非线性系统的全局线性输出反馈镇定

曲蔚然 林 岩 张 绪

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘 要: 考虑了利用线性输出反馈全局镇定一类不确定非线性系统的问题. 已有线性输出反馈控制中三角型约束条件被推广到了非三角型条件. 构造了一个线性高增益观测器和一个耦合的线性高增益控制器,并利用增益尺度变换的方法,证明了闭环系统的全局稳定性. 仿真结果说明该方法的有效性.

关 键 词: 全局镇定; 线性输出反馈; 不确定非线性系统; 非三角型约束

中图分类号: TP 273

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2012)11-1478-05

Global stabilization of nonlinear systems via linear output feedback

Qu Weiran Lin Yan Zhang Xu

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The problem of global stabilization for a class of uncertain nonlinear systems using linear output feedback is considered. Instead of imposing triangular type restrictions on the nonlinear uncertainties, the existing linear output feedback control schemes were extended to certain nontriangular type restrictions. A linear high-gain observer and a coupled linear high-gain controller were constructed, and by using the gain scaling method, global stability of the closed loop system can be achieved. Simulation results are given to show the effectiveness of the proposed scheme.

Key words: global stabilization; linear output feedback; uncertain nonlinear systems; nontriangular restrictions

由于文献[1]的开创性工作,对满足一定增长条件非线性系统全局输出反馈镇定的研究得到广泛的关注[2-8]. 其中,文献[2-4]提出了线性输出反馈来达到全局镇定的方案. 文献[2]中对一类非线性系统作了线性增长条件的假设. 文献[5]中的系统包含输出非线性而且满足关于不可观测状态的类全局李普希兹条件. 在文献[3-4]中,这种类全局李普希兹条件被推广到了线性增长条件. 然而,这些方法均假设系统满足三角型约束条件. 正是基于这样的约束,包括高增益与低增益的增益尺度变换的方法[9-12]可以用于控制器设计与稳定性分析.

本文的主要目的就是回答以下问题:当文献[2-4]中关于系统非线性的三角型约束条件被推广到非三角型条件时,是否仍可构造一个线性输出反馈来全局镇定所考虑的非线性系统.

1 问题描述

考虑一类不确定非线性系统:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + \Delta_1(\boldsymbol{x},u,t)\\ &\vdots\\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \Delta_{n-1}(\boldsymbol{x},u,t)\\ \dot{x}_n &= u + \Delta_n(\boldsymbol{x},u,t)\\ y &= x_1 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量;$u\in\mathbf{R}$

收稿日期: 2011-06-14; **网络出版时间**: 2012-11-09 17:20

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20121109.1720.008.html

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874044)

作者简介: 曲蔚然(1968-),男,河南洛阳人,博士生,ronaldqu@163.com.

和 $y\in\mathbf{R}$ 分别为系统的输入和输出;连续函数 $\Delta_i(\boldsymbol{x},u,t):\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $i=1,2,\cdots,n$,表示系统的不确定非线性且关于 $(\boldsymbol{x},u)$ 是局部李普希兹的.

为了描述对 $\Delta_i(\boldsymbol{x},u,t)$ 的假设,需要文献[13]中尺度变换的概念. 尺度变换定义为映射 $\delta:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n:\delta(\boldsymbol{x})=[\varepsilon^{s_1}x_1,\varepsilon^{s_2}x_2,\cdots,\varepsilon^{s_n}x_n]^{\mathrm{T}}$,这里 $\varepsilon>0$. 实数 s_i 称为尺度变换的权重. 考虑如下尺度变换:

$$\delta(\boldsymbol{x})=[x_1,\varepsilon^{-1}x_2,\cdots,\varepsilon^{-n+1}x_n]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

式(2)可以很好地描述不确定非线性的性质. 进而,对系统(1)作如下假设:

假设 1　不确定非线性 $\Delta_i(\boldsymbol{x},u,t)$,对于任意的实数 $\varepsilon\geqslant1$ 满足:

$$|\Delta_i(\boldsymbol{x},u,t)|\leqslant\gamma\varepsilon^{\beta_i}\|\delta(\boldsymbol{x})\| \tag{3}$$

式中,$\gamma\geqslant0$ 和 $\beta_i<i$ 为实常数.

