基于分数阶 Maxwell 模型的振荡流传热特性分析

李明震 董金钟

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

摘 要: 经求解基于分数阶 Maxwell 模型的粘弹性流体在周期性振荡压力梯度下,圆直管内的运动方程和能量方程,得到了振荡管流换热的速度分布、温度分布以及热扩散系数的解析解形式. 通过对无量纲热扩散系数的分析可知,影响粘弹性流体管内振荡流轴向换热的无量纲参数有:Womersley 数 *Wo*、Deborah 数 *De*、无量纲振幅 $\Delta x/R$ 和流体普朗特数 *Pr*. 分数阶 Maxwell 模型振荡流传热也存在粘弹性流体流动中存在的共振现象,且共振峰的数量随 *De* 数的减小而增加,发生共振的起始频率随 *De* 数的减小而降低. 共振峰值出现的位置即频率值与 *Pr* 和无量纲振幅 $\Delta x/R$ 无关.

关 键 词: 分数阶 Maxwell 模型; 振荡流; 传热; 粘弹性流体; 管流

中图分类号: TK 124

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2012)11-1562-05

Theoretical analysis of heat transfer in oscillating flows with fractional Maxwell model

Li Mingzhen Dong Jinzhong

(School of Jet Propulsion, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: By solving the momentum and energy equations of the oscillating flow with the fractional Maxwell model, which is driven by a sinusoidally varying pressure gradient, the general analytical solutions of the velocity profile, the temperature profile and the enhanced thermal diffusivity were obtained. Based upon the analysis of the enhanced thermal diffusivity, it is found that the parameters influenced the enhanced heat transfer for the problem are the Womersley number *Wo*, the Deborah number *De*, the dimensionless amplitude $\Delta x/R$ and the Prandtl number of the fluid *Pr*. The heat transfer with fractional Maxwell model exhibits resonance phenomena similar to the flow of the viscoelastic fluid. And the number of the resonance peaks increases with the decrease of *De*, the frequency of the first peak decreases with the decrease of *De*. In addition, the frequencies where the resonance occurs are not concerned with the *Pr* and $\Delta x/R$.

Key words: fractional Maxwell model; oscillating flow; heat transfer; viscoelastic fluid; pipe flow

粘弹性流体在圆管中的振荡流动一直是一个令人关注的研究课题[1-3],了解它们的典型流动和传热特征可为管道工程设计、石油输运以及强化换热等提供理论分析依据.

上世纪 80 年代以来,研究者对振荡管流强化传热和传质开展了大量的研究. 在正弦变化的非定常压力梯度作用下,管内层流扩散要比纯分子扩散高许多倍[4]. Kurzweg、赵令德、曹玉璋、朱谷君等人对振荡管流强化传热问题进行了研究,发表了一系列论文[5-7]. 他们的研究结果都认为,管内流体振荡大大强化了流体的轴向换热. 近来,关于粘弹性流体的传热特性也有了不少的研究,但使用粘弹性振荡流强化传热的研究还较少. 文献[8]对振荡流体强化传热在太阳能集热器中的应用进行了初步阐述,文献[9]对牛顿流体和 Maxwell 流体振荡流传热进行了理论分析.

收稿日期: 2011-12-23; **网络出版时间**: 2012-11-16 11:08

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20121116.1108.011.html

作者简介: 李明震(1981-),男,江苏靖江人,博士生,lmzbuaa@foxmail.com.

采用经典 Maxwell 模型描述粘弹性流体圆管振荡流动时,瞬时速度以及壁面摩擦力都会出现共振现象[2]. 由于经典 Maxwell 模型是一种线性化模型,只能描述应力和应变比较小的情况,在具体应用中有很大的局限性. 近年来,分数运算在描述粘弹性流体的运动过程中取得了巨大的成功,分数阶 Maxwell 模型克服了传统模型无法描述非线性响应的缺点,可以广泛用于粘弹性流体的相关计算[10-13].

本文采用分数阶 Maxwell 模型分析粘弹性流体在周期性振荡压力梯度下,圆直管中的层流流动和传热特性. 经过推导,得到了影响管内振荡流传热的无量纲参数,并对不同参数下的传热特性进行了分析和讨论.

