# 利用变环境数据的 Weibull 分布可靠性综合评估

洪东跑 马小兵 赵 宇

(中国运载火箭技术研究院, 北京 100076) (北京航空航天大学 可靠性与系统工程学院, 北京 100191)

**摘 要**: 为了提高可靠性评估精度,研究了环境因素对产品可靠性的影响,提出了一种适用于 Weibull 分布的变环境数据可靠性综合评估方法. 首先通过利用径向基函数法来度量不同环境因素及其交互作用对可靠性的影响,建立了关于环境因素的位置参数模型. 并针对刻度参数依赖于环境因素的情形,利用线性模型来建立刻度参数模型. 然后利用广义线性模型,给出了位置和刻度参数模型系数的极大似然估计,并给出了可靠度近似置信下限. 实例表明该方法能较好地度量环境因素对可靠性的影响,而且合理可行便于工程应用.

**关 键 词**: 可靠性评估; Weibull 分布; 环境因素; 径向基函数法; 广义线性模型

**中图分类号**: TB 114.3

**文献标识码**: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2012)11-1487-05

# Integrated reliability assessment for Weibull distribution using varied environment data

Hong Dongpao

(China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

Ma Xiaobing Zhao Yu

(School of Reliability and Systems Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract**: To improve the stability and accuracy of the reliability assessment, a method of integrated reliability assessment for Weibull distribution was proposed using the varied environment test data. In this method, the location parameter and scale parameter were assumed respectively as a function of relevant environment variables. Then the location parameter function was constructed by the method of radial basis function while the scale parameter function was constructed by the linear model. Thus the influences of environment factors on the reliability of the product were measured quantificationally. With the generalized linear model, the maximum likelihood estimations of the coefficients were obtained, and corresponding arithmetic was put forward. With the estimations, the approximated confidence interval for the reliability function was obtained according to the normal law. The instance analysis shows that this integrated reliability assessment method improves the precision of reliability assessment and is straightforward for engineering application.

**Key words**: reliability assessment; Weibull distribution; environment factor; radial basis function; generalized linear model

鉴于产品任务剖面的多样性和使用环境的复杂性,通常会在多个试验环境下进行试验[1]. 对于变环境试验数据,一般利用环境因子方法[2-3]或基于物理原理的统计模型[4-5]进行统计分析,以推断产品在使用环境条件下的可靠性. 利用环境因子可以把其它环境下的试验数据折合到使用环境下,在一定程度上可以提高使用环境下产品的可靠性评估精度[6]. 然而环境因子方法不考虑环境应力与产品失效的内在规律,当产品在使用环境条件下不存在试验数据时无法进行数据折

**收稿日期**: 2011-07-21; **网络出版时间**: 2012-11-21 17:32

**网络出版地址**: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20121121.1732.001.html

**作者简介**: 洪东跑(1983-),男,浙江温洲人,工程师,hloving@163.com.

合. 为此通常利用可靠性模型来描述寿命参数和环境因素的关系,结合试验数据对产品可靠性进行统计推断,当产品在使用环境条件下不存在试验数据时该方法能对产品可靠性进行预计[7]. 不过,在工程中通常存在较为复杂的环境因素且因素存在交互作用,该方法难以较好地描述复杂环境因素对可靠性的影响. 通常假设其中的一些分布参数为常数,以常用的位置刻度分布族为例,通常假设刻度参数不依赖于环境因素. 该假设不仅缺乏理论依据,而且有研究表明刻度参数往往会随环境因素的改变而发生变化[8-10].

本文研究了环境因素对产品可靠性的影响,结合变环境试验数据,给出了一种适用于 Weibull 分布的可靠性综合评估方法.

## 1 变环境数据可靠性建模

### 1.1 位置-刻度模型

Weibull 分布是可靠性数据分析中常用的寿命分布. 假设其特征寿命参数和形状参数依赖于环境协变量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_p)^{\mathrm{T}}$,则进行相应变化后寿命服从位置-刻度模型:

$$\ln T=\mu(\boldsymbol{X})+\sigma(\boldsymbol{X})\varepsilon \qquad \sigma(X)>0 \tag{1}$$

其中,$T$ 为寿命;位置参数 $\mu(\boldsymbol{X})$ 和刻度参数 $\sigma(\boldsymbol{X})$ 为关于环境协变量的未知函数;随机变量 $\varepsilon$ 服从标准极值分布 $G(t)=1-\exp(-e^t)$.

