飞轮隔振平台组合系统的动力学建模

黄庭轩 张 尧 徐世杰

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 为分析隔振平台对星上飞轮扰动的衰减效果,研究了飞轮隔振平台组合系统的动力学建模问题. 首先推导出含有静动不平衡量的飞轮加隔振平台组合系统的动力学模型. 从模型中得出,飞轮和平台之间存在耦合;转子的静动不平衡会体现为飞轮的多项扰动力和扰动力矩. 其次,对这些扰动项进行量级分析,并据此简化系统方程. 最后利用数值仿真将简化模型与之前的完整模型作对比,验证了此简化模型的合理性;并通过初步的整星系统仿真,说明了隔振系统对航天器姿态稳定度的改善效果.

关 键 词: 飞轮; 隔振平台; 静动不平衡; 动力学建模

中图分类号: V 412.4

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2013)01-0120-06

Dynamic modeling of combined reaction wheel and vibration isolation platform system

Huang Tingxuan Zhang Yao Xu Shijie

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: To analyze the attenuation effect of vibration isolation platform for reaction wheel (RW) disturbances, the dynamic modeling problem of the combined system which includes an imbalance RW and a passive Stewart platform with kinetic base platform was studied. The precise dynamics formulation was derived. The equations show that there are coupling effects between the RW and the platform, and rotor imbalance can also produce additional coupling disturbances other than tonal disturbances. The magnitudes of these disturbances were investigated and a reduction of the system model was made accordingly. Numerical simulations were conducted to compare the reduced system model to the complete one, which check the validity of the reduced model. And a primary simulation for whole spacecraft system shows that the vibration isolation system could improve the attitude stability effectively.

Key words: reaction wheel; vibration isolation platform; static and dynamic imbalances; dynamic modeling

飞轮是现代高精度高稳定度航天器上常用的姿态控制执行机构[1]. 但是由于转子静动不平衡、轴承缺陷、驱动电机误差等因素的影响,飞轮工作时会产生复杂的谐波扰动及噪声. 这也使得飞轮成为星上最主要的扰动源之一[2]. 对飞轮进行隔振是实现航天器高精度控制要求的一种有效技术手段. Chandra X-ray 观测平台上就使用了一种六自由度隔振平台对每个飞轮进行单独隔振[3]. 这一平台还将在 JWST 上得到应用,作为其两级隔振系统中的第 1 级,衰减飞轮的扰动[4].

由此可见,飞轮和隔振系统经常作为一个组合系统而出现. 对其进行精确数学建模有助于分析系统的动力学特性及飞轮振动对航天器造成的影响. 目前,国内外的研究者较多关注的是飞轮扰

收稿日期: 2011-11-06; **网络出版时间**: 2013-01-14 16:40

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20130114.1640.010.html

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10902003); 研究生科技创新实践基金资助项目(YCSJ-01-201204)

作者简介: 黄庭轩(1985-),男,河北石家庄人,博士生,tingxuan.huang@yahoo.com.cn.

动或隔振平台的独立动力学特性. 如参考文献[2]深入研究了飞轮扰动的建模问题,但主要以飞轮固定安装的地面试验为基础. 隔振平台的建模方法虽已比较成熟,但在航天应用中则主要局限于机械阻抗、解耦的低通滤波器、有限元等方法进行集成建模和抖动分析[1,5]. 这些研究并没有将飞轮和隔振平台看作一个组合系统,只是将扰动模型和隔振系统模型进行直接集成,忽略了彼此之间的耦合以及星体运动的影响. 实际上,一些研究显示这些因素确实会在一定程度上改变飞轮的扰动特性. 如赵煜等人研究了柔性安装条件对反作用轮扰动的影响[6]. 参考文献[2]利用简化模型对 RWA 和航天器之间的动力学耦合特性进行了初步分析. 参考文献[7]分析了反作用轮安装于隔振器上之后出现的章动现象. 因此,有必要完整考虑这些影响因素,建立组合系统的动力学模型.

本文旨在给出一种考虑飞轮和隔振平台彼此之间耦合影响的整体式分析思路,提供组合系统的动力学模型,并进行合理简化. 一方面为下一步的动力学特性分析以及隔振平台设计提供依据,另一方面也为整星系统研究奠定理论基础.

1　系统描述及坐标系

组合系统由飞轮和隔振平台组成. 飞轮部分主要考虑了转子静动不平衡的影响. 平台部分则采用了以 Stewart 平台为基础的被动式多杆隔振平台. 该平台每根支杆由上部、下部和连接二者的弹簧和阻尼器构成,支杆两端分别采用球铰和万向铰与界面和基础连接. 为建模方便,本文将系统重新划分为以下几个部分:上平台系统、支杆、下平台. 其中上平台系统包括上平台和飞轮.

