GPS/SINS 超紧组合导航系统可观测性分析

周卫东 蔡佳楠 孙 龙 郑 兰

(哈尔滨工程大学 自动化学院, 哈尔滨 150001)

摘 要: 系统状态的可观测性决定了系统的滤波精度. 目前,分析系统状态可观测性的主要方法是针对线性系统的,其中奇异值分解(SVD,Singular Value Decomposition)法可以对系统进行事前分析,并且计算简单,成为广泛使用的方法之一. 然而集中滤波结构的全球定位系统/捷联惯性导航系统(GPS/SINS,Global Positioning System/Strapdown Inertial Navigation System)超紧组合模型的量测方程是非线性的,对非线性系统进行可观测性分析是非常困难的. 针对这个问题,推导出了超紧组合模型线性的量测方程,并证明了该模型满足分段定常系统(PWCS,Piece-Wise Constant System)定理;使用奇异值分解法对其做可观测性仿真,并对实验结果做了全面分析. 结果表明:系统状态的可观测性受载体运动状态影响,载体机动性越强,可观测的状态越多,可观测性越高.

关 键 词: 超紧组合; 分段线性定常系统; 可观测性; 奇异值分解

中图分类号: V 249.3

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2013)09-1157-06

Observability analysis of GPS/SINS ultra-tightly coupled system

Zhou Weidong Cai Jianan Sun Long Zheng Lan

(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: The filter precision depends on the observability of system states. Various approaches were proposed to analyze the observability of the linear system states. Among those approaches, singular value decomposition (SVD) was commonly used to analyze the system beforehand owing to its computational simplicity. However, the measurement equation of global positioning system/strapdown inertial navigation systems (GPS/SINS) ultra-tightly coupled system based on the concentrated filter structure was nonlinear, which made it difficult to analysis the system observability. To solve this problem a linear measurement equation was derived. This GPS/SINS ultra-tightly coupled system model was proved to satisfy the piece-wise constant system (PWCS) theorem and the states' observability of the system were calculated based on the theory of SVD. The results show that the observability of states is affected by the maneuverability of carrier. The stronger maneuverability is, the more observable states are, the higher observability is.

Key words: ultra-tightly coupled; piece-wise constant system (PWCS); observability; singular value decomposition (SVD)

目前的滤波算法大部分是基于卡尔曼滤波发展起来的,因此状态估计的精度与系统状态的可观测性息息相关. 可观测性高的状态能得到较高的估计精度,反之不可观测或可观测性低的状态会使估计精度降低,甚至导致系统状态估计的发散. 因此系统模型使用前分析系统的可观测性是十分必要的.

目前,有很多分析系统可观测性的方法:①文

收稿日期: 2012-10-11; **网络出版时间**: 2013-09-23 11:42

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20130923.1142.010.html

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60834005)

作者简介: 周卫东(1966-),男,江苏宜兴人,教授, zhouweidong@hrbeu.edu.cn.

献[1]提出的可控度和可观度;②文献[2]提出的特征值法;③文献[3]提出的分段定常系统(PWCS,Piece-Wise Constant System)可观测性分析理论;④文献[4]在 PWCS 基础上提出的奇异值分解法(SVD,Singular Value Decomposition).特征值法是基于误差协方差阵的特征值和特征向量来分析可观测性的方法,其物理意义明确,但是计算复杂,当出现重特征值时分析系统状态可观测性困难;PWCS 是线性时变系统可观测性分析的基础理论,但是这种方法只能分析整个系统是否可观测,不能针对单个状态变量进行分析;SVD 通过将可观测性矩阵奇异值分解,依据奇异值大小判断对应状态的可观测程度;

文献[5-7]已分别对全球定位系统/捷联惯性导航系统(GPS/SINS, Global Positioning System/Strapdown Inertial Navigation System)松组合模型和紧组合模型做了可观测性分析. 文献[8]提出了一种 GPS/SINS 超紧密组合导航系统可观测性分析方法,从控制理论对系统可观测性的定义出发,根据量测的微分方程组解的情况来判断系统状态的可观测性,但是文中只使用估计误差曲线对可观测性定性分析,而没有给出各个状态的可观测性的数值比较. 本文使用 SVD 对 GPS/SINS 超紧组合模型进行可观测性分析. 引用文献[9-10]中建立的集中滤波结构超紧组合导航系统误差模型的理论,重新定义了模型中的位置误差和速度误差,推导出线性的量测方程,并证明该模型满足 PWCS 定理;用 SVD 对该模型进行可观测性分析;通过仿真实验得到该模型在不同运动状态下的可观测性数据,并进行相应分析.