给定环境协变量 $\boldsymbol{X}$ 和寿命 $t$,产品可靠度为

$$R(t\mid\boldsymbol{X})=\exp\left(-\exp\left(\frac{\ln t-\mu(\boldsymbol{X})}{\sigma(\boldsymbol{X})}\right)\right) \tag{2}$$

### 1.2 位置参数建模

由于 $\mu(\boldsymbol{X})$ 是关于环境协变量 $\boldsymbol{X}$ 的未知函数,通常假设函数类型已知,利用试验数据估计函数中的未知参数. 一般假设 $\mu(\boldsymbol{X})$ 为线性模型(对数线性模型),线性模型计算量小,便于工程应用,但难以精确表述环境协变量对位置参数的影响,而且无法描述不同环境协变量的交互作用的影响,以致可靠性分析结果偏差较大. 为了能较好地描述各协变量及其交互作用对位置参数的影响,本文利用径向基函数法来构造 $\mu(\boldsymbol{X})$.

径向基函数法的基本思想是对欧氏距离基函数加权插值[11],一般径向基函数法采用低阶线性函数作为回归函数,高斯函数 $\exp(-\alpha r^2)$ 作为径向基函数,利用该方法可得位置参数函数:

$$\mu(\boldsymbol{X})=\sum_{i=0}^{p}\beta_i x_i+\sum_{j=1}^{m-p-1}\beta_{p+j}\exp(-\alpha r_j^2) \tag{3}$$

式中,$r_j=\dfrac{\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_j\|}{\max\limits_{\Theta}\|\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_l\|}$,$\Theta=\{k,l=1,2,\cdots,m-p-1\}$,$\|\cdot\|$ 为欧氏范数;$m-1$ 为互异的环境协变量个数;$x_0=1$,$\beta_i(i=0,1,\cdots,m-1)$ 为未知参数;$\alpha$ 表示径向基函数 $\exp(-\alpha r^2)$ 的作用宽度,一般可由工程经验来确定.

### 1.3 刻度参数建模

为了方便工程应用,一般假设刻度参数为常数. 然而该假设没有理论依据,金属损伤、微电子可靠性和可靠性物理的理论与试验研究表明刻度参数依赖于应力水平[1]. 通常刻度参数随应力的降低而降低,如果忽视这个关系,则在使用条件下的可靠性估计会过于乐观[9]. 而且在许多实际应用中,假设刻度参数为常数是不适当的. 与位置参数类似,可以利用径向基函数法来拟合刻度参数. 然而与位置参数相比,刻度参数通常受环境因素的影响较小. 而且未知参数的维数过高会大大增加参数估计的难度. 为此本文不考虑环境协变量的交互作用对刻度参数的影响,利用线性模型来建立刻度参数函数

$$\sigma(\boldsymbol{X})=\left(\sum_{i=0}^{p}\beta_i' x_i\right)^{-1} \tag{4}$$

## 2 变环境数据可靠性综合评估

### 2.1 分布参数估计方法

假设变环境试验数据为

$$(t_i,\delta_i,\boldsymbol{X}_i)\quad i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

式中,$\boldsymbol{X}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ip})^{\mathrm{T}}$ 是第 $i$ 个体的环境协变量;$\delta_i$ 为示性变量,$\delta_i=1$ 表示 $t_i$ 是失效数据,$\delta_i=0$ 表示 $t_i$ 是右删失数据. 由标准极值分布函数可得其密度函数为 $g(t)=\exp(-e^t)e^t$. 令 $Y=\ln T$,$y_i=\ln t_i$,则样本 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 对应的似然函数为

$$L=\prod_{i=1}^{n}\left\{\left[\frac{1}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}g\left(\frac{y_i-\mu(\boldsymbol{X}_i)}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}\right)\right]^{\delta_i}\cdot\left[1-G\left(\frac{y_i-\mu(\boldsymbol{X}_i)}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}\right)\right]^{1-\delta_i}\right\} \tag{6}$$

由式(6)的似然函数可以求得位置和刻度参数模型系数的极大似然估计. 由于没有解析解,一般利用解非线性方程组的数值方法来求解. 然而数值方法中迭代算法的收敛性依赖于迭代初始值,如何确定适当的初始值以确保算法收敛一直是变环境数据分析的难题[12]. 针对变环境数据的特点,本文结合广义线性模型给出了一种有效的算法,用于求解位置和刻度参数模型系数的极大似然估计.