坐标系描述为:①惯性坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{e}}(O_{\mathrm{e}}x_{\mathrm{e}}y_{\mathrm{e}}z_{\mathrm{e}})$;②上平台固连坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}(O_{\mathrm{p}}x_{\mathrm{p}}y_{\mathrm{p}}z_{\mathrm{p}})$;③下平台固连坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{b}}(O_{\mathrm{b}}x_{\mathrm{b}}y_{\mathrm{b}}z_{\mathrm{b}})$;④第 i 根支杆的下支杆固连坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{d}i}(O_{\mathrm{d}i}x_{\mathrm{d}i}y_{\mathrm{d}i}z_{\mathrm{d}i})$;⑤第 i 根支杆的上支杆固连坐标系 $\boldsymbol{f}_{ui}(O_{ui}x_{ui}y_{ui}z_{ui})$;⑥转子准几何体坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{f}}(O_{\mathrm{f}}x_{\mathrm{f}}y_{\mathrm{f}}z_{\mathrm{f}})$;⑦转子几何体坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{w}}(O_{\mathrm{w}}x_{\mathrm{w}}y_{\mathrm{w}}z_{\mathrm{w}})$;⑧转子惯量主轴坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(O_{\mathrm{I}}x_{\mathrm{I}}y_{\mathrm{I}}z_{\mathrm{I}})$. 其具体定义可参考文献[8]. 转子几何中心 O_{f} 到转子质心 O_{I} 的矢径 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{w}}$ 表征了转子的静不平衡,$\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{w}}$ 之间的旋转角度表征了转子的动不平衡.

为统一表示方式,定义 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{ab}}$ 为坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{b}}$ 到 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{a}}$ 的转换矩阵,$\boldsymbol{r}_{\mathrm{ab}}$ 为 O_{b} 到 O_{a} 的矢径. 转子静不平衡量在 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{w}}$ 下的表示为 $\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{w}}=[\gamma \quad \xi \quad \zeta]^{\mathrm{T}}$. 忽略高阶小量,则转子的动不平衡量可以表示为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{Iw}}=\boldsymbol{A}_y(\mu)\boldsymbol{A}_z(\eta)\approx\begin{bmatrix}1 & \eta & -\mu\\ -\eta & 1 & 0\\ \mu & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中,μ,η 为从 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{w}}$ 系到 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}$ 系的欧拉转角,均为小角度[8].

2　组合系统动力学建模

本文组合系统的动力学建模思路如下:利用 Newton-Euler 法分别建立支杆、上平台系统与下平台的动力学方程,根据上下平台的位置与姿态信息确定支杆的运动,铰接点处的作用力与力矩由支杆动力学给出.

2.1　支杆动力学方程

2.1.1　支杆运动学

设平台一共有 N 根支杆. 用 $\boldsymbol{p}_i$ 表示第 i 根支杆与上平台铰接点相对 O_{p} 的位置矢量,用 $\boldsymbol{q}_i$ 表示第 i 根支杆与下平台铰接点相对 O_{b} 的位置矢量,记 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{p}}$ 为 O_{p} 相对惯性系的位置矢量,$\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}$ 为 O_{b} 相对惯性系的位置矢量. 定义支杆向量,并计算其一阶和二阶绝对导数如下:

$$\boldsymbol{S}_i=\boldsymbol{r}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{ep}}\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{r}_{\mathrm{b}}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{eb}}\boldsymbol{q}_i$$

$$\dot{\boldsymbol{S}}_i=\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{ep}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{p}_i-\dot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{b}}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{eb}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}^{\times}\boldsymbol{q}_i$$

$$\ddot{\boldsymbol{S}}_i=\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{p}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{ep}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{p}_i+\boldsymbol{A}_{\mathrm{ep}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{p}_i-\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{b}}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{eb}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}}^{\times}\boldsymbol{q}_i-\boldsymbol{A}_{\mathrm{eb}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}^{\times}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}^{\times}\boldsymbol{q}_i$$

其中,$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}},\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}$ 分别为上下平台相对惯性系的角速度;"×"表示叉乘矩阵.

杆长和沿杆轴向的单位矢量为

$$l_i=\|\boldsymbol{S}_i\| \qquad \boldsymbol{s}_i=\boldsymbol{S}_i/l_i$$

经计算可得,支杆的角速度和角加速度为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{li}&=\boldsymbol{\omega}_{li1}+\omega_{li2}\boldsymbol{s}_i\\ \boldsymbol{\varepsilon}_{li}&=\boldsymbol{\varepsilon}_{li1}+\varepsilon_{li2}\boldsymbol{s}_i\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{\omega}_{li1},\boldsymbol{\varepsilon}_{li1}$ 为垂直于支杆方向的角速度和角加速度;$\omega_{li2}\boldsymbol{s}_i,\varepsilon_{li2}\boldsymbol{s}_i$ 为沿杆方向的角速度和角加速度.