1 GPS/SINS 超紧组合导航系统模型

模型状态:位置误差 $\delta\boldsymbol{R}=[\delta L \quad \delta\lambda \quad \delta h]^{\mathrm{T}}$,速度误差 $\delta\boldsymbol{v}=[\delta v_{\mathrm{E}} \quad \delta v_{\mathrm{N}} \quad \delta v_{\mathrm{U}}]^{\mathrm{T}}$,平台失准角 $\boldsymbol{\phi}=[\phi_{\mathrm{E}} \quad \phi_{\mathrm{N}} \quad \phi_{\mathrm{U}}]^{\mathrm{T}}$,加速度计零位误差 $\boldsymbol{\nabla}=[\nabla_x \quad \nabla_y \quad \nabla_z]^{\mathrm{T}}$,陀螺常值漂移 $\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z]^{\mathrm{T}}$,接收机钟差 δt_{u} 和钟差漂移 δt_{ru}. 系统误差方程[11-12]为

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{W}(t) \tag{1}$$

依据文献[8-9]提出的 GPS/SINS 超紧组合理论和接收机原理,GPS 的输入信号被下变频到 *I-Q* 通道中,在第 i 个通道中 I 和 Q 与载体速度误差和位置误差的关系为

$$E[I]=-\frac{A}{2\omega_{\mathrm{e}}}[\cos(\omega_{\mathrm{e}}(k+1)T+\phi_{\mathrm{e}})-\cos(\omega_{\mathrm{e}}kT+\phi_{\mathrm{e}})] \tag{2}$$

$$E[Q]=-\frac{A}{2\omega_{\mathrm{e}}}[\sin(\omega_{\mathrm{e}}(k+1)T+\phi_{\mathrm{e}})-\sin(\omega_{\mathrm{e}}kT+\phi_{\mathrm{e}})] \tag{3}$$

$$\omega_{\mathrm{e}}=\frac{\omega}{c}|\boldsymbol{v}_{\mathrm{u}}-\hat{\boldsymbol{v}}|=\frac{\omega}{c}v_{\mathrm{e}} \tag{4}$$

$$\phi_{\mathrm{e}}=-\frac{\omega}{c}[|\boldsymbol{R}_{\mathrm{u}}-\hat{\boldsymbol{R}}|-|\boldsymbol{v}_{\mathrm{u}}-\hat{\boldsymbol{v}}|t]=-\frac{\omega}{c}[R_{\mathrm{e}}-v_{\mathrm{e}}t] \tag{5}$$

其中,$E[I]$,$E[Q]$为 I,Q 的期望;A 为 GPS 信号幅值;T 为相干积分时间;ω 为载波 L_1 的角频率;c 为光速;$\boldsymbol{R}_{\mathrm{u}}$ 为接收机到地心的测量距离;$\hat{\boldsymbol{R}}$ 为接收机到地心的估计距离;$R_{\mathrm{e}}=\delta R_{\mathrm{u}}=|\boldsymbol{R}_{\mathrm{u}}-\hat{\boldsymbol{R}}|$为位置误差;$\boldsymbol{v}_{\mathrm{u}}$ 为接收机测量速度;$\hat{\boldsymbol{v}}$ 为接收机估计速度;$v_{\mathrm{e}}=\delta v_{\mathrm{u}}=|\boldsymbol{v}_{\mathrm{u}}-\hat{\boldsymbol{v}}|$为速度误差.