把 $G(t)=1-\exp(-e^t)$ 和 $g(t)=\exp(-e^t)\cdot e^t$,代入式(6)并对等式两边取对数可得

$$l=\sum_{i=1}^{n}\left\{\delta_i\left(-\ln\sigma(\boldsymbol{X}_i)+\frac{y_i-\mu(\boldsymbol{X}_i)}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}\right)-\exp\left(\frac{y_i-\mu(\boldsymbol{X}_i)}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}\right)\right\} \tag{7}$$

记 $x_{p+j}=\exp(-\alpha r_j^2)$ $(j=1,2,\cdots,m-p-1)$,则 $\mu(\boldsymbol{X}_i)=\sum_{j=0}^{m-1}x_{ij}\beta_j$. 记 $w_i=\exp\left(\frac{y_i-\mu(\boldsymbol{X}_i)}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}\right)$,则式(7)变为

$$l=\sum_{i=1}^{n}(\delta_i\ln w_i-w_i)-\sum_{i=1}^{n}(\delta_i\ln\sigma(\boldsymbol{X}_i)) \tag{8}$$

式(8)中的第一项可以看成是 Poisson 变量 $\delta_i$ 均值为 $w_i$ 时的对数似然函数. 把示性变量 $\delta_i$ 看成服从均值为 $w_i=\exp\left(\frac{y_i-\mu(\boldsymbol{X}_i)}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}\right)$ 的 Poisson 分布的随机变量,从而式(8)的似然函数可以看成是 Poisson 变量的广义线性表达式.

当 $\sigma(\boldsymbol{X})$ 已知时,记式(8)的似然函数为 $l(\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}l_i(\eta_i,\sigma(\boldsymbol{X}_i))$,其中 $\eta_i=\sum_{j=0}^{m-1}x_{ij}\beta_j$. 参数的极大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 满足

$$\frac{\partial\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\beta})\mid_{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}}=0 \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\beta})=\left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial\eta_1},\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial\eta_2},\cdots,\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta})}{\partial\eta_n}\right]^{\mathrm{T}}$,在 $\boldsymbol{\beta}$ 处 Taylor 展开可得

$$\frac{\partial\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\beta})+\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\eta_i}{\partial\boldsymbol{\beta}}\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial\eta_i^2}\frac{\partial\eta_i}{\partial\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}\right\}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})\doteq 0$$

记 $J(\boldsymbol{\beta})=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\eta_i}{\partial\boldsymbol{\beta}}\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial\eta_i^2}\frac{\partial\eta_i}{\partial\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}$,假设 $J(\boldsymbol{\beta})$ 可逆,则有

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}\doteq\boldsymbol{\beta}+J(\boldsymbol{\beta})^{-1}\frac{\partial\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\beta}) \tag{10}$$

因此给定初值 $\boldsymbol{\beta}$,利用式(10)进行迭代可得极大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. 在实际应用中,通常用 $J(\boldsymbol{\beta})$ 的期望 $I(\boldsymbol{\beta})$ 来代替 $J(\boldsymbol{\beta})$. 由于 $\mathrm{E}\{u_i(\boldsymbol{\beta})\}=0$,$I(\boldsymbol{\beta})$ 可简化为 $I(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{U}$,其中 $\boldsymbol{U}=\frac{\partial\boldsymbol{\eta}}{\partial\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}}$,$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{\beta})$ 是第 $i$ 个元素为 $\mathrm{E}\left(-\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\beta})}{\partial\eta_i^2}\right)$ 的对角矩阵. 用 $I(\boldsymbol{\beta})$ 代替 $J(\boldsymbol{\beta})$,则式(10)变为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{u}) \tag{11}$$

其中依赖于初值 $\boldsymbol{\beta}$ 的部分已被抑制,通过迭代可得参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的极大似然估计.