1　分数阶 Maxwell 模型与控制方程

不可压粘弹性流体,在管长为 L、管半径为 R 的圆直管内,在正弦压力梯度下做层流振荡流动. 假设管两端与储热罐相连,储热罐内流体温度恒定,在 $x=0$ 处,$T=T_1$,在 $x=L$ 处,$T=T_2$,$T_1>T_2$,且管壁绝热,热量只在轴向传输.

粘弹性流体的分数阶 Maxwell 模型可由下式给出:

$$\sigma + \lambda^{\alpha}\frac{\partial^{\alpha}\sigma}{\partial t^{\alpha}} = G\lambda^{\beta}\frac{\partial^{\beta}\varepsilon}{\partial t^{\beta}} \tag{1}$$

式中,σ 为剪应力;ε 为剪应变;λ 为松弛时间;G 为剪切模量;μ 为粘性系数;α,β 为流变参数,且满足 $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant1$. 当 $\alpha=\beta=1$ 时,分数阶 Maxwell 模型可简化为经典线性 Maxwell 模型;当 $\alpha=0$,$\beta=1$ 时,分数阶 Maxwell 模型简化为牛顿流体模型.

根据分数微分运算法则,在圆柱坐标系(r,θ,z)中式(1)可写成:

$$\sigma_{rz} + \lambda^{\alpha}\frac{d^{\alpha}\sigma_{rz}}{dt^{\partial}} = G\lambda^{\beta}\frac{d^{\beta-1}}{dt^{\beta-1}}\frac{\partial u_z}{\partial r} \tag{2}$$

动量方程为

$$\rho\frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{r\partial r} \tag{3}$$

其中,p 和 ρ 分别表示流体的压力和密度.

由式(2)和式(3)可得:

$$\rho\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + \lambda^{\alpha}\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left(\rho\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) = G\lambda^{\beta}\frac{d^{\beta-1}}{dt^{\beta-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{4}$$

管内振荡流有如下边界条件:

$$\left.\begin{aligned} u_z\mid_{r=R} &= 0\\ \frac{\partial u_z}{\partial r}\mid_{r=0} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

能量方程及边界条件为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_z\frac{\partial T}{\partial z} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial r}\mid_{r=R} &= 0\\ \frac{\partial T}{\partial r}\mid_{r=0} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

其中,κ 为导温系数.

2　振荡流求解

2.1　速 度 场

设流体在正弦变化压力梯度下作振荡流动:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = P_0 e^{i\omega t} \tag{8}$$

其中,P_0 为压力梯度振幅;ω 为振荡流激振频率. 由于流动具有简谐振荡特性,故其速度随时间周期性变化,有

$$u_z(r,t) = w(r)e^{i\omega t} \tag{9}$$

代入式(4)并求解可得

$$u_z(r,t) = \frac{iP_0}{\rho\omega}\left[1 - \frac{J_0(\xi_\nu r)}{J_0(\xi_\nu R)}\right]e^{i\omega t} \tag{10}$$

其中,J_0 为第 1 类 0 阶 Bessel 函数,且

$$\xi_\nu^2 = -\frac{1+(i\lambda\omega)^{\alpha}}{\nu\lambda(i\lambda\omega)^{\beta-2}} = -\frac{1+(i\omega^*)^{\alpha}}{R^2De\cdot(i\omega^*)^{\beta-2}} = -\frac{1+(iDeWo^2)^{\alpha}}{R^2De\cdot(iDeWo^2)^{\beta-2}} \tag{11}$$

式中,$\omega^*=\lambda\omega=DeWo^2$,为无量纲振荡频率;$Wo=R\sqrt{\omega/\nu}$,$De=\lambda\nu/R^2$ 分别为 Womersley 数和 Deborah 数. Womersley 数反映了粘性扩散时间与振荡半周期之比,是边界上粘性扰动传递深度的度量. Deborah 数定义为松弛时间与粘性扩散时间之比,是粘弹性流体流变学的主要参数.

定义潮式位移量 Δx 为流体半个周期内截面平均的最大轴向位移量,即

$$\Delta x = \left|\frac{1}{\pi R^2}\int_{-\pi/2\omega}^{\pi/2\omega}\int_0^{2\pi}\int_0^R u_z(r,t)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t\right| \tag{12}$$

由式(10)可求得

$$\Delta x = \frac{2P_0}{\rho\omega^2}\left|1 - \frac{2}{\xi_\nu R}\frac{J_1(\xi_\nu R)}{J_0(\xi_\nu R)}\right| \tag{13}$$

其中,J_1 为第 1 类 1 阶 Bessel 函数.