将式(4)、式(5)的 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{u}}$,$\boldsymbol{v}_{\mathrm{u}}$,$\hat{\boldsymbol{R}}$,$\hat{\boldsymbol{v}}$ 分别用 SINS 测量值和估计值代替,即得 SINS 对 I,Q 的预测分别为

$$I_{\mathrm{SINS}}=I+\delta I$$

$$Q_{\mathrm{SINS}}=Q+\delta Q$$

其中,δI,δQ 为 SINS 对 I,Q 的预测偏差. 接收机第 i 个 *I-Q* 通道输出值为

$$I_{\mathrm{GPS}}=I-\eta_I$$

$$Q_{\mathrm{GPS}}=Q-\eta_Q$$

其中,η_I,η_Q 为接收机 *I-Q* 通道噪声,$\eta_I\sim N(0,1)$,$\eta_Q\sim N(0,1)$,$E[\eta_I\eta_Q]=0$.

将 I_{GPS},Q_{GPS}与 I_{SINS},Q_{SINS}之差作为测量:

$$\boldsymbol{Z}_i=\begin{bmatrix}I_{\mathrm{SINS}}\\Q_{\mathrm{SINS}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}I_{\mathrm{GPS}}\\Q_{\mathrm{GPS}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta I+\eta_I\\\delta Q+\eta_Q\end{bmatrix} \tag{6}$$

式(1)和式(6)构成 GPS/SINS 超紧组合导航系统误差模型,如图 1 所示.

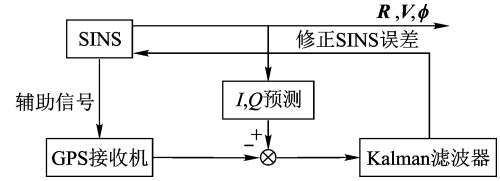

图 1 GPS/SINS 超紧组合结构

文献[9-10]中状态变量为 R_{e} 和 v_{e},定义为 SINS 测量值与 SINS 估计值之差,并且文献[10]研究表明:I 只与 R 有关,Q 只与 v 有关. 由式(4)、式(5)分别得

$$\delta E[I]=\left[\frac{\partial E[I]}{\partial\phi_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\phi_{\mathrm{e}}}{\partial R_{\mathrm{u}}}+\frac{\partial E[I]}{\partial\omega_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\omega_{\mathrm{e}}}{\partial R_{\mathrm{u}}}\right]R_{\mathrm{e}}$$

$$\delta E[Q]=\left[\frac{\partial E[Q]}{\partial\phi_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\phi_{\mathrm{e}}}{\partial v_{\mathrm{u}}}+\frac{\partial E[Q]}{\partial\omega_{\mathrm{e}}}\frac{\partial\omega_{\mathrm{e}}}{\partial v_{\mathrm{u}}}\right]v_{\mathrm{e}}$$

由此得到量测矩阵中仍然含有状态变量[13],即关于 R_e 和 v_e 的非线性方程. 因此将 R_e 和 v_e 重新定义:

$$R_e = |\boldsymbol{R} - \hat{\boldsymbol{R}}| \tag{7}$$

$$v_e = |\boldsymbol{v} - \hat{\boldsymbol{v}}| \tag{8}$$

其中,$\boldsymbol{R},\boldsymbol{v}$ 为 SINS 的测量值;$\hat{\boldsymbol{R}},\hat{\boldsymbol{v}}$ 为接收机的估计值. 对于 SINS 系统,$\boldsymbol{R},\boldsymbol{v}$ 与 $\hat{\boldsymbol{R}},\hat{\boldsymbol{v}}$ 不相关,则

$$\delta E[I] = \left[\frac{\partial E[I]}{\partial \phi_e}\frac{\partial \phi_e}{\partial R} + \frac{\partial E[I]}{\partial \omega_e}\frac{\partial \omega_e}{\partial R}\right]\delta R \tag{9}$$

$$\delta E[Q] = \left[\frac{\partial E[Q]}{\partial \phi_e}\frac{\partial \phi_e}{\partial v} + \frac{\partial E[Q]}{\partial \omega_e}\frac{\partial \omega_e}{\partial v}\right]\delta v \tag{10}$$

