①图形总是关于 β = 180°对称;②β = 180°时,可能的 Δi 只有两个值:0°或 180°.

5　以地月系统为例进行参数优化

上述研究对航天器轨道设计具有重要指导意义. 在特定任务中,往往需要获得特定轨道类型,如俘获与逃逸、顺行与逆行等,而且往往有一定参数限制,特别对 V_p,r_p 会有一定限制. 如果任务目标是对 M_2 进行数据采集,则往往需要设计使 V_p 和 r_p 最小;如果需要躲避 M_2 的大气层、射线等,

则需要使 V_p 和 r_p 最大.

本文以地月系统为例进行说明. 地月系统中, $e=0.00549$, $\mu=0.01215$. 限制 $r_p=0.00504$(距月球表 200 km), $\nu=90°$, $\alpha=60°$, $\beta=30°$, 限制 ψ 范围为 180°~360°, 分别求逃逸、俘获的最大 V_p.

从图 9 可以看出: 想要获得逃逸轨道(I, J, M, N), 最大 V_p 为 2.75, 轨道类型为 I. 想要获得俘获轨道(C, D, G, H), 最大 V_p 为 3.17, 轨道类型为 H.

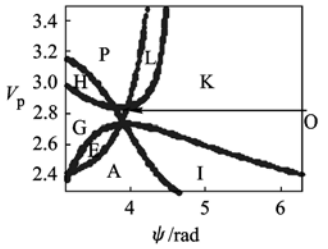


图 9 ψ-V_p 图

6 结 论

为了研究三维引力辅助技术, 本文通过引入参数 α 和 β, 将平面椭圆型限制性三体模型拓展到三维椭圆型限制性三体模型. 深入讨论了 α 和 β 对飞行器轨道类型、轨道能量和轨道倾角的影响. 研究结果表明:

1) α 从 0°~90°, 椭圆轨道、双曲轨道、逆行轨道、顺行轨道整体区域都增大, 逃逸轨道、俘获轨道、逆行变顺行轨道、顺行变逆行轨道整体区域都减小; α 从 90~180°, 变化趋势相反.

2) $\alpha=90°$时, 只存在 A, F, K, P 四种轨道类型, 意味着引力辅助前后轨道类型保持不变. $\alpha=90°$或 270°时, 引力辅助前后飞行器轨道能量、轨道倾角均保持不变. $\alpha=0°$或 180°时, 引力辅助前后飞行器轨道能量改变最大.

3) 限定 $\pi<\psi<2\pi$, 则只有当 $0°<\alpha<90°$ 时, 才存在逃逸轨道和逆行变顺行轨道; 只有当 $90°<\alpha<180°$时, 才存在俘获轨道和顺行变逆行轨道. $0<\psi<\pi$ 时的规律, 可根据镜像规则得到.

4) β 从 0°~75°, 逆行轨道、逆行变顺行轨道、顺行变逆行轨道整体区域都减小, 顺行轨道整体区域增大; β 从 150°~180°, 变化趋势相反.

5) β 为 75°~105°时, 只存在顺行轨道, 说明引力辅助前后的轨道只可能是顺行轨道.

6) 不论 β 取何值, 只有当 $\pi<\psi<2\pi$ 时, 才存在逃逸轨道和逆行变顺行轨道; 只有当 $0<\psi<\pi$ 时, 才存在俘获轨道和顺行变逆行轨道.

以上的研究和分析揭示了参数 α 和 β 对飞行器轨道特性的影响. 通过选取适当的参数 α 和 β, 可以获得特定任务所需要的轨道类型、轨道能量和轨道倾角. 这些研究可以为引力辅助轨道的设计提供依据.

参考文献 (References)

[1] Curtis H D. 轨道力学[M]. 周建华, 等译. 北京: 科学出版社, 2009: 308-309
Curtis H D. Orbital mechanics for engineering students[M]. Translated by Zhou Jianhua, et al. Beijing: Science Press, 2009: 308-309(in Chinese)

[2] Flandro G A. From instrumented comets to grand tours: on the history of gravity assist[R]. AIAA 2011-0176, 2001

[3] Strange N J, Longuski J M. A graphical method for gravity-assist trajectory design [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2002, 39(1): 9-16

[4] Chen K J, Kloster K W, Longuski J M. A graphical method for preliminary design of low-thrust gravity-assist Trajectories[R]. AIAA 2008-6952, 2008

[5] Carnelli I, Dachwald B, Vasile M. Evolutionary neurocontrol: a novel method for low-thrust gravity-assist trajectory optimization [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2009, 32(2): 615-624

[6] Pascale P, De Vasile M. Preliminary design of low-thrust multiple gravity-assist trajectories[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2006, 43(5): 1065-1076

[7] Sims J A, Longuski J M, Patel M R. Aerogravity-assist trajectories to the outer planets and the effect of drag[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2000, 37(1): 49-55

[8] Armellin R, le Lavagna M, Ercoli-Finzi A. Aero-gravity assist maneuvers: coupled trajectory and vehicle shape optimization[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2006, 95: 391-405

[9] Broucke R A. The celestial mechanics of gravity assist[C]// AIAA/AAS Astrodynamics Conference. Washington D C: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988: 69-78

[10] Prado A F B A. Close-approach trajectories in the elliptic restricted problem[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1997, 20(4): 797-802

[11] 乔栋, 崔平远, 崔祜涛. 基于圆型限制性三体模型的借力飞行机理研究[J]. 宇航学报, 2009, 30(1): 82-87
Qiao Dong, Cui Pingyuan, Cui Hutao. Research on gravity-assist mechanism in circular restricted three-body model[J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(1): 82-87(in Chinese)

[12] 乔栋, 崔平远, 尚海滨. 基于椭圆型限制性三体模型的借力飞行机理研究[J]. 宇航学报, 2010, 31(1): 36-43
Qiao Dong, Cui Pingyuan, Shang Haibin. Research on gravity-assist mechanism in elliptic restricted three-body model[J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(1): 36-43(in Chinese)

[13] Felipe G, Prado A F B A. Classification of out-of-plane swing-by trajectories[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1999, 22(5): 643-649

(编 辑: 李 晶)