2.2　温 度 场

假设管内流体温度有如下分布形态[14]:

$$T(z,r,t)=\gamma[z+Rg(r)\mathrm{e}^{iwt}] \tag{14}$$

代入能量方程,可得

$$\frac{d^2g(r)}{dr}+\frac{1}{r}\frac{dg(r)}{dr}-\frac{i\omega}{\kappa}g(r)=\frac{w(r)}{\kappa R} \tag{15}$$

方程(15)为非齐次零阶 Bessel 方程,通解为

$$g(r)=c_1J_0(\xi_{\mathrm{T}}r)+c_2Y_0(\xi_{\mathrm{T}}r)+g_{\mathrm{s}}(r) \tag{16}$$

其中,$\xi_{\mathrm{T}}^2=-i\omega/\kappa=-iPrWo^2/R^2$;$c_1$,$c_2$ 为待定系数;Y_0 为第 2 类 0 阶 Bessel 函数;$g_{\mathrm{s}}(r)$ 为方程(15)的特解.

假设 $g_{\mathrm{s}}(r)$ 由式(17)给定:

$$g_{\mathrm{s}}(r)=a_1J_0(\xi_\nu r)+a_2 \tag{17}$$

则 $g_{\mathrm{s}}(r)$ 满足方程(15),代入解得

$$a_1=\frac{iP_0}{\rho\omega\kappa R}\frac{1}{\xi_\nu^2-\xi_{\mathrm{T}}^2}\frac{1}{J_0(\xi_\nu R)}$$

$$a_2=\frac{iP_0}{\rho\omega\kappa R}\frac{1}{\xi_{\mathrm{T}}^2}$$

根据边界条件(7),可得式(16)中系数:

$$c_1=-\frac{iP_0}{\rho\omega\kappa R}\frac{\xi_\nu}{\xi_{\mathrm{T}}}\frac{J_1(\xi_\nu R)}{J_0(\xi_\nu R)J_1(\xi_{\mathrm{T}}R)}$$

$$c_2=0$$

将 c_1,c_2 以及特解 $g_{\mathrm{s}}(r)$ 代入式(16),得

$$g(r)=-\frac{iP_0}{\rho\omega\kappa R}\cdot\frac{1}{\xi_\nu^2-\xi_{\mathrm{T}}^2}\cdot\left[\frac{\xi_\nu}{\xi_{\mathrm{T}}}\frac{J_1(\xi_\nu R)J_0(\xi_{\mathrm{T}}r)}{J_0(\xi_\nu R)J_1(\xi_{\mathrm{T}}R)}-\frac{J_0(\xi_\nu r)}{J_0(\xi_\nu R)}-\frac{\xi_\nu^2-\xi_{\mathrm{T}}^2}{\xi_{\mathrm{T}}^2}\right] \tag{18}$$

2.3 换热分析

根据前面得到的振荡流速度分布与温度分布,可求得在某一管截面处,单位时间内通过单位面积的轴向传热量为

$$q=\frac{\omega}{\pi R^2}\cdot\left[\int_0^{2\pi/\omega}\int_0^R-\lambda_{\mathrm{f}}\frac{\partial T}{\partial z}r\mathrm{d}r\mathrm{d}t+\int_0^{2\pi/\omega}\int_0^R\rho cTu_z r\mathrm{d}r\mathrm{d}t\right] \tag{19}$$

其中,λ_{f} 为流体导热系数,c 为流体比热容.

定义当量换热系数 λ_{fe},有

$$q=-\lambda_{\mathrm{fe}}\gamma=-\kappa_{\mathrm{e}}\rho c\gamma \tag{20}$$

其中,κ_{e} 为当量热扩散系数.