则上下支杆集中质量处的加速度分别为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{ui}&=\boldsymbol{a}_{\mathrm{q}i}+\boldsymbol{\varepsilon}_{li}^{\times}\boldsymbol{r}_{ui}+\boldsymbol{\omega}_{li}^{\times}\boldsymbol{\omega}_{li}^{\times}\boldsymbol{r}_{ui}+\ddot{l}_i\boldsymbol{s}_i+2\boldsymbol{\omega}_{li}^{\times}\dot{l}_i\boldsymbol{s}_i\\ \boldsymbol{a}_{\mathrm{d}i}&=\boldsymbol{a}_{\mathrm{q}i}+\boldsymbol{\varepsilon}_{li}^{\times}\boldsymbol{r}_{\mathrm{d}i}+\boldsymbol{\omega}_{li}^{\times}\boldsymbol{\omega}_{li}^{\times}\boldsymbol{r}_{\mathrm{d}i}\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中,$\boldsymbol{a}_{\mathrm{q}i}=\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{b}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{eb}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{b}}^{\times}\boldsymbol{q}_i+\boldsymbol{A}_{\mathrm{eb}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}^{\times}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}^{\times}\boldsymbol{q}_i$ 为点 $\boldsymbol{O}_{\mathrm{d}i}$ 的加速度;$\boldsymbol{r}_{ui}$ 为 $O_{\mathrm{d}i}$ 到上支杆集中质量处的矢径;$\boldsymbol{r}_{\mathrm{d}i}$ 为 $O_{\mathrm{d}i}$ 到下支杆集中质量处的矢径;$\dot{l}_i,\ddot{l}_i$ 分别为支杆的伸长速度和伸长加速度.

2.1.2 支杆动力学

以 O_{di} 为参考点,利用动量定理和动量矩定理,可得整个支杆的动力学方程如下:

$$\left.\begin{aligned} &m_{ui}\boldsymbol{a}_{ui}+m_{di}\boldsymbol{a}_{di}=\boldsymbol{F}_{si}+\boldsymbol{F}_{ui}\\ &(\boldsymbol{I}_{ui}+\boldsymbol{I}_{di})\boldsymbol{\varepsilon}_{li}+\boldsymbol{\omega}_{li}^{\times}(\boldsymbol{I}_{ui}+\boldsymbol{I}_{di})\boldsymbol{\omega}_{li}=\\ &\quad\boldsymbol{S}_{li}^{\times}\boldsymbol{F}_{si}+M_{ui}\boldsymbol{h}_i-c_{si}(\boldsymbol{\omega}_{li}-\boldsymbol{A}_{ep}\boldsymbol{\omega}_p)-\\ &\quad c_{ui}(\boldsymbol{\omega}_{li}-\boldsymbol{A}_{eb}\boldsymbol{\omega}_b)-(m_{ui}\boldsymbol{r}_{ui}+m_{di}\boldsymbol{r}_{di})^{\times}\boldsymbol{a}_{qi} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中,m_{ui},m_{di} 分别为上下支杆的集中质量;$\boldsymbol{I}_{ui}$,$\boldsymbol{I}_{di}$ 分别为上下支杆关于 O_{di} 的转动惯量,表示在惯性系下;$\boldsymbol{F}_{si}$,$\boldsymbol{F}_{ui}$ 分别为球铰和万向铰对支杆的约束力;$M_{ui}\boldsymbol{h}_i$ 为万向铰对支杆的约束力矩,$\boldsymbol{h}_i$ 为该力矩方向的单位矢量;c_{si} 和 c_{ui} 分别为球铰和万向铰的粘性阻尼系数.

由式(4)可分别解出:

$$M_{ui}=\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_i/(\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_i) \tag{5}$$

$$\boldsymbol{F}_{si}=X_i\boldsymbol{s}_i-(\boldsymbol{s}_i^{\times}\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{s}_i^{\times}M_{ui}\boldsymbol{h}_i)/l_i \tag{6}$$

$$\boldsymbol{F}_{ui}=m_{ui}\boldsymbol{a}_{ui}+m_{di}\boldsymbol{a}_{di}-\boldsymbol{F}_{si} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_i=&(\boldsymbol{I}_{ui}+\boldsymbol{I}_{di})\boldsymbol{\varepsilon}_{li}+\boldsymbol{\omega}_{li}^{\times}(\boldsymbol{I}_{ui}+\boldsymbol{I}_{di})\boldsymbol{\omega}_{li}+\\ &c_{si}(\boldsymbol{\omega}_{li}-\boldsymbol{A}_{ep}\boldsymbol{\omega}_p)+c_{ui}(\boldsymbol{\omega}_{li}-\boldsymbol{A}_{eb}\boldsymbol{\omega}_b)+\\ &(m_{ui}\boldsymbol{r}_{ui}+m_{di}\boldsymbol{r}_{di})^{\times}\boldsymbol{a}_{qi} \end{aligned}$$

$$X_i=\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{si}=m_{ui}\boldsymbol{s}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{ui}+k_i(l_i-l_{i0})+c_i\dot{l}_i$$

其中,k_i 为支杆的刚度系数;c_i 为支杆的阻尼系数;l_{i0} 为标称杆长.