对于均值为 $w_i$ 的 Poisson 变量 $\delta_i$,记其对数似然函数为

$$l'=\sum_{i=1}^{n}(\delta_i\ln w_i-w_i) \tag{12}$$

变量 $\delta_i$ 和环境因素存在如下关系:

$$f(w_i)=\eta_i\quad i=1,2,\cdots,n \tag{13}$$

其中,$f(\cdot)$ 为已知函数,当 $f(w_i)=\ln w_i$ 时,称式(14)为广义线性模型的对数线性连接函数[13]. 由式(12)的似然函数可得 Fisher 期望信息:

$$-\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 l'}{\partial\beta_{\mathrm{r}}\partial\beta_{\mathrm{s}}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{\partial w_i}{\partial\eta_i}\right)^2}{w_i}x_{i\mathrm{r}}x_{i\mathrm{s}}=\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}\}_{\mathrm{rs}} \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{w_i}\left(\frac{\partial w_i}{\partial\eta_i}\right)^2\right\}$ 为对角矩阵,把 $\boldsymbol{W}$ 代入式(11),通过迭代可得极大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

由于 $w_i=\exp\left(\frac{y_i-\mu(\boldsymbol{X}_i)}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}\right)$,则有

$$\sigma(\boldsymbol{X}_i)\ln w_i=y_i-\eta_i\quad i=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

当 $\sigma(\boldsymbol{X}_i)$ 已知时,式(15)是一种含有偏移量 $\frac{y_i}{\sigma(\boldsymbol{X}_i)}$ 的对数线性连接函数. 利用式(11)迭代可得极大似然估计 $(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_s)$.

如果刻度参数为常数不依赖于环境因素,记为 $\sigma_0$,由式(8)的对数似然函数对 $\sigma_0$ 求导有

$$\frac{\partial l}{\partial\sigma_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\eta_i)(w_i-\delta_i)}{\sigma_0^2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\sigma_0} \tag{16}$$

已知 $(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2,\cdots,\hat{\beta}_s)$,可得 $w_i$ 的估计 $\hat{w}_i$ 和 $\eta_i$ 的估计 $\hat{\eta}_i$,由式(16)可得

$$\hat{\sigma_0}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\eta}_i)(\hat{w}_i-\delta_i)}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i} \tag{17}$$

如此循环迭代直到参数估计没有显著变化,可得参数估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\hat{\sigma}_0$.

如果刻度参数依赖于环境因素,如式(4)所示. 记式(8)的似然函数为 $l(\boldsymbol{\beta}')=\sum_{i=1}^{n}l_i(\eta_i',\boldsymbol{\beta})$,其中 $\eta_i'=\sum_{j=0}^{p}x_{ij}\beta_j'$,$\boldsymbol{\beta}$ 已知,同样可得

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}'=(\boldsymbol{U}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{U}')^{-1}\boldsymbol{U}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}'(\boldsymbol{U}'\boldsymbol{\beta}'+\boldsymbol{W}'^{-1}\boldsymbol{u}') \tag{18}$$

其中,$\boldsymbol{U}'=\frac{\partial\boldsymbol{\eta}'}{\partial\boldsymbol{\beta}'^{\mathrm{T}}}$;$\boldsymbol{u}'=\left[\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}')}{\partial\eta_1'},\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}')}{\partial\eta_2'},\cdots,\frac{\partial l(\boldsymbol{\beta}')}{\partial\eta_p'}\right]^{\mathrm{T}}$,通过迭代可得参数 $\boldsymbol{\beta}'$ 的极大似然估计.