忽略轴向导热项,可得当量热扩散系数 κ_{e}:

$$-\kappa_{\mathrm{e}}\gamma=\frac{\omega}{\pi R^2}\cdot\int_0^{2\pi/\omega}\int_0^R[T(z,r,t)]_{\mathrm{R}}[u_z(r,t)]_R r\mathrm{d}r\mathrm{d}t \tag{21}$$

式中下标 R 表示相应复变量的实部. 代入前面得到的温度和速度解析解,并对时间积分可得

$$\kappa_{\mathrm{e}}=-\frac{1}{2R}\int_0^R[g(r)\overline{w(r)}+w(r)\overline{g(r)}]\,r\mathrm{d}r \tag{22}$$

式中,$\overline{w(r)}$,$\overline{g(r)}$ 表示复函数 $w(r)$ 和 $g(r)$ 的共轭函数. 定义 $\zeta_\nu=\xi_\nu R$,$\zeta_{\mathrm{T}}=\xi_{\mathrm{T}}R$,可知,$\zeta_\nu$,$\zeta_{\mathrm{T}}$ 是关于 *De* 和 *Wo* 的函数.

将式(10)和式(18)代入式(22)中积分,可得无量纲热扩散系数(23):

$$\frac{\kappa_{\mathrm{e}}}{\kappa}=\frac{Pr^2Wo^4}{8}\left(\frac{\Delta x}{R}\right)^2\frac{1}{\left|1-\frac{2}{\zeta_\nu}\frac{J_1(\zeta_\nu)}{J_0(\zeta_\nu)}\right|^2}\cdot\left\{\frac{1}{\bar\zeta_{\mathrm{T}}^2-\bar\zeta_\nu^2}\frac{J_1(\bar\zeta_\nu)}{J_0(\bar\zeta_\nu)}\left[\frac{\bar\zeta_\nu}{\bar\zeta_{\mathrm{T}}^2-\zeta_\nu^2}+\frac{\bar\zeta_\nu}{\zeta_\nu^2-\bar\zeta_\nu^2}+\frac{\bar\zeta_\nu(\bar\zeta_{\mathrm{T}}^2-\bar\zeta_\nu^2)}{(\bar\zeta_\nu^2-\zeta_\nu^2)(\zeta_\nu^2-\zeta_{\mathrm{T}}^2)}-\frac{\bar\zeta_\nu\zeta_\nu}{\bar\zeta_{\mathrm{T}}(\bar\zeta_{\mathrm{T}}^2-\zeta_\nu^2)}\frac{J_1(\zeta_\nu)}{J_0(\zeta_\nu)}\frac{J_0(\bar\zeta_{\mathrm{T}})}{J_1(\bar\zeta_{\mathrm{T}})}\right]+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\zeta_{\mathrm{T}}^2-\zeta_\nu^2}\frac{J_1(\zeta_\nu)}{J_0(\zeta_\nu)}\left[\frac{\zeta_\nu}{\zeta_{\mathrm{T}}^2-\bar\zeta_\nu^2}+\frac{\zeta_\nu}{\bar\zeta_\nu^2-\zeta_\nu^2}+\frac{\zeta_\nu(\zeta_{\mathrm{T}}^2-\zeta_\nu^2)}{(\zeta_\nu^2-\bar\zeta_\nu^2)(\bar\zeta_\nu^2-\bar\zeta_{\mathrm{T}}^2)}-\frac{\zeta_\nu\bar\zeta_\nu}{\xi_{\mathrm{T}}(\zeta_{\mathrm{T}}^2-\bar\zeta_\nu^2)}\frac{J_1(\bar\zeta_\nu)}{J_0(\zeta_\nu)}\frac{J_0(\zeta_{\mathrm{T}})}{J_1(\zeta_{\mathrm{T}})}\right]\right\} \tag{23}$$

式(23)可表示粘弹性流体振荡流强化换热倍数,由式可知,对于满足分数阶 Maxwell 模型的粘弹性流体,影响其振荡流轴向强化换热的无量纲参数主要有:Womersley 数 *Wo*,Deborah 数 *De*,无量纲振幅 $\Delta x/R$ 和流体 *Pr* 数.

3 分析结果与讨论

当 $\alpha=0$,$\beta=1$ 时,分数阶 Maxwell 模型简化为牛顿流体模型. 图 1 为 $Pr=7$,0.7 时,牛顿流体无量纲热扩散系数随 *Wo* 的变化关系曲线. 图示曲线与文献[9]中曲线一致. 在无量纲振幅 $\Delta x/R$ 一定时,强化换热倍数随 *Wo* 值增加而增加.