2.2 上平台系统动力学方程

由于飞轮转子存在静动不平衡,上平台系统的质心位置是不断变化的. 为了建模方便,选取上平台固连坐标系的原点 O_p 为参考点,建立上平台系统的绝对动量和动量矩:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}=&\boldsymbol{p}_p+\boldsymbol{p}_w=\\ &m_p\boldsymbol{v}_p-m_p\boldsymbol{\rho}_p^{\times}\boldsymbol{\omega}_p+m_w(\boldsymbol{v}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{r}_{fp})-\\ &m_w\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w^{\times}\boldsymbol{A}_{wp}(\boldsymbol{\omega}_p+\boldsymbol{A}_{pf}\boldsymbol{\Omega}) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}^{O_p}=&\boldsymbol{h}_p^{O_p}+\boldsymbol{h}_w^{O_p}=\\ &m_p\boldsymbol{\rho}_p^{\times}\boldsymbol{v}_p+\boldsymbol{I}_{pp}^{O_p}\boldsymbol{\omega}_p+\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{I}_{ww}^{O_f}\boldsymbol{A}_{wp}(\boldsymbol{\omega}_p+\boldsymbol{A}_{pf}\boldsymbol{\Omega})+\\ &m_w\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}(\boldsymbol{v}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{r}_{fp}+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w+\\ &\boldsymbol{A}_{pf}\boldsymbol{\Omega}^{\times}\boldsymbol{A}_{fp}\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w)+m_w\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w^{\times}\boldsymbol{A}_{wp}(\boldsymbol{v}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{r}_{fp}) \end{aligned} \tag{9}$$

其中,m_p,m_w 分别为上平台和转子质量;$\boldsymbol{I}_{pp}^{O_p}$ 为在 $\boldsymbol{f}_p$ 系下表示的上平台惯量矩阵;$\boldsymbol{v}_p$ 为点 O_p 的绝对速度;$\boldsymbol{\rho}_p$ 为 O_p 到上平台质心的矢径;$\boldsymbol{\Omega}$ 为转子相对上平台的旋转角速度,在 $\boldsymbol{f}_f$ 和 $\boldsymbol{f}_w$ 下的表示相同;$\boldsymbol{I}_{ww}^{O_f}=\boldsymbol{A}_{wI}\boldsymbol{I}_{wI}^{O_I}\boldsymbol{A}_{Iw}+m_w(\boldsymbol{\rho}_w^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}_w\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{\rho}_w\boldsymbol{\rho}_w^{\mathrm{T}})$,为 $\boldsymbol{f}_w$ 系下表示的转子相对于其几何中心的惯量矩阵;$\boldsymbol{I}_{wI}^{O_I}=\mathrm{diag}(I_{wIx}\quad I_{wIy}\quad I_{wIz})$,为 $\boldsymbol{f}_I$ 系下表示的转子相对于其质心的惯量矩阵.

将式(8)、式(9)代入动量定理和动量矩定理,可推出上平台系统的动力学方程. 整理后如下:

$$\left.\begin{aligned} &m_p(\dot{\boldsymbol{v}}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{v}_p+\dot{\boldsymbol{\omega}}_p^{\times}\boldsymbol{\rho}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{\rho}_p)=\\ &\quad\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_{a1}+\boldsymbol{F}_{a2}+\boldsymbol{F}_d\\ &\boldsymbol{I}_{pp}^{O_p}\dot{\boldsymbol{\omega}}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{I}_{pp}^{O_p}\boldsymbol{\omega}_p+m_p\boldsymbol{\rho}_p^{\times}(\dot{\boldsymbol{v}}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{v}_p)=\\ &\quad\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}_{a1}+\boldsymbol{T}_{a2}+\boldsymbol{T}_c+\boldsymbol{T}_{d1}+\boldsymbol{T}_{d2} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中方程右边各项的具体表示为

$$\boldsymbol{F}_{a1}=-m_w(\dot{\boldsymbol{v}}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{v}_p+\dot{\boldsymbol{\omega}}_p^{\times}\boldsymbol{r}_{fp}+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{r}_{fp})$$

为飞轮对上平台的耦合力;

$$\boldsymbol{F}_{a2}=-m_w(\dot{\boldsymbol{\omega}}_p^{\times}+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{\omega}_p^{\times})\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w$$

为转子静不平衡产生的附加耦合力;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_d=&-2m_w\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\Omega}^{\times}\boldsymbol{\rho}_w-\\ &m_w\boldsymbol{A}_{pw}(\dot{\boldsymbol{\Omega}}^{\times}+\boldsymbol{\Omega}^{\times}\boldsymbol{\Omega}^{\times})\boldsymbol{\rho}_w \end{aligned}$$

为转子静不平衡产生的扰动力,包括上平台系统质心位置变化产生的科氏力、切向力与离心力;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{a1}=&-(\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{I}_{ww}^{O_f}\boldsymbol{A}_{wp}-\boldsymbol{m}_w\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}\boldsymbol{r}_{fp}^{\times})\dot{\boldsymbol{\omega}}_p-\\ &\boldsymbol{\omega}_p^{\times}(\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{I}_{ww}^{O_f}\boldsymbol{A}_{wp}-m_w\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}\boldsymbol{r}_{fp}^{\times})\boldsymbol{\omega}_p-m_w\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}(\dot{\boldsymbol{v}}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{v}_p) \end{aligned}$$

为飞轮对上平台的耦合力矩;