假设 2　不确定非线性 $\Delta_i(\boldsymbol{x},u,t)$,对于任意的实数 $\varepsilon\geqslant1$ 满足:

$$|\Delta_i(\boldsymbol{x},u,t)|\leqslant\gamma\varepsilon^{\beta_i}(1+|y|^m)\|\delta(\boldsymbol{x})\| \tag{4}$$

式中,$\gamma\geqslant0$ 和 $\beta_i<i$ 为实常数;$m\geqslant1$ 为整数.

假设 1 拓展了文献[2]中假设,使得一类非三角型系统被包括进来;同时假设 2 意味着系统(1)满足一个类似于假设 1 的增长条件并拓展了文献[3-4]中假设. 通过介绍如下例子来说明这两个条件. 考虑一个二阶系统:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+\frac{\gamma}{3}\sin x_1\ln(1+x_2^2)\\ \dot{x}_2&=u+x_2\sin x_1\\ y&=x_1\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中,γ 为一个正常数. 显然,它不满足文献[2]中线性增长条件. 然而,可验证它满足假设 1. 考虑如下非线性系统:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=x_2+\frac{\gamma}{3}x_1^2\ln(1+x_2^2)\\ \dot{x}_2&=u\\ y&=x_1\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式(6)不具有文献[3-4]中的输出反馈的形式,具有一个非三角型的结构并且满足假设 2.

以上所举的例子说明满足假设 1 或假设 2 的系统(1)包含了一类比文献[2-4]更广泛的非线性系统. 下一节将证明对于这类非线性系统的全局镇定问题,线性输出反馈确实存在,且由一个线性高增益观测器和一个耦合的线性高增益控制器组成. 系统(1) 满足假设 1 时,观测器增益是一个确定值;而当系统(1)满足假设 2 时,需设计自适应律进行调节.

2　假设 1 下的输出反馈设计

为了控制器的设计和稳定性分析,定义以下矩阵:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{n-1\times1}&\boldsymbol{I}_{n-1}\\0&\mathbf{0}_{1\times n-1}\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{b}&=\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{n-1\times1}\\1\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{c}&=\begin{bmatrix}1\\\mathbf{0}_{n-1\times1}\end{bmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

给出线性输出反馈控制器如下:

$$\dot{\hat{x}}_i=\hat{x}_{i+1}+l^iq_i(x_1-\hat{x}_1)\quad 1\leqslant i\leqslant n-1 \tag{8}$$

$$\dot{\hat{x}}_n=u+l^nq_n(x_1-\hat{x}_1) \tag{9}$$

$$u=-l^na_1\hat{x}_1-l^{n-1}a_2\hat{x}_2-\cdots-la_n\hat{x}_n \tag{10}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{x}}=[\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的估计;$l\geqslant1$ 为一个正的设计参数;$\boldsymbol{q}=[q_1,q_2,\cdots,q_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{a}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 经选择分别使得 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{qc}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}}$ 为赫尔维兹矩阵.

有如下定理.

定理 1　在假设 1 下,存在一个充分大的 l 使得由式(1)和式(8)~式(10)描述的闭环系统是全局指数稳定的.

证明　定义:

$$\boldsymbol{L}_1=\mathrm{diag}\{1,l,\cdots,l^{n-1}\} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{L}_2=\mathrm{diag}\{l^{n-1},\cdots,l,1\} \tag{12}$$

及观测器误差:

$$\boldsymbol{e}=[e_1,e_2,\cdots,e_n]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}} \tag{13}$$

作变换得

$$\left.\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}&=\boldsymbol{L}_1^{-1}\boldsymbol{e}\\ \bar{\boldsymbol{x}}&=\boldsymbol{L}_1^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

注意到

$$\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{qc}^{\mathrm{T}}=l\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{qc}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{L}_1^{-1}$$

和

$$\boldsymbol{A}-l\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_2=l\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{L}_1^{-1}$$