当 $\alpha=\beta=1$ 时,分数阶 Maxwell 模型简化为经典 Maxwell 模型. 图 2 所示为在给定的无量纲振幅 $\Delta x/R=50$,*De* 分别为 0.01,0.1,1,10 时,无量纲热扩散系数 $\kappa e/\kappa$ 随无量纲振荡频率 ω^* 的变化曲线.

从图 2 中可以看出,无量纲热扩散系数随 ω^* 先急剧增加,后趋于平稳. 随着 *De* 数的变化,无量纲热扩散系数出现若干共振峰,这也从传热角度

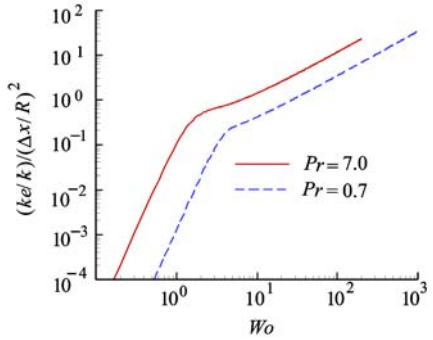

图 1　无量纲导温系数$(\kappa e/\kappa)/(\Delta x/R)^2$随 Wo 的变化曲线

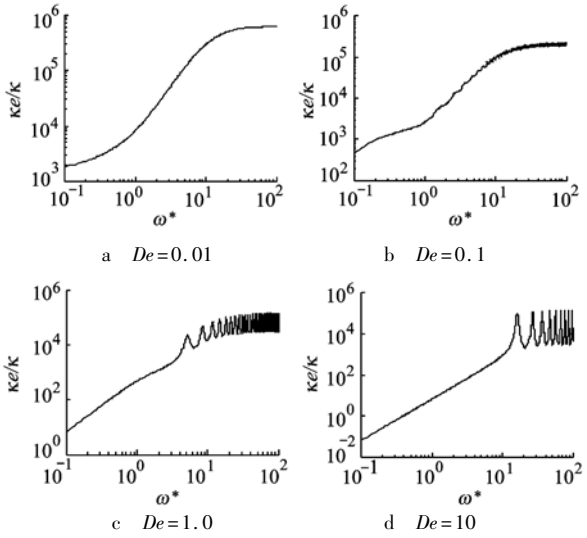

图 2　经典 Maxwell 模型无量纲热扩散系数 $\kappa e/\kappa$ 随无量纲振荡频率 ω^* 的变化曲线

说明了粘弹性流体的共振现象. 比较发现,随着 De 数的减小,共振峰数量增加,但振幅收窄. 图 2a 中 $De=0.01$ 时,可以看成是共振振幅很小使得无量纲热扩散系数近乎单调变化.

实际的粘弹性流体可由分数阶 Maxwell 模型来描述. 图 3 和图 4 分别为 $\alpha=0.5$, $\beta=0.5$ 和$\alpha=0.05$, $\beta=0.05$ 时,De 分别为 0.01,0.1,1,10 时,无量纲热扩散系数随 ω^* 的变化曲线. 从图中可以看出,分数阶 Maxwell 模型与经典 Maxwell 模型都存在共振现象. 通过比较发现,随着 ω^* 增加,无量纲热扩散系数 $\kappa e/\kappa$ 先是急剧增加,后趋于平缓. 另外,随 De 数的减小,同样频率范围内的共振峰数量增加. 这些现象都与 Maxwell 模型类似. 所不同的是,无量纲热扩散系数趋于平缓后会略有下降,且共振振幅会随 ω^* 增加而逐渐减小直至振荡消失. De 数不同时,发生共振的起始频率有所不同,De 较小时,共振发生的起始频率较小,而 De 较大时,共振发生的起始频率较大. 比较图 3 和图 4 中 α 和 β 取值不同时的分数阶模型可知,α 和 β 较小,特别是当 α 和 β 小于 0.1 时,共振现象特别强烈,而 α 和 β 较大时,共振现象较弱.

图 5 和图 6 给出了 $De=10$,不同 Pr 数和无量纲振幅 $\Delta x/R$ 时,Maxwell 流体无量纲热扩散系数随 ω^* 的变化曲线. 可以看出,共振峰值出现的位置(频率值)与 Pr 数和无量纲振幅 $\Delta x/R$ 无关,但其量值随 Pr 数和无量纲振幅 $\Delta x/R$ 的增大而增大.