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{a2}=&m_w[\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w^{\times}\boldsymbol{A}_{wp}+(\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w^{\times}\boldsymbol{A}_{wp})^{\mathrm{T}}]\dot{\boldsymbol{\omega}}_p+\\ &m_w\boldsymbol{\omega}_p^{\times}[\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w^{\times}\boldsymbol{A}_{wp}+(\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w^{\times}\boldsymbol{A}_{wp})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{\omega}_p-\\ &m_w\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{\rho}_w^{\times}\boldsymbol{A}_{wp}(\dot{\boldsymbol{v}}_p+\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{v}_p) \end{aligned}$$

为转子静不平衡产生的附加耦合力矩;

$$\boldsymbol{T}_c=-\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{I}_{ww}^{O_f}\dot{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\omega}_p^{\times}\boldsymbol{A}_{pw}\boldsymbol{I}_{ww}^{O_f}\boldsymbol{\Omega}$$

为飞轮产生的直接控制力矩与耦合控制力矩;

$$\boldsymbol{T}_{d1}=\boldsymbol{r}_{fp}^{\times}\boldsymbol{F}_d$$

为转子静不平衡产生的扰动力矩;

$$\boldsymbol{T}_{d2}=\boldsymbol{A}_{pw}[\boldsymbol{I}_{ww}^{O_f}\boldsymbol{\Omega}^{\times}+(\boldsymbol{I}_{ww}^{O_f}\boldsymbol{\Omega}^{\times})^{\mathrm{T}}](\boldsymbol{A}_{wp}\boldsymbol{\omega}_p+\boldsymbol{\Omega})$$

为转子动不平衡产生的扰动力矩;

$$\boldsymbol{F}=-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_{pe}\boldsymbol{F}_{si}$$

$$\boldsymbol{T}=-\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i^{\times}\boldsymbol{A}_{pe}\boldsymbol{F}_{si}+\sum_{i=1}^{N}c_{si}(\boldsymbol{A}_{pe}\boldsymbol{\omega}_{li}-\boldsymbol{\omega}_p)$$

分别为球铰对上平台的作用力与力矩.

2.3 下平台动力学方程

选择 O_b 为参考点. 由动量定理和动量矩定理,可以推出下平台系统的动力学方程:

$$\left.\begin{aligned} &m_b(\dot{\boldsymbol{v}}_b+\boldsymbol{\omega}_b^{\times}\boldsymbol{v}_b+\dot{\boldsymbol{\omega}}_b^{\times}\boldsymbol{\rho}_b+\boldsymbol{\omega}_b^{\times}\boldsymbol{\omega}_b^{\times}\boldsymbol{\rho}_b)=\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{F}_{ext}\\ &\boldsymbol{I}_{bb}^{O_b}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b+\boldsymbol{\omega}_b^{\times}\boldsymbol{I}_{bb}^{O_b}\boldsymbol{\omega}_b+m_b\boldsymbol{\rho}_b^{\times}(\dot{\boldsymbol{v}}_b+\boldsymbol{\omega}_b^{\times}\boldsymbol{v}_b)=\boldsymbol{T}'+\boldsymbol{T}_{ext} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{F}' = -\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_{\mathrm{be}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{u}i} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{T}' = -\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{q}_i^{\times}\boldsymbol{A}_{\mathrm{be}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{u}i} + \sum_{i=1}^{N}c_{\mathrm{u}i}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{be}}\boldsymbol{\omega}_{li} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{b}}) - \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{A}_{\mathrm{be}}M_{\mathrm{u}i}\boldsymbol{h}_i \tag{13}$$

分别为万向铰对下平台的作用力和力矩;$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ext}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{ext}}$ 分别为下平台所受的外部环境力和力矩;m_{b} 为下平台质量;$\boldsymbol{I}_{\mathrm{bb}}^{O_{\mathrm{b}}}$ 为在 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{b}}$ 系下表示的下平台惯量矩阵;$\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{b}}$ 为下平台质心相对参考点 O_{b} 的矢径;$\boldsymbol{v}_{\mathrm{b}}$ 为参考点 O_{b} 的绝对速度.

方程式(4)、式(10)、式(11)构成了整个组合系统的动力学方程.

3　扰动分析及模型简化

3.1　扰动分析

从上平台系统动力学方程式(10)可以看出,飞轮与上平台之间存在耦合. 当不考虑转子静动不平衡时,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a1}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a1}}$ 即为锁定飞轮对上平台的耦合力与力矩,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{c}}$ 则为飞轮高速旋转产生的输出力矩,此 3 项共同表征了飞轮对上平台的耦合作用. 这和以飞轮为执行机构的航天器动力学是一样的. 如果转子存在静动不平衡,则会产生作用于平台上的附加扰动力和力矩,即 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a2}}$,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a2}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d1}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d2}}$. 此外,由于转子在几何体坐标系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{w}}$ 下的惯量矩阵不是理想的对角阵,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a1}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{c}}$ 项也会出现相应的微小扰动.