则经变换后得到变量 $\bar{\boldsymbol{e}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的导数为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}&=l(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{qc}^T)\bar{\boldsymbol{e}}+\boldsymbol{L}_1^{-1}\Delta\\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}}&=l(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}})\bar{\boldsymbol{x}}+l\boldsymbol{q}\bar{e}_1\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

式中,$\Delta=[\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n]^{\mathrm{T}}$. 因 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{qc}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}}$ 为赫尔维兹矩阵,故存在两个对称正定阵 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 使得以下等式成立:

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{qc}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{qc}^{\mathrm{T}})&=-\boldsymbol{I}\\ (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{ba}^{\mathrm{T}})&=-2\boldsymbol{I}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

定义二次函数:

$$V = \eta \bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_1 \bar{\boldsymbol{e}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2 \bar{\boldsymbol{x}} \tag{17}$$

式中,η 为一个待定的正常数. 计算 V 沿微分方程(15)解的导数得

$$\begin{aligned}\dot{V} = &-\eta l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 + 2\eta \bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{L}_1^{-1} \boldsymbol{\Delta} - \\ &2l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 + 2l \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{q} \bar{e}_1 \leqslant \\ &-\eta l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 + 2\eta \| \bar{\boldsymbol{e}} \| \ \| \boldsymbol{P}_1 \| \ \| \boldsymbol{L}_1^{-1} \boldsymbol{\Delta} \| - \\ &l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 + l \| \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{q} \| \ \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 \end{aligned} \tag{18}$$

这里用到了不等式:

$$2l \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{q} \bar{e}_1 \leqslant l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 + l \| \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{q} \| \ \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2$$

考虑到式(3)和式(14),有

$$\| \boldsymbol{L}_1^{-1} \boldsymbol{\Delta} \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} l^{1-i} | \Delta_i | \leqslant \bar{\gamma} l^{\beta} (\| \bar{\boldsymbol{x}} \| + \| \bar{\boldsymbol{e}} \|) \tag{19}$$

式中,$\beta = \max\{\beta_i - i + 1\} < 1$,式(3)中 ε 已被 l 替换,且 $\bar{\gamma} = n\gamma$. 式(18)可以重新写为

$$\begin{aligned}\dot{V} \leqslant &-\eta l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 + \| \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{q} \| l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 - l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 + \\ &2\eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma} l^{\beta} \| \bar{\boldsymbol{e}} \| (\| \bar{\boldsymbol{e}} \| + \| \bar{\boldsymbol{x}} \|) \leqslant \\ &-(\eta l - \| \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{q} \| l - 3\eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma} l^{\beta}) \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 - \\ &(l - \eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma} l^{\beta}) \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 \end{aligned} \tag{20}$$

通过选择 η 和 l 使得以下关系成立:

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \| \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{q} \|^2 + 1 \\ l^{1-\beta} &> 3\eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

因此,存在一个正常数 ρ 使得

$$\dot{V} \leqslant -\rho V \tag{22}$$

这表明由系统(1)和式(8)~式(10)描述的闭环系统是全局指数稳定的且所有状态均一致有界. **证毕**

文献[14]得到了满足一类非三角型约束系统的一个可全局镇定的充分条件,但未给出控制器的存在性. 这里,通过引入基于尺度变换的假设,所提出的方法可保证能全局镇定非线性系统(1)的线性控制器总存在.

需要指出,本文的控制器设计对文献[4]中满足三角型线性增长条件的系统仍然适用,此时只要取 $\beta = 0$ 即可.

3 假设 2 下的自适应输出反馈设计

在本节中,定理 1 中的结果将被推广到满足假设 2 的系统(1). 下面的结论可视为在文献[11]中给出、在文献[3]得到证明的引理的一个修正.