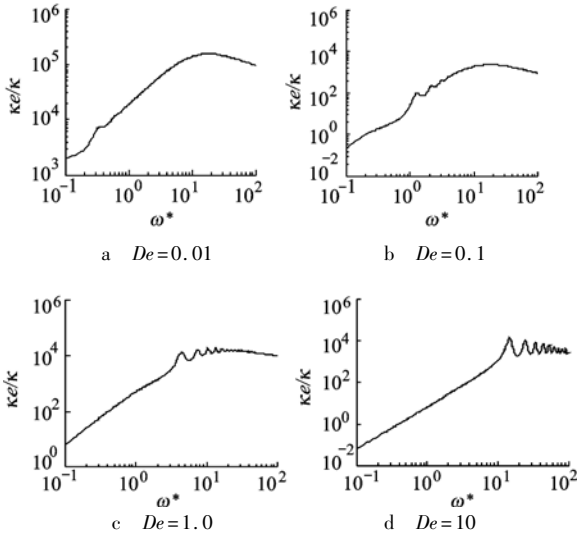

图 3　分数阶 Maxwell 模型无量纲热扩散系数 $\kappa e/\kappa$ 随无量纲振荡频率 ω^* 的变化曲线($\alpha=0.5$,$\beta=0.5$)

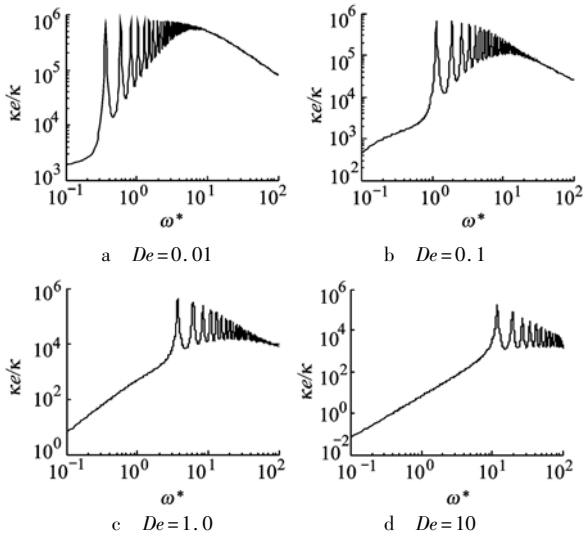

图 4　分数阶 Maxwell 模型无量纲热扩散系数 $\kappa e/\kappa$ 随无量纲振荡频率 ω^* 的变化曲线($\alpha=0.05$,$\beta=0.05$)

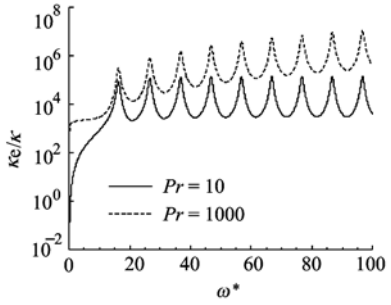

图 5　无量纲热扩散系数 $\kappa e/\kappa$ 随 ω^* 的变化曲线

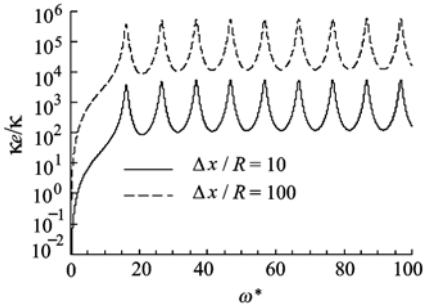

图6 无量纲热扩散系数 $\kappa e/\kappa$ 随 ω^* 的变化曲线

需要指出的是,通过上面的分析可以发现,粘弹性流体在振荡传热时,存在一个显著增强的热扩散系数,这对粘弹性流体强化换热的应用具有重要意义.

4 结 论

本文采用分数阶 Maxwell 模型分析粘弹性流体在周期性振荡压力梯度下,圆直管中的层流流动和传热特性. 经过理论推导得出了管内振荡流速度分布和温度分布的解析解,并由此得到了无量纲热扩散系数的表达式. 通过对无量纲热扩散系数的分析与讨论,主要得到以下结论:

1) 影响粘弹性流体管内振荡流轴向强化换热的无量纲参数有:Womersley 数 Wo、Deborah 数 De、无量纲振幅 $\Delta x/R$ 和流体 Pr 数.