其中

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{(v_E)^2 + (v_N)^2 + (v_U)^2}$$

$$R = |\boldsymbol{R}| = G(L,\lambda,h) = \{[(R_0 + h)\cos L\cos\lambda]^2 + [(R_0 + h)\cos L\sin\lambda]^2 + [(R_0 + h)\sin L]^2\}^{1/2}$$

$$\frac{\partial E[I]}{\partial \phi_e} = -\frac{A}{2\omega_e}[-\sin(\omega_e(k+1)T + \phi_e) + \sin(\omega_e kT + \phi_e)]$$

$$\frac{\partial E[I]}{\partial \omega_e} = -\frac{A}{2\omega_e}[-(k+1)T\sin(\omega_e(k+1)T + \phi_e) + kT\sin(\omega_e kT + \phi_e)]$$

$$\frac{\partial E[Q]}{\partial \phi_e} = -\frac{A}{2\omega_e}[\cos(\omega_e(k+1)T + \phi_e) - \cos(\omega_e kT + \phi_e)]$$

$$\frac{\partial E[Q]}{\partial \omega_e} = -\frac{A}{2\omega_e}[(k+1)T\cos(\omega_e(k+1)T + \phi_e) - kT\cos(\omega_e kT + \phi_e)]$$

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial R}\delta R = -\frac{\omega}{c}\left[\frac{v_N(R_0+h)}{v}\delta L + \frac{v_E(R_0+h)}{v}\delta\lambda + \left(\frac{v_E\lambda + v_N L + v_U}{v} - 1\right)\delta h\right]$$

$$\frac{\partial \phi_e}{\partial v}\delta v = \frac{\omega t}{c}\left[\left(\frac{v_N}{v} - 2\cos L\sin L\right)\delta v_N + \left(\frac{v_U}{v} - 1\right)\delta v_U + \left(\frac{v_E}{v} - t\cos^2 L\sin\lambda - t\cos L\cos\lambda\sin L\right)\delta v_E\right]$$

$$\frac{\partial \omega_e}{\partial v}\delta v = \frac{\omega}{c}\left(\frac{v_E}{v}\delta v_E + \frac{v_N}{v}\delta v_N + \frac{v_U}{v}\delta v_U\right)$$

$$\frac{\partial \omega_e}{\partial R} = 0$$

其中,L 为纬度;λ 为经度;h 为高度;R_0 为载体在地球表面投影到地心的距离;v_E, v_N, v_U 分别为载体的速度分量. 由以上推导可以得量测方程为

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_1\\ \boldsymbol{Z}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Z}_n\end{bmatrix}$$

观测矩阵为

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} h_{x1} & h_{y1} & h_{z1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ h_{xn} & h_{yn} & h_{zn} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dot{h}_{x1} & \dot{h}_{y1} & \dot{h}_{z1} & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dot{h}_{xn} & \dot{h}_{yn} & \dot{h}_{zn} & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

其中

$$h_{xi} = \frac{\partial E[I_i]}{\partial \phi_{ei}}\frac{\partial \phi_{ei}}{\partial L_i} + \frac{\partial E[I_i]}{\partial \omega_{ei}}\frac{\partial \omega_{ei}}{\partial L_i}$$

$$\dot{h}_{xi} = \frac{\partial E[Q_i]}{\partial \phi_{ei}}\frac{\partial \phi_{ei}}{\partial v_{Ei}} + \frac{\partial E[Q_i]}{\partial \omega_{ei}}\frac{\partial \omega_{ei}}{\partial v_{Ei}}$$

$$h_{yi} = \frac{\partial E[I_i]}{\partial \phi_{ei}}\frac{\partial \phi_{ei}}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial E[I]}{\partial \omega_{ei}}\frac{\partial \omega_{ei}}{\partial \lambda_i}$$

$$\dot{h}_{yi} = \frac{\partial E[Q_i]}{\partial \phi_{ei}}\frac{\partial \phi_{ei}}{\partial v_{Ni}} + \frac{\partial E[Q_i]}{\partial \omega_{ei}}\frac{\partial \omega_{ei}}{\partial v_{Ni}}$$

$$h_{zi} = \frac{\partial E[I_i]}{\partial \phi_{ei}}\frac{\partial \phi_{ei}}{\partial h_i} + \frac{\partial E[I_i]}{\partial \omega_{ei}}\frac{\partial \omega_{ei}}{\partial h_i}$$

$$\dot{h}_{zi} = \frac{\partial E[Q_i]}{\partial \phi_{ei}}\frac{\partial \phi_{ei}}{\partial v_{Ui}} + \frac{\partial E[Q_i]}{\partial \omega_{ei}}\frac{\partial \omega_{ei}}{\partial v_{Ui}}$$

其中,$i=1,2,\cdots,n$ 为跟踪卫星的数目.