从量级上看,转子静不平衡量一般在 10^{-6} m,以 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{w}}$ 之间旋转角度表征的动不平衡量一般为 10^{-6} rad,二者可以视为同阶小量. 另外,飞轮一般工作在 $10\sim10^2$ r/s 的转速范围内,$\boldsymbol{\Omega}$ 远远高于 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}$,$\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}$ 的量级. 可见扰动项的大小主要取决于静动不平衡量和 $\boldsymbol{\Omega}$. 为方便比较,以下用符号 $O(\cdot)$ 来表征同阶量,静动不平衡量统一用 ρ_{w} 表示,$\|\boldsymbol{\Omega}\|=\Omega$. 则各扰动项的大小为:$\|\boldsymbol{F}_{\mathrm{a2}}\|\sim O(\rho_{\mathrm{w}})$,$\|\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}\|\sim O(\rho_{\mathrm{w}}\Omega^2)$,$\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{a2}}\|\sim O(\rho_{\mathrm{w}})$,$\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{d1}}\|\sim O(\rho_{\mathrm{w}}\Omega^2)$,$\|\boldsymbol{T}_{\mathrm{d2}}\|\sim O(\rho_{\mathrm{w}}\Omega^2)$(以上符号并非在严格的数学意义下使用,仅约略表示量级大小). 其中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$ 的量级主要由离心力决定,而科氏力与切向力则要小很多,分别与 $O(\rho_{\mathrm{w}}\Omega)$ 和 $O(\rho_{\mathrm{w}}\dot{\Omega})$ 同阶. 相应地,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d1}}$ 的大小也由离心力矩来决定. 由此可见,转子不平衡产生的耦合扰动($\boldsymbol{F}_{\mathrm{a2}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a2}}$)要远远小于高速旋转产生的直接扰动($\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d1}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d2}}$).

从频率上看,静动不平衡产生的扰动均为与飞轮转速同频的扰动.

以上分析结果可以用表 1 来表示.

表 1　上平台系统动力学扰动分析

作用项	量　级	频　率
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a1}}$		
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a2}}$	$O(\rho_{\mathrm{w}})$	Ω
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$	$O(\rho_{\mathrm{w}}\Omega^2)$	Ω
$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a1}}$		
$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a2}}$	$O(\rho_{\mathrm{w}})$	Ω
$\boldsymbol{T}_{\mathrm{c}}$		
$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d1}}$	$O(\rho_{\mathrm{w}}\Omega^2)$	Ω
$\boldsymbol{T}_{\mathrm{d2}}$	$O(\rho_{\mathrm{w}}\Omega^2)$	Ω

3.2　简化模型

基于上述分析,可对上平台系统模型作以下简化:①忽略耦合扰动项 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a2}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a2}}$;②忽略 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{d}}$ 中的科氏力与切向力,以及 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{d1}}$ 中的相应力矩;③由于 $\|\boldsymbol{\Omega}\|\gg\|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}\|$,忽略 $\boldsymbol{T}_{\mathrm{d2}}$ 中的 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}$ 相关项;④忽略静动不平衡引起的飞轮惯量变化,将 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a1}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{a1}}$ 合并到上平台相关项的计算中.

简化后的上平台系统动力学方程为

$$\left.\begin{aligned} &m(\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{dw}}\\ &\boldsymbol{I}^{O_{\mathrm{p}}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{I}^{O_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}} + m\boldsymbol{\rho}^{\times}(\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{p}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}) =\\ &\quad \boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{cw}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{dw}} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{dw}} = -m_{\mathrm{w}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{pw}}\boldsymbol{\Omega}^{\times}\boldsymbol{\Omega}^{\times}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{w}} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{cw}} = -\boldsymbol{A}_{\mathrm{pw}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{wI}}^{O_{\mathrm{I}}}\dot{\boldsymbol{\Omega}} - \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}^{\times}\boldsymbol{A}_{\mathrm{pw}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{wI}}^{O_{\mathrm{I}}}\boldsymbol{\Omega} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{dw}} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{fp}}^{\times}\boldsymbol{F}_{\mathrm{dw}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{pw}}[\boldsymbol{I}_{\mathrm{ww}}^{O_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\Omega}^{\times} + (\boldsymbol{I}_{\mathrm{ww}}^{O_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\Omega}^{\times})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{\Omega} \tag{17}$$

其中,$m=m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{w}}$,为上平台系统质量;$\boldsymbol{I}^{O_{\mathrm{p}}}=\boldsymbol{I}_{\mathrm{pp}}^{O_{\mathrm{p}}}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{wI}}^{O_{\mathrm{I}}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{fp}}+m_{\mathrm{w}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{fp}}\boldsymbol{E}_3-\boldsymbol{r}_{\mathrm{fp}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{fp}}^{\mathrm{T}})$,相当于理想飞轮锁定状态下的上平台系统相对于 O_{p} 的转动惯量,表示在 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{p}}$ 系下;$\boldsymbol{\rho}=(m_{\mathrm{p}}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{w}}\boldsymbol{r}_{\mathrm{fp}})/m$,为理想情况下上平台系统质心相对参考点 O_{p} 的位置矢量;$\boldsymbol{T}_{\mathrm{cw}}$ 为飞轮理想控制力矩;$\boldsymbol{F}_{\mathrm{dw}}$,$\boldsymbol{T}_{\mathrm{dw}}$ 分别为飞轮扰动力与力矩.