2) 分数阶 Maxwell 模型与经典 Maxwell 模型相比,类似现象有:①无量纲热扩散系数随 ω^* 变化存在共振现象;②随着 ω^* 增加,无量纲热扩散系数先急剧增加,后趋于平缓;③随 De 数的减小,共振峰数量增加,且发生共振的起始频率也与 De 有关,De 较小时,共振发生的起始频率较小,而 De 较大时,共振发生的起始频率较大. 所不同的是,经典 Maxwell 模型无量纲热扩散系数趋于平缓后,保持较稳定的振幅;而分数阶 Maxwell 模型无量纲热扩散系数趋于平缓后会略有下降,且共振振幅会随 ω^* 增加而逐渐减小.

3) 比较 α 和 β 取值不同时的分数阶模型可知,α 和 β 较小,特别是当 α 和 β 小于 0.1 时,共振现象特别强烈,而 α 和 β 较大时,共振现象较弱.

4) Maxwell 流体的无量纲热扩散系数共振峰值出现的位置即频率值与 Pr 数和无量纲振幅 $\Delta x/R$ 无关,但其量值都随 Pr 数和无量纲振幅 $\Delta x/R$ 的增大而增大.

参考文献(References)

[1] Rahaman K D, Ramkissoon H. Unsteady axial viscoelastic pipe flows [J]. J Non-Newtonian Fluid Mech, 1995, 57: 27-38

[2] Andrienko Y A, Siginer D A, Yanovsky Yu G. Resonance behavior of viscoelastic fluids in Poiseuille flow and application to flow enhancement [J]. Int J Non-Linear Mech, 2000, 35: 95-102

[3] Tsiklauri D, Beresney I. Enhancement in dynamic response of a viscoelastic fluid flowing through a longitudinally vibrating tube [J]. Phys Rev E, 2001, 63: 046304

[4] Watson E. Diffusion in oscillatory pipe flow [J]. J Fluid Mech, 1983, 133: 233-244

[5] Kurzweg U H. Enhanced heat conduction in fluids subjected to sinusoidal oscillations [J]. J Heat Transfer, 1985, 107: 459-462

[6] 赵令德,朱谷君,曹玉璋,等. 毛细管束中层流粘性振荡流强化传热的若干问题[J]. 北京航空航天大学学报, 1991, 17(2): 57-66
Zhao Lingde, Zhu Gujun, Cao Yuzhang, et al. Some aspects of enhanced heat transfer in laminar oscillatory viscous flows within capillary bundle [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1991, 17(2): 57-66 (in Chinese)

[7] 赵令德,朱谷君,曹玉璋,等. 振荡管流换热的理论解[J]. 力学学报, 1992, 24(5): 614-619
Zhao Lingde, Zhu Gujun, Cao Yuzhang, et al. Theoretical solution on heat transfer in oscillatory pipe flow [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1992, 24(5): 614-619 (in Chinese)

[8] Lambert A A, Cuevas S, del Río J A. Enhanced heat transfer using oscillatory flows in solar collectors [J]. Solar Energy J, 2006, 80: 1296-1302

[9] Lambert A A, Cuevas S, del Río J A, et al. Heat transfer enhancement in oscillatory flows of Newtonian and viscoelastic fluids[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2009, 52: 5472-5478

[10] Hayat T, Nadeem S, Asghar S. Periodic unidirectional flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model [J]. Appl Math Comput, 2004, 151: 153-161

[11] Jia J H, Hua H X. Study of oscillating flow of viscoelastic fluid with the fractional Maxwell method [J]. ASME Trans J Fluids Eng, 2008, 130: 1-4

[12] Yin Y B, Zhu K Q. Oscillating flow of a viscoelastic fluid in a pipe with the fractional Maxwell model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 173: 231-242

[13] Yan B H, Yu L, Yang Y H. Study of oscillating flow in rolling motion with the fractional derivative Maxwell model [J]. Progress in Nuclear Energy, 2011, 53: 132-138

[14] Chatwin P C. On the longitudinal dispersion of passive contaminant in oscillatory flows in tubes [J]. J Fluid Mech, 1975, 71(3): 513-527

(编 辑:张 嵘)