2　超紧组合导航系统可观测性分析

2.1　PWCS 可观测性分析定理

在一个足够小的时间区间内,线性时变系统的系数矩阵变化量很小,则时变系统可以当作定常系统处理,这就是分段定常系统,即 PWCS[3].

由于系统的可观测性与输入激励无关,假设在第 $j(j=1,2,\cdots,r)$ 个时间段内,齐次系统误差模型为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(k+1) = \boldsymbol{F}_j\boldsymbol{X}(k)\\ \boldsymbol{Z}_j(k) = \boldsymbol{H}_j\boldsymbol{X}(k)\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{X}(k) \in \mathbf{R}^n$;$\boldsymbol{Z}_j(k) \in \mathbf{R}^m$;$\boldsymbol{F}_j \in \mathbf{R}^{n\times n}$;$\boldsymbol{H}_j \in \mathbf{R}^{m\times n}$;$\boldsymbol{F}_j$ 和 $\boldsymbol{H}_j$ 均为常值矩阵.

离散系统的总可观测矩阵(TOM, Total Observability Matrix)为

$$\boldsymbol{Q}(r) = [\boldsymbol{Q}_1 \quad \boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{F}_1^{n-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{Q}_r\boldsymbol{F}_{r-1}^{n-1}\boldsymbol{F}_{r-2}^{n-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{F}_1^{n-1}]^{\mathrm{T}}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}_j^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{H}_j^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{F}_j)^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad (\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{F}_j^{n-1})^{\mathrm{T}}]$$

选择可观测性矩阵(SOM, Stripped Observ-

ability Matrix)为

$$\boldsymbol{Q}_s(r)=[\boldsymbol{Q}_1 \quad \boldsymbol{Q}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{Q}_r]^{\mathrm{T}}$$

用初值表示系统输出为

$$\boldsymbol{Z}(r)=\boldsymbol{Q}(r)\boldsymbol{X}(0)$$

当 $\boldsymbol{Q}(r)$ 的秩为 n 时,$\boldsymbol{X}(0)$ 有唯一解,则离散系统是完全可观测的,否则是不完全可观测的. 由于 $\boldsymbol{Q}(r)$ 中含有矩阵的幂函数,直接用 TOM 研究系统可观测性十分复杂,因此引入 PWCS 定理.

定理 1 如果 $\boldsymbol{F}_j\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x}\in \mathrm{null}\{\boldsymbol{Q}_j(r)\}$, $1\leqslant j\leqslant r$,则 $\mathrm{null}\{\boldsymbol{Q}(r)\}=\mathrm{null}\{\boldsymbol{Q}_s(r)\}$, $\mathrm{rank}\{\boldsymbol{Q}(r)\}=\mathrm{rank}\{\boldsymbol{Q}_s(r)\}$.

当离散型 PWCS 满足定理 1 时,可用 $\boldsymbol{Q}_s(r)$ 代替 $\boldsymbol{Q}(r)$ 分析离散系统可观测性.

定理 2 如果 $\mathrm{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_j\}\subset\mathrm{null}\{\boldsymbol{A}_j\}$, $1\leqslant j\leqslant r$,则 $\mathrm{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}(r)\}=\mathrm{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_s(r)\}$, $\mathrm{rank}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}(r)\}=\mathrm{rank}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_s(r)\}$.

$\tilde{\boldsymbol{Q}}(r)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{Q}}_s(r)$ 分别为连续型 PWCS 的 TOM 矩阵和 SOM 矩阵. 连续型 PWCS 满足定理 2 时,可用 $\tilde{\boldsymbol{Q}}_s(r)$ 代替 $\tilde{\boldsymbol{Q}}(r)$ 分析连续系统可观测性.