对于扰动模型,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{dw}}$ 为转子静不平衡产生的径向扰动力,幅值与转速平方成正比,频率与转速相同;$\boldsymbol{T}_{\mathrm{dw}}$ 包括 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{dw}}$ 产生的扰动力矩和转子动不平衡扰动力矩两部分,其中后者的幅值也与转速平方成正比,频率也与转子转速相同. 这与文献[2]给出的飞轮扰动解析模型一致.

4　数值仿真

基于组合系统的完整模型和简化模型,进行数值仿真. 仿真中,平台采用立方体构型,下平台固连于星体上,将下平台与星本体统称为下平台系统;飞轮对称安装于平台上,转子轴向垂直于上

平台界面. 其中,飞轮参数主要参考 ITHACO E 型飞轮;平台参数根据飞轮的尺寸进行设计,并保证一定的隔振效果. 主要的仿真参数设置如下:

飞轮质量:$m_w = 10.6$ kg;飞轮静动不平衡量:0.38 g·cm,24.758 g·cm^2;飞轮最大角动量:$h_{w\max} = 130$ N·m·s;上平台质量惯量:$m_p = 2$ kg,$\boldsymbol{I}_{pp}^{O_p} = \mathrm{diag}[0.0125 \quad 0.0125 \quad 0.025]$ kg·m^2;支杆刚度阻尼系数:$k = 10\,000$ N/m,$c = 120$ (N·s)/m;下平台系统质量惯量[9]:$m_b = 1\,000$ kg,$\boldsymbol{I}_{bb}^{O_b} = \begin{bmatrix} 1\,100 & -20 & -10 \\ -20 & 900 & -15 \\ -10 & -15 & 800 \end{bmatrix}$ kg·m^2.

4.1 恒定转速

设定飞轮转速为 50 Hz. 图 1 为上平台所受的扰动力矩和扰动力,以及简化模型与其的差值. 可以看出,由简化模型计算出的力矩和力与完整模型吻合得很好,差值分别在 10^{-8} N·m 和 10^{-5} N 量级. 这与理论分析的结果相一致,说明简化过程对小量的忽略是合理的,简化后的方程能够较好地表征组合系统的动力学特性.

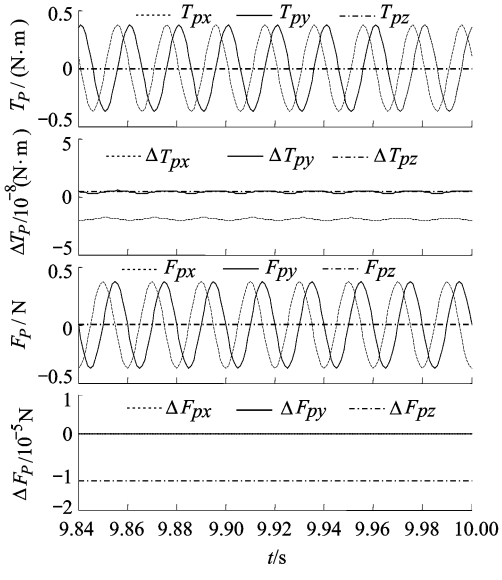

图 1 上平台扰动力(矩)及差值
(1,3 子图为完整模型仿真结果,
2,4 子图为简化模型与完整模型的差值)

4.2 变转速

由于飞轮转速在实际工作中并非恒定不变,为了全面反映隔振平台对飞轮扰动的衰减效果,设定飞轮转速由 0 r/s 恒加速到 100 r/s. 为了便于观察这一过程中的扰动力矩,仿真中设定基础为固定情况. 图 2 为上下平台在 x 轴方向上受到的扰动力矩. 可以看出,在 20 Hz 以上的转速范围内,飞轮的扰动力矩都可以得到有效地衰减.

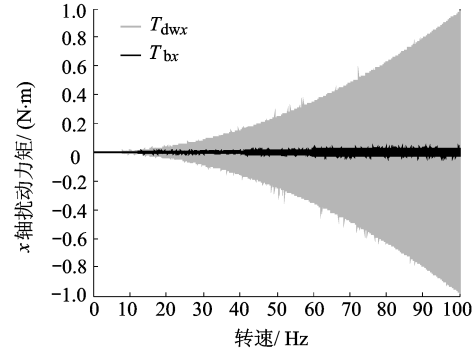

图 2 x 轴扰动力矩及衰减情况

4.3 整星系统仿真

本部分对飞轮和隔振平台作用到航天器上的效果进行初步分析. 仿真中航天器为刚体卫星,采用三正交+1 斜装飞轮作为姿态控制系统执行机构,用 PID 进行三轴稳定控制. 飞轮和平台的参数设置同前,星体参数同之前的下平台系统. 设定正交飞轮的初始转速为 50 r/s,星本体初始姿态角偏差为

$$\varphi_{b0} = 3^\circ \quad \theta_{b0} = 3^\circ \quad \psi_{b0} = 3^\circ$$

为了观察飞轮扰动对航天器稳定度的影响,以及隔振平台的衰减效果,对不加隔振平台和加隔振平台两种情况进行对比分析,如图 3、图 4 所示.