由式(8)的似然函数对参数 $\boldsymbol{\beta}'$ 求导可得

$$\frac{\partial l}{\partial \beta'_{\mathrm{r}}}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\delta_i}{w_i}-1\right)\frac{\partial w_i}{\partial \eta'_i}x_{ir}+\frac{\delta_i}{\eta'_i}x_{ir}\right] \tag{19}$$

故 Fisher 信息阵为

$$-\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \beta'_{\mathrm{r}}\partial \beta'_{\mathrm{s}}}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{w_i}\frac{\partial w_i}{\partial \beta'_{\mathrm{r}}}\frac{\partial w_i}{\partial \beta'_{\mathrm{s}}}+\frac{w_i}{\eta'^2_i}x_{ir}x_{is}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{w_i}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta'_i}\right)^2+\frac{w_i}{\eta'^2_i}\right]x_{ir}x_{is}=\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}'\boldsymbol{X}\}_{\mathrm{rs}} \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{W}'=\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{w_i}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \eta'_i}\right)^2+\frac{w_i}{\eta'^2_i}\right\}$ 为对角矩阵，把 $\boldsymbol{W}'$ 代入式(18)，通过迭代可得极大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$.

综上所述，位置和刻度参数模型系数的估计步骤为：

1) 假设刻度参数为常数，由式(11)和式(17)通过迭代可得 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\hat{\sigma}_0$. 如果刻度参数不依赖于环境因素，则估计过程结束；否则，取 $\sigma_0$ 作为 $\sigma(\boldsymbol{X})$ 的初始估计，即 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})=\sigma_0$.

2) 已知 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$，由式(11)迭代可得位置参数模型系数的极大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$，把 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 代入式(3)可得 $\hat{\mu}(\boldsymbol{X})$.

3) 已知 $\hat{\mu}(\boldsymbol{X})$，利用式(18)迭代可得刻度参数模型系数的极大似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$，把 $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$ 代入式(4)可得 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$.

4) 如果 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$ 没有显著变化，结束迭代过程，否则转向 2).

有些环境协变量或者其交互作用可能对寿命影响很小，为了便于工程应用，需要对模型进行优化. 以位置参数为例，如果系数 $\beta_i(i=0,1,2,\cdots,m-1)$ 显著为 0，则在建模时去除该项，为此需要进行如下假设检验

$$H_0:\beta_i=0 \quad H_1:\beta_i\neq 0 \quad i=0,1,2,\cdots,m-1 \tag{21}$$

假设 $\boldsymbol{\beta}$ 可分为 $\begin{pmatrix}\beta_i\\ \boldsymbol{\beta}_{(i)}\end{pmatrix}$，为了检验式(21)，可用似然比统计量 $\lambda=-2\ln\dfrac{L(\beta_i=0,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{(i)},\tilde{\boldsymbol{\beta}}')}{L(\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{\boldsymbol{\beta}}')}$，其中 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$ 是给定 $\beta_i=0$ 时，模型系数的极大似然估计. 当 $H_0$ 成立时，在一定条件下[14]，$\lambda$ 近似服从 $\chi^2$ 分布(自由度为 1)，因此可以用 $\lambda$ 来检验假设 $H_0$. 如果不拒绝原假设，则取 $\boldsymbol{\beta}_i=0$，取 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\beta}}'$ 作为参数的极大似然估计，重新记为 $(\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{\boldsymbol{\beta}}')$；如果拒绝原假设，则极大似然估计 $(\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{\boldsymbol{\beta}}')$ 不变. 同理可对刻度参数模型系数进行检验，优化可靠性模型. 把 $(\hat{\boldsymbol{\beta}},\hat{\boldsymbol{\beta}}')$ 分别代入式(3)和(4)可得位置和刻度参数的估计 $\hat{\mu}(\boldsymbol{X})$ 和 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$.