定理 3 如果 $\boldsymbol{F}_j$ 为与 $\boldsymbol{A}_j$,Δ_j 对应的离散化状态转移矩阵,则 $\mathrm{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_s(r)\}=\mathrm{null}\{\boldsymbol{Q}_s(r)\}$.

$\boldsymbol{A}_j$ 和 Δ_j 分别为连续型 PWCS 的状态转移矩阵和时间间隔. 满足定理 3 时,离散型 PWCS 与连续型 PWCS 可观测性分析等价.

2.2 基于 SVD 的可观测性分析方法

在满足 PWCS 可观测性分析定理的基础上,假设在第 j 个时间段内,有一组观测值为[4]

$$\boldsymbol{Z}(k)=[\boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}},(\boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}})^{(1)},\cdots,(\boldsymbol{Z}_j^{\mathrm{T}})^{(n-1)}]^{\mathrm{T}}$$

初始状态为 $\boldsymbol{X}(0)$,这一时间段内系统 SOM 矩阵为 $\boldsymbol{Q}_s(j)$,则有

$$\boldsymbol{Q}_s(j)\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{Z}(k)$$

初始状态 $\boldsymbol{X}(0)$ 的估计取决于 $\boldsymbol{Q}_s(j)$ 特性,对其进行奇异值分解得

$$\boldsymbol{Q}_s(j)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

其中,$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}\{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \cdots \quad \sigma_\beta\}$, $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_\beta\geqslant 0$ 为 $\boldsymbol{Q}_s(j)$ 奇异值;$\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_m]$, $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_\beta]$,都为正交阵.

当 $\boldsymbol{Q}_s(j)$ 满秩时,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_s(j))=\beta$,则 $\sigma>0$,

$$\boldsymbol{X}(0)=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Z}=\sum_{i=1}^{\beta}\left(\frac{\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}}{\sigma_i}\right)\boldsymbol{v}_i$$

当 $\boldsymbol{Q}_s(j)$ 不满秩,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q}_s(j))=l<\beta$,则 $\sigma_{l+1}=\sigma_{l+2}=\cdots=\sigma_\beta=0$,可将 $\boldsymbol{V}$ 分成两个子空间:

$$\boldsymbol{V}_1=[\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_l]$$

$$\boldsymbol{V}_2=[\boldsymbol{v}_{l+1} \quad \boldsymbol{v}_{l+2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_\beta]$$

$\boldsymbol{V}_2$ 代表 $\boldsymbol{Q}_s(j)$ 的零空间,则

$$\boldsymbol{X}(0)=\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}}{\sigma_i}\right)\boldsymbol{v}_i+\sum_{i=l+1}^{\beta}\alpha_i\boldsymbol{v}_i$$

其中,α_i 为零空间内的任意系数,此时 $\boldsymbol{X}(0)$ 有 $\beta-l$ 个状态不能精确估计出来.

2.3 证明超紧组合误差模型满足 PWCS 定理

SVD 是在 PWCS 的基础上建立的,使用之前需证明系统模型满足 PWCS 定理. 同时滤波算法的量测是对量测信号定期采样的离散数据,要将文中给出的连续系统模型离散化后再进行可观测性分析,并且需要证明离散模型和连续模型具有相同的可观测性. 证明过程如下.

第 j 个时间段内超紧组合系统误差模型的齐次状态方程为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{X}(t)\\ \boldsymbol{Z}_j(t)=\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{X}(t)\end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}_j=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{A}_{11})_{3\times3} & (\boldsymbol{A}_{12})_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ (\boldsymbol{A}_{21})_{3\times3} & (\boldsymbol{A}_{22})_{3\times3} & \boldsymbol{f}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ (\boldsymbol{A}_{31})_{3\times3} & (\boldsymbol{A}_{32})_{3\times3} & \boldsymbol{B}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{I}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{T}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{r}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times2}\\ \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{0}_{2\times3} & \boldsymbol{t}_{2\times2}\end{bmatrix}_{17\times17}$$

$$\boldsymbol{H}_j=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{h}_{11})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{12})_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{n}_{3\times2}\\ (\boldsymbol{h}_{21})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{22})_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{m}_{3\times2}\end{bmatrix}_{6\times17}$$

其中,$\boldsymbol{A}_j$,$\boldsymbol{H}_j$ 为在该时间段内的连续系统状态转移矩阵和观测矩阵;$\boldsymbol{t}_{2\times2}$, $\boldsymbol{n}_{3\times2}$, $\boldsymbol{m}_{3\times2}$ 为与接收机钟差和钟差漂移相关的常值矩阵.