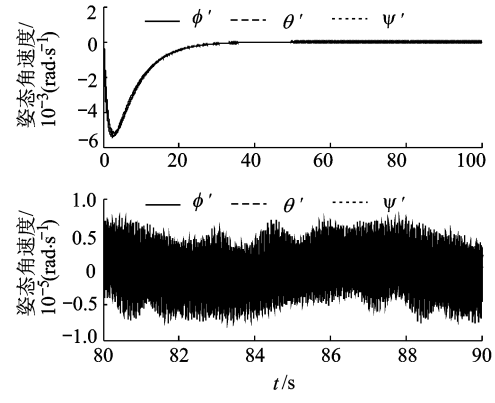

图 3 星本体姿态角速度及其放大图(无隔振)

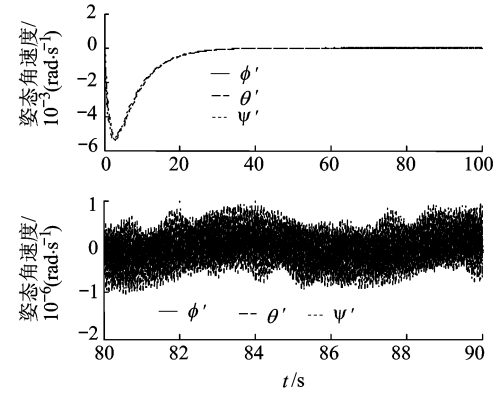

图 4 星本体姿态角速度及其放大图(隔振)

两种情况下的星体姿态角速度变化趋势基本相同,但通过下面的局部放大图可以看出明显区别. 在不加隔振的情况下,航天器姿态稳定度约为 8×10^{-6} rad/s,飞轮扰动的影响比较明显. 加入隔振平台后,航天器的姿态稳定度为 1×10^{-6} rad/s. 可见飞轮隔振系统的加入可以有效地改善航天器的姿态稳定度.

5　结　论

本文采用 Newton-Euler 法推导了考虑转子静动不平衡的飞轮加隔振平台组合系统动力学方程,并按扰动类型作了整理. 分析表明,飞轮与上平台之间存在耦合;转子静动不平衡不仅会产生附加的耦合扰动,还会产生与转子转速同频、大小正比于转速平方的直接扰动,后者由转子高速旋转产生,在量级上要远远大于前者. 因此可以通过忽略高阶小量对上平台系统动力学方程进行简化. 简化后的方程相当于理想飞轮上平台模型加扰动模型. 仿真结果表明,简化模型可以较好地吻合完整系统模型;隔振平台能够对飞轮的高频扰动进行有效地衰减.

由于建模中所采用的隔振平台基础是运动的,所以其下平台可以直接推广到航天器星体,进而可以建立含有飞轮和隔振平台的整星系统动力学模型. 初步的整星系统仿真显示,隔振系统的加入可以有效地改善航天器的姿态稳定度. 这为下一步的整星系统动力学特性分析及隔振系统设计奠定了理论基础.

参考文献(References)

[1] Hyde T T, Ha K Q, Johnston J D, et al. Integrated modeling activities for the James Webb Space Telescope: optical jitter analysis [C] //Proceedings of SPIE Vol 5487. Bellingham, WA: SPIE, 2004:588-599

[2] Masterson R A, Miller D W. Development and validation of empirical and analytical reaction wheel disturbance models [D]. Cambridge: Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 1999

[3] Pendergast K J, Schauwecker C J. Use of a passive reaction wheel jitter isolation system to meet the advanced X-ray astrophysics facility imaging performance requirements [R]. NASA CR-207926, 1998

[4] Bronowicki A J. Vibration isolator for large space telescopes [J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2006, 43(1):45-53

[5] Dasgupta B, Mruthyunjaya T S. A Newton-Euler formulation for the inverse dynamics of the Stewart platform manipulator [J]. Mechanism and Machine Theory, 1998, 33(8):1135-1152

[6] 赵煜,张鹏飞,程伟. 反作用轮扰动特性测量及研究[J]. 实验力学,2009,24(6):532-538
Zhao Yu, Zhang Pengfei, Cheng Wei. Measurement and study of disturbance characteristics of reaction wheel assembly [J]. Journal of Experimental Mechanics, 2009, 24(6):532-538 (in Chinese)

[7] Bronowicki A J. Forensic investigation of reaction-wheel nutation on isolator [R]. AIAA-2008-1953, 2008

[8] 金磊. 使用角动量交换装置的航天器姿态动力学与控制问题研究 [D]. 北京:北京航空航天大学宇航学院,2008
Jin Lei. Study on attitude dynamics and control of spacecraft using angular momentum exchange devices [D]. Beijing: School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008 (in Chinese)

[9] 张尧,黄庭轩,徐世杰. 星上控制力矩陀螺群的动力学特性 [J]. 北京航空航天大学学报,2012,38(1):80-85
Zhang Yao, Huang Tingxuan, Xu Shijie. Dynamic characteristic of vibration isolation platform of control moment gyroscopes on satellites [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2012, 38(1):80-85 (in Chinese)

(编　辑:张　嵘)