### 2.2 可靠性综合评估

把 $\hat{\mu}(\boldsymbol{X})$ 和 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})$ 代入式(2)可得在给定环境 $\boldsymbol{X}$ 下可靠度函数的估计

$$\hat{R}(t\mid\boldsymbol{X})=\exp\left(-\exp\left(\frac{\ln t-\hat{\mu}(\boldsymbol{X})}{\hat{\sigma}(\boldsymbol{X})}\right)\right) \tag{22}$$

令 $\boldsymbol{\theta}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}')^{\mathrm{T}}$，$s=m+p+1$，当 $n$ 较大时，由极大似然估计的渐近正态性可知

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}-\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}}\approx N(0,1) \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{I}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ 为 Fisher 信息矩阵的估计. 记 $h(\boldsymbol{\theta})$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数，由式(23)可得

$$\frac{h(\hat{\boldsymbol{\theta}})-h(\boldsymbol{\theta})}{\sqrt{\boldsymbol{J}_h^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})}}\approx N(0,1) \tag{24}$$

其中 $\boldsymbol{J}_h(\boldsymbol{\theta})=\left(\frac{\partial h(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_1},\cdots,\frac{\partial h(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_s}\right)^{\mathrm{T}}$，利用式(24)可得 $h(\boldsymbol{\theta})$ 的近似区间估计[14]. 由于可靠度函数的取值区间为(0,1]，为了参数估计更好地满足正态分布的性质，需要对其进行 logistic 变化，取 $h(\boldsymbol{\theta})=\ln\left(\frac{R(t|\boldsymbol{X})}{1-R(t|\boldsymbol{X})}\right)$，给定置信水平 $\gamma$，可得可靠度的置信下限

$$R_{\mathrm{L}}=\left(1+\frac{1-R(t\mid\boldsymbol{X})}{R(t\mid\boldsymbol{X})}\exp(z_\gamma\sigma_h)\right)^{-1} \tag{25}$$

其中，$\sigma_h=\sqrt{\boldsymbol{J}_h^{\mathrm{T}}(\hat{\theta})\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{J}_h(\hat{\boldsymbol{\theta}})}$；$z_\gamma$ 为标准正态分布的 $\gamma$ 分位点.

## 3 实 例

某小型直流电动机的寿命主要受电流、电压和操作方式的影响[1]，其中操作方式分为开关型和连续型，分别记为 0 和 1. 现有该产品在 7 种不同环境下进行试验的失效数据，记电压为 $x_1$，电流为 $x_2$，操作方式为 $x_3$ 和失效时间为 $t$，如表 1 所示. 该产品的工作环境为 $\boldsymbol{X}^*=(3,0.08,0)^{\mathrm{T}}$，评估该产品在工作环境下运行 100 h 的可靠性.

拟合优度检验表明该产品的寿命服从两参数 Weibull 分布. 工程经验和数值结果表明，利用径向基函数来构建位置参数函数时，取向基函数的作用宽度为 $\alpha=5$ 可达到较好的效果. 故取 $\alpha=5$，利用径向基函数法可得位置参数函数

$$\mu(\boldsymbol{X})=\sum_{i=0}^{3}\beta_i x_i+\beta_4\exp(-5r_1^2)+$$

$$\beta_5\exp(-5r_2^2)+\beta_6\exp(-5r_3^2)$$

同时假设刻度参数依赖于环境因素,但不考虑交互作用对刻度参数的影响,取 $\sigma(\boldsymbol{X})=1\Big/\sum_{i=0}^{3}\beta_i' x_i$. 结合表 1 的数据,可得分布参数模型系数的估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}=(9.0657,-0.9462,-1.5297,-0.2171,-4.3370,3.4389)$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}'=(8.1414,-0.3029,-2.3717,-0.4063)$. 分别代入式(3)和式(4),可得在工作环境下的分布参数的估计 $\hat{\mu}(\boldsymbol{X}^*)=5.412$ 和 $\hat{\sigma}(\boldsymbol{X}^*)=0.1429$. 在工作环境下可靠性综合评估结果如表 2 所示.

**表 1　不同环境下的试验数据**

| 序号 | $x_1$/V | $x_2$/A | $x_3$ | 失效时间/h |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 0.20 | 1 | 71.29,85.24,96.01,100.68,104.21,112.65,114.85,115.03,128.66 |
| 2 | 3 | 0.48 | 1 | 51.99,74.19,74.69,91.05,91.05,100.11,112.99 |
| 3 | 6 | 0.30 | 1 | 9.03,10.62,12.38,13.92,15.48,18.82 |
| 4 | 6 | 0.65 | 1 | 4.27,5.32,5.76,6.68,7.62,8.66,8.78,9.19,10.33,10.78 |
| 5 | 3 | 0.48 | 0 | 84.57,115.79,151.20,154.85,164.55,186.24 |
| 6 | 6 | 0.65 | 0 | 6.57,8.25,8.50,8.87,8.96,9.74,9.98,11.58,12.09,13.89 |
| 7 | 3 | 0.08 | 0 | 152.74,176.32,195.35,213.32,214.07,228.26,242.18,264.56 |