引理 1 对于任意的正实数 μ,存在实数 d_0 和 d_1、对称阵 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 及列向量 $\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \cdots, q_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{a} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]^{\mathrm{T}}$,满足如下不等式:

$$\left.\begin{aligned}&d_0 > 0 \\ &d_1 \geqslant 0 \\ &\boldsymbol{P}_1 > 0 \\ &\boldsymbol{P}_2 > 0 \\ &-d_0 \boldsymbol{I} \geqslant (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_1 (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}) \\ &-2d_0 \boldsymbol{I} \geqslant (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_2 (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}) \\ &-\mu \boldsymbol{P}_1 \leqslant \boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{D} \leqslant d_1 \boldsymbol{P}_1 \\ &-\mu \boldsymbol{P}_2 \leqslant \boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{D} \leqslant d_1 \boldsymbol{P}_2 \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

式中 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\{0, 1, \cdots, n-1\}$

由引理 1 易知,$(d_0, d_1, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{a})$ 依赖于正实数 μ,这里 μ 为设计参数,进而可确定所对应的 $(d_0, d_1, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{a})$.

定理 2 存在一个线性输出反馈控制器,使得满足假设 2 的系统(1)可在如下意义下被全局镇定:对于任意的初始条件,闭环系统的所有信号都是有界的且系统状态 $\boldsymbol{x}$ 收敛到原点.

证明 构造具有式(8)~式(10)的输出反馈控制器,且观测器增益 l 根据下面的自适应律进行调节:

$$\dot{l} = -\alpha_1 l^2 + \alpha_2 l^p (1 + |y|^m) \quad l(0) = 1 \tag{24}$$

式中,$1 \leqslant p < 2$,$\alpha_2 \geqslant \alpha_1 > 0$ 为设计参数. 式(24)表明对于任意 $t \geqslant 0$,有 $l(t) \geqslant 1$. 定义观测器误差 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$. 根据引理 1,对任意的正实数 μ,总存在一组参数使得式(23)成立. 定义下列矩阵:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{L}_1 &= \mathrm{diag}\{1, l, \cdots, l^{n-1}\} \\ \boldsymbol{L}_2 &= \mathrm{diag}\{l^{n-1}, \cdots, l, 1\} \\ \boldsymbol{L}_3 &= \mathrm{diag}\{l^{\mu}, l^{1+\mu}, \cdots, l^{n-1+\mu}\} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

作变换得

$$\left.\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}} &= \boldsymbol{L}_3^{-1} \boldsymbol{e} \\ \bar{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{L}_3^{-1} \hat{\boldsymbol{x}} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

注意到

$$\boldsymbol{A} - l\boldsymbol{L}_1 \boldsymbol{q}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} = l\boldsymbol{L}_3 (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}) \boldsymbol{L}_3^{-1}$$

和

$$\boldsymbol{A} - l\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{L}_2 = l\boldsymbol{L}_3 (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}) \boldsymbol{L}_3^{-1}$$

变换以后得到变量 $\bar{\boldsymbol{e}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的导数可表示为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\bar{\boldsymbol{e}}} &= l(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}) \bar{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{L}_3^{-1} \boldsymbol{\Delta} - \frac{\dot{l}}{l} (\mu \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) \bar{\boldsymbol{e}} \\ \dot{\bar{\boldsymbol{x}}} &= l(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}) \bar{\boldsymbol{x}} + l\boldsymbol{q} \bar{e}_1 - \frac{\dot{l}}{l} (\mu \boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}) \bar{\boldsymbol{x}} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

定义二次函数

$$V = \eta \bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_1 \bar{\boldsymbol{e}} + \bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_2 \bar{\boldsymbol{x}} \tag{28}$$

式中,$\eta = \| \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{q} \|^2 / d_0^2 + 1$. 设由系统(1)、式(8)~式(10)以及式(24)构成的闭环系统解 $(\bar{\boldsymbol{e}}, \bar{\boldsymbol{x}}, l)$ 右侧的最大存在区间为 $[0, T_1)$, $T_1 \in (0, +\infty]$. 计算 V 沿微分方程(27)解的导数得

$$\dot{V} = -d_0\eta l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 + 2\eta\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{L}_3^{-1}\Delta - \eta\frac{\dot{l}}{l}\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{D} + 2\mu\boldsymbol{P}_1)\bar{\boldsymbol{e}} - 2d_0 l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 + 2l\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{q}\bar{e}_1 - \frac{\dot{l}}{l}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{D} + 2\mu\boldsymbol{P}_2)\bar{\boldsymbol{x}} \leqslant -d_0 l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 + 2\eta \| \bar{\boldsymbol{e}} \| \| \boldsymbol{P}_1 \| \| \boldsymbol{L}_3^{-1}\Delta \| - \eta\frac{\dot{l}}{l}\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{D} + 2\mu\boldsymbol{P}_1)\bar{\boldsymbol{e}} - d_0 l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 - \frac{\dot{l}}{l}\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{D} + 2\mu\boldsymbol{P}_2)\bar{\boldsymbol{x}} \quad (29)$$