选择可观测性矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_j\\ \boldsymbol{H}_j\boldsymbol{A}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{H}_j\boldsymbol{A}_j^{k-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{h}_{11})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{12})_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{n}_{3\times2}\\ (\boldsymbol{h}_{21})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{22})_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{m}_{3\times2}\\ (\boldsymbol{h}_{11}\boldsymbol{A}_{11})_{3\times3}+(\boldsymbol{h}_{12}\boldsymbol{A}_{12})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{11}\boldsymbol{A}_{12})_{3\times3}+(\boldsymbol{h}_{12}\boldsymbol{A}_{22})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{12}\boldsymbol{f})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{12})_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{n}\boldsymbol{t}_{3\times2}\\ (\boldsymbol{h}_{21}\boldsymbol{A}_{11})_{3\times3}+(\boldsymbol{h}_{22}\boldsymbol{A}_{21})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{21}\boldsymbol{A}_{12})_{3\times3}+(\boldsymbol{h}_{22}\boldsymbol{A}_{22})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{22}\boldsymbol{f})_{3\times3} & (\boldsymbol{h}_{22})_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{m}\boldsymbol{t}_{3\times2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{X}\in\text{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_j\}$,则 $\tilde{\boldsymbol{Q}}_j\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,经化简得

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{f}\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{31}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}_{32}\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_5=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}_4=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}_5=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{x}_6=\boldsymbol{0}\end{gathered}$$

由上式可得 $\boldsymbol{A}_j\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{X}\in\text{null}\{\boldsymbol{A}_j\}$,又因为 $\boldsymbol{X}\in\text{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_j\}$,则 $\text{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_j\}\subset\text{null}\{\boldsymbol{A}_j\}$. 由定理 2 得

$$\text{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}(r)\}=\text{null}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_s(r)\}$$

$$\text{rank}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}(r)\}=\text{rank}\{\tilde{\boldsymbol{Q}}_s(r)\}$$

即可以用连续系统的 SOM 代替 TOM 做系统的可观测分析. 连续系统离散化后,得到系统方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{F}_j\boldsymbol{X}(k)\\ \boldsymbol{Z}_j(k)=\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{X}(k)\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{F}_j$ 为与 $\boldsymbol{A}_j$, ∇_j对应的离散化状态转移矩阵,由定理 3 可得离散系统与连续系统的可观测性是等价的. 因此本文用离散系统的 SOM 对超紧组合导航系统做可观测性分析的结果与用连续系统的 TOM 分析结果相同.

3　仿真与分析

仿真实验以北向为例,分 3 种情况:①匀速直线运动,速度为 100 m/s,加速度为零;②加速直线运动,速度为 100 m/s,加速度为 10 m/s^2;③转弯运动,线速度为 100 m/s,向心加速度为 10 m/s^2. 实验数据如表 1 所示.

表 1　系统状态的奇异值

状态编号	匀速直线	加速直线运动	转弯运动
1	2453.70	2453.70	2687.10
2	2.59	4.96	139.31
3	0.58	0.02	14.72
4	0.47	9.80×10^{-4}	6.74
5	3.57×10^{-3}	2.47×10^{-4}	1.62
6	1.70×10^{-3}	0.03	0.02
7	1.70×10^{-3}	0.63	7.14×10^{-9}
8	6.01×10^{-5}	5.43×10^{-21}	0.24
9	1.04×10^{-7}	2.96×10^{-5}	18.67
10	5.40×10^{-8}	4.29×10^{-12}	1.59×10^{-4}
11	3.57×10^{-9}	0.01	0.57
12	2.13×10^{-9}	9.68×10^{-11}	3.56×10^{-3}
13	1.11×10^{-11}	0.69	1.27×10^{-3}
14	5.56×10^{-14}	8.59×10^{-6}	0.26
15	3.47×10^{-14}	1.36×10^{-4}	20.53
16	9.87×10^{-15}	9.53×10^{-6}	1.36×10^{-3}
17	4.09×10^{-21}	2.58	3.71

引用文献[4]的数值标准,小于 5.0×10^{-8} 的奇异值所对应的状态不可观测,则 3 种运动条件下不可观测状态的个数分别是 7,3,1.