**表 2　可靠性综合评估结果**

| $\boldsymbol{X}^*$ | $t$ | $\gamma$ | $\hat{R}$ | $R_L$ |
|---|---|---|---|---|
| (3,0.08,0) | 100 | 0.90 | 0.9966 | 0.9854 |

## 4　结　论

利用变环境数据研究环境因素对产品可靠性的影响,给出了一种适用于 Weibull 分布的可靠性综合评估方法,结合实例得到如下结论:

1) 利用径向基函数来拟合位置参数函数,为较好地度量环境因素及其交互作用对位置参数的影响提供了一种可行的方法.

2) 利用广义线性模型给出了适用于变环境数据的算法,用于求解位置和刻度参数模型系数估计,有效地改善了传统算法的收敛性过于依赖初始值的缺点.

3) 本文给出的可靠性综合评估方法同时考虑了环境因素对位置和刻度参数的影响,能较好地度量环境因素对可靠性的影响. 然而该评估方法的优良性有待更多的应用实例来进一步验证.

## 参考文献 (References)


[1] Wendai W, Dimitri B K. Fitting the Weibull log-linear model to accelerated life-test data [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2000, 49(2): 217-223

[2] 李凤,师义民,荆源. 两参数 Weibull 分布环境因子的 Bayes 估计[J]. 系统工程与电子技术,2008,30(1):186-189
Li Feng, Shi Yimin, Jing Yuan. Bayesian estimation for environmental factor of two parameter of Weibull distribution [J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(1): 186-189 (in Chinese)

[3] 洪东跑,马小兵,赵 宇,等. 基于比例风险模型的环境折合系数确定方法[J]. 北京航空航天大学学报,2010,36(4):443-446
Hong Dongpao, Ma Xiaobing, Zhao Yu, et al. Environment referring factor based on proportional hazards model [J] Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 36(4): 443-446 (in Chinese)

[4] Nelson W. Accelerated testing: statistical models, test plans, and data analyzes [M]. New York: John Wiley & Sons, 1990

[5] 洪东跑,赵宇,马小兵. 利用变环境试验数据的可靠性综合评估[J]. 北京航空航天大学学报,2009,35(9):1152-1155
Hong Dongpao, Zhao Yu, Ma Xiaobing. Integrated reliability assessment using varied environment test data [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2009, 35(9): 1152-1155 (in Chinese)

[6] Elsayed E A, Wang H Z. Bayes & classical estimation of environmental factors for the binomial distribution [J]. IEEE Transactions on Reliability, 1996, 45(4): 661-665

[7] Mettas A. Modeling & analysis for multiple stress-type accelerated life data [C] //Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium. Los Angeles: IEEE, 2000: 138-143

[8] Chen C K. Temperature-dependent standard deviation of log (failure time) distributions [J]. IEEE Transaction on Reliability, 1991, 40(2): 157-160

[9] Schwarz J A. Effect of temperature on the variance of the lognormal distribution of failure times due to electro migration damage [J]. Journal of Applied Physics, 1987, 61: 801-803

[10] Meeter C A. Meeker W Q. Optimum accelerated life tests with a nonconstant scale parameter [J]. Technometrics, 1994, 36(1): 71-83

[11] Buhmann M D. Radial basis functions [M]. London: Cambridge University Press, 2004

[12] McLinn J A. New analysis methods of multilevel accelerated life tests [C]// IEEE Proceedings of Annual Reliability and Maintainability Symposium. Washington DC: IEEE, 1999: 38-42

[13] Uusipaikka E. Confidence intervals in generalized regression models [M]. Boca Raton: CRC Press, 2009

[14] Bagdonavicius V, Nikulin M. Accelerated life models modeling and statistical analysis [M]. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2002


(编　辑:娄　嘉)