这里用到了式(23)以及下列关系:

$$\left.\begin{aligned} &\eta = \| \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{q} \|^2/d_0^2 + 1 \\ &2l\bar{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{q}\bar{e}_1 \leqslant d_0 l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 + \frac{\| \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{q} \|}{d_0} l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

考虑到式(24)以及

$$\left.\begin{aligned} &\mu\boldsymbol{P}_1 \leqslant \boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{D} + 2\mu\boldsymbol{P}_1 \leqslant (2\mu + d_1)\boldsymbol{P}_1 \\ &\mu\boldsymbol{P}_2 \leqslant \boldsymbol{D}\boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{D} + 2\mu\boldsymbol{P}_2 \leqslant (2\mu + d_1)\boldsymbol{P}_2 \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

式(29)可以重新写为

$$\dot{V} \leqslant -d_0 l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 + 2\eta \| \bar{\boldsymbol{e}} \| \| \boldsymbol{P}_1 \| \| \boldsymbol{L}_3^{-1}\Delta \| + \eta\alpha_1(2\mu + d_1) \| \boldsymbol{P}_1 \| l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 - \eta\alpha_2\mu\lambda_1 l^{p-1}(1 + |y|^m) \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 - d_0 l \| \bar{x} \|^2 + \alpha_1(2\mu + d_1) \| \boldsymbol{P}_2 \| l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 - \alpha_2\mu\lambda_2 l^{p-1}(1 + |y|^m) \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 \quad (32)$$

式中,λ_1 和 λ_2 分别为 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 的最小特征值. 由式(4)、式(25)和式(26)可得

$$\| \boldsymbol{L}_3^{-1}\Delta \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{l^{i-1+\mu}}|\Delta_i| \leqslant \bar{\gamma} l^{\beta}(1 + |y|^m)(\| \bar{\boldsymbol{e}} \| + \| \bar{\boldsymbol{x}} \|) \quad (33)$$

式中,$\beta = \max\{\beta_i - i + 1\} < 1$ 且 $\bar{\gamma} = n\gamma$. 选取 p 使得 $\beta + 1 \leqslant p < 2$,根据上式有

$$2\eta \| \bar{\boldsymbol{e}} \| \| \boldsymbol{P}_1 \| \| \boldsymbol{L}_3^{-1}\Delta \| \leqslant 2\eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma} l^{\beta}(1 + |y|^m)(\| \bar{\boldsymbol{e}} \| + \| \bar{\boldsymbol{x}} \|) \| \bar{\boldsymbol{e}} \| \leqslant \eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma} l^{p-1}(1 + |y|^m)(3 \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 + \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2) \quad (34)$$

将式(34)代入式(32)可得

$$\dot{V} \leqslant -[d_0 - \eta\alpha_1(2\mu + d_1) \| \boldsymbol{P}_1 \|] l \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 - [d_0 - \alpha_1(2\mu + d_1) \| \boldsymbol{P}_2 \|] l \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 - (\eta\alpha_2\mu\lambda_1 - 3\eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma}) l^{p-1}(1 + |y|^m) \| \bar{\boldsymbol{e}} \|^2 - (\alpha_2\mu\lambda_2 - \eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma}) l^{p-1}(1 + |y|^m) \| \bar{\boldsymbol{x}} \|^2 \quad (35)$$

选择设计参数 α_1 和 α_2($\alpha_2 \geqslant \alpha_1 > 0$)使得

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 < \min\left\{\frac{d_0}{\eta(2\mu + d_1) \| \boldsymbol{P}_1 \|}, \frac{d_0}{(2\mu + d_1) \| \boldsymbol{P}_2 \|}\right\} \\ &\alpha_2 \geqslant \max\left\{\frac{3 \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma}}{\mu\lambda_1}, \frac{\eta \| \boldsymbol{P}_1 \| \bar{\gamma}}{\mu\lambda_2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

于是,由式(35)可知,存在一个正常数 ρ,使得

$$\dot{V} \leqslant -\rho V \quad (37)$$

在区间$[0, T_1)$上恒成立. 因此,$\bar{\boldsymbol{e}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是有界的,这说明在$[0, T_1)$上$|\bar{e}_1 + \bar{x}_1| \leqslant r_1$,这里 r_1 是一个正常数. 注意到等式 $y = x_1 = l^{\mu}(\bar{e}_1 + \bar{x}_1)$,则式(24)可以重新表示为

$$\dot{l} = -\alpha_1 l^2 + \alpha_2 l^p[1 + |l^{\mu}(\bar{e}_1 + \bar{x}_1)|^m] \leqslant -\alpha_1 l^2 + \alpha_2 l^p(1 + r_1^m l^{\mu m}) \leqslant -(\alpha_1 l^2 - \alpha_2 l^p - \alpha_2 r_1^m l^{\mu m + p}) \quad (38)$$

选择μ 令 $\mu m + p < 2$. 由式(38)可知,l 在$[0, T_1)$上是有界的,即闭环系统的解$(\bar{\boldsymbol{e}}, \bar{\boldsymbol{x}}, l)$在$[0, T_1)$上有界. 因此,$T_1$ 一定可取$+\infty$. 进一步,容易验证闭环系统所有信号在$[0, +\infty)$上均有界. 由式(37)可知,当 $t \to +\infty$ 时 V 趋向于零,这表明状态$(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{x}})$趋向于原点. **证毕**

式(8)~式(10)中的观测器与控制器已广泛应用于输出反馈控制中. 本文的创新点在于:观测器增益 l 按新的自适应律(24)进行调节. 需要指出,满足假设 2,即具有非三角性质的系统(1)不能被已有的自适应输出反馈控制方法解决;反之,本文提出的自适应律却可应用于文献[4]中由三角型条件约束的非线性系统,这时只要取 $p = 1$ 即可. 此外,与文献[4]不同,本文的目的不是寻找一个全局镇定带有未知增长速率系统的方法. 因此,只需要一个观测器增益 l 进行在线调节,而其它参数则可由非线性系统的已知信息来确定.

4　仿真结果

在本节中,定理 1 和定理 2 中的方法分别被应用于式(5)和式(6). 通过选择参数 $l = 60$,$\boldsymbol{q} = [1, 1]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{a} = [1, 2]^{\mathrm{T}}$,图 1~图 3 给出了式(5)的状态轨迹和控制律的响应曲线,这里 $\gamma = 0.5$ 且初始条件为 $x_1(0) = x_2(0) = 50$ 和 $\hat{x}_1(0) = \hat{x}_2(0) = 0$.

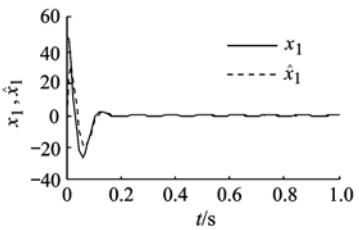

图 1　式(5)的状态 x_1 与 $\hat{x}_1$

当参数确定为 $p=1.35$, $\boldsymbol{q}=[0.5,0.5]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{a}=[4,4]^{\mathrm{T}}$, $\alpha_1=0.2$ 以及 $\alpha_2=10$ 时,图 4 ~ 图 7 给出了式(6)的仿真结果,这里 $\gamma=0.1$ 且初始条件为 $x_1(0)=x_2(0)=1$ 和 $\hat{x}_1(0)=\hat{x}_2(0)=2$. 以上例子说明了本文所提出的设计方法的有效性.

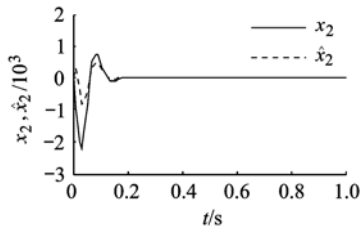

图 2 式(5)的状态 x_2 与 $\hat{x}_2$

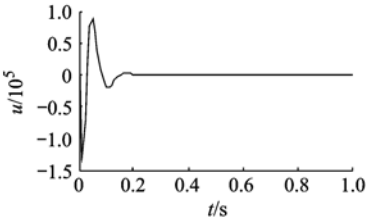

图 3 式(5)的控制 u

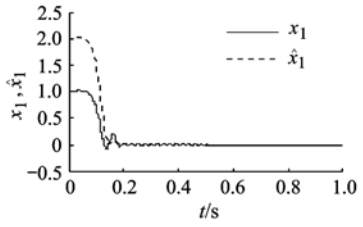

图 4 式(6)的状态 x_1 与 $\hat{x}_1$

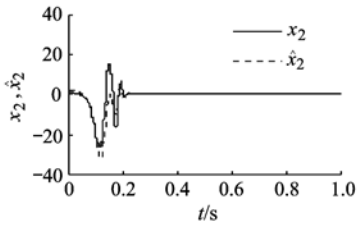

图 5 式(6)的状态 x_2 与 $\hat{x}_2$

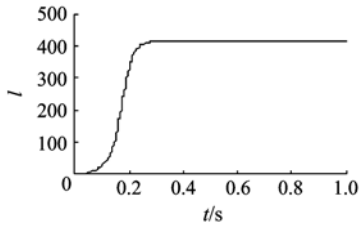

图 6 式(6)的观测器增益 l

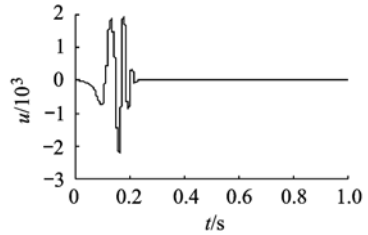

图 7 式(6)的控制 u

5 结 论

考虑了一类满足非三角型约束非线性系统的全局输出反馈镇定问题. 引入尺度变换的概念来刻画对系统的假设. 分析表明:在假设 1 或假设 2 下,所研究的非线性系统可以被线性输出反馈全局镇定. 给出的实例证明了其有效性.

参考文献(References)

[1] Mazenc F, Praly L, Dayawansa W P. Global stabilization by output feedback: examples and counterexamples [J]. Systems and Control Letters, 1994, 23(2): 119-125

[2] Qian C, Lin W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: a nonseparation principle paradigm [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(10): 1710-1715

[3] Praly L, Jiang Z P. Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems [J]. Systems and Control Letters, 2004, 53(2): 107-116

[4] Lei H, Lin W. Adaptive regulation of uncertain nonlinear systems by output feedback: a universal control approach [J]. Systems and Control Letters, 2007, 56(8): 529-537

[5] Praly L. Asymptotic stabilization via output feedback for lower triangular systems with output dependent incremental rate [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 1103-1108

[6] Lei H, Lin W. Robust control of uncertain systems with polynomial nonlinearity by output feedback [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(6): 692-723

[7] Andrieu V, Praly L, Astolfi A. High gain observers with updated gain and homogeneous corrections terms [J]. Automatica, 2009, 45(2): 422-428

[8] Andrieu V, Praly L, Astolfi A. Asymptotic tracking of a reference trajectory by output-feedback for a class of nonlinear systems [J]. Systems and Control Letters, 2009, 58(9): 652-663

[9] Khalil H K, Saberi A. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1987, 32(11): 1031-1035

[10] Atassi A N, Khalil H K. Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs [J]. Systems and Control Letters, 2000, 39(3): 183-191

[11] Praly L. Generalized weighted homogeneity and state dependent time scale for linear controllable systems [C] // in Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego: [s. n.], 1997, 5: 4342-4347

[12] Ye X D. Universal stabilization of feedforward nonlinear systems [J]. Automatica, 2003, 39(1): 141-147

[13] Sepulchre R. Slow peaking and low-gain designs for global stabilization of nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(3): 453-461

[14] Choi H L, Lim J T. Global exponential stabilization of a class of nonlinear systems by output feedback [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(2): 255-257

(编 辑:刘登敏)