由于速度、位置与量测直接相关,则在任何运动状态下,速度误差和位置误差的可观测性都较高. 加速和转弯运动时,加速度计误差的可观测性明显提高. 转弯运动中,陀螺敏感角度的变化,陀螺漂移的可观测性提高,与之相关的平台失准角的可观测性也提高. 由系统方程知,接收机钟差和钟差漂移与 SINS 误差状态没有耦合,可观测性不受 SINS 影响,由表 1 中相应的奇异值变化表明:钟差和钟差漂移的可观测性会随着机动性的增强而增大. 综合以上分析,与量测直接相关的状态保持较高的可观测性;状态的可观测性受载体机动性影响,加速运动对可观测性提高有限,而转弯运动对可观测性的改善效果显著.

本文还做了超紧组合与松组合可观测性的比较,由于篇幅关系在此不列出松组合的可观测性数据. 结果表明:超紧组合系统整体的可观测性比松组合的高;位置误差的可观测性提高显著,部分状态的可观测性提高有限;因此需要继续改进超紧组合模型,显著提高系统在高动态运动时所有状态的可观测性,这是该模型转向工程应用的一个关键问题.

4　结　论

重新推导了集中滤波结构的超紧组合误差模型,得到线性的量测方程,并对该模型做可观测性分析. 分析结果表明:系统状态的可观测性受载体运动状态的影响很大,当载体大角度、高动态运动时,可观测的状态数量增多,可观测性提高;当载体小角度、低动态运动时,可观测性会相应降低. 同时该超紧组合误差模型需要继续改进,使其在高动态条件下所有状态的性能都显著提高,并逐渐转向工程应用.

参考文献(References)

[1] 王丹力,张洪钺. 几种可观测性分析方法及在惯导中的应用[J]. 北京航空航天大学学报,1999,25(3):342-346
Wang Danli, Zhang Hongyue. Methods for the analysis of observability and their application to INS initial alignment [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 1999, 25(3):342-346 (in Chinese)

[2] Ham F M, Brown R G. Observability, eigenvalues, and Kalman filtering[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1983, 19(2):269-273

[3] Goshen-Meskin D, Bar-Itzhack I Y. Observability analysis of

piece-wise constant systems (part II): application to inertial navigation in-flight alignment [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(4): 1068-1075

[4] 万德钧,房建成. 惯性导航初始对准[M]. 南京:东南大学出版社,1998:100-109
Wan Dejun, Fang Jiancheng. Initial alignment of inertial navigation [M]. Nanjing: Southeast Press, 1998: 100-109 (in Chinese)

[5] Tang Yonggang, Wu Yuanxin, Wu Meiping, et al. INS/GPS integration: global observability analysis [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2009, 58(3): 1129-1142

[6] 刘飞,胡小毛,翁海娜,等. SINS/GPS 紧耦合系统可观测性分析[J]. 天津大学学报,2011,44(5):393-395
Liu Fei, Hu Xiaomao, Weng Haina, et al. Observability analysis of SINS/GPS tightly coupled system[J]. Journal of Tianjin University, 2011, 44(5): 393-395 (in Chinese)

[7] Lu Hongqian, Li Mingming, Chen Zhengmin, et al. Observability of geomagnetism/GPS/SINS integration during maneuvers [C]//2011 3rd International Conference on Advanced Computer Control. Harbin, China: Harbin Institute of Technology, 2011: 604-609

[8] 张涛. GPS/SINS 超紧组合导航系统的关键技术研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学自动化学院,2010
Zhang Tao. The key techniques of ultra-tightly integrated GPS/SINS navigation systems [D]. Harbin: College of Automation, Harbin Engineering University, 2010 (in Chinese)

[9] Babu R, Wang Jinling. Ultra-tight GPS/INS/PL integration: a system concept and performance analysis [J]. GPS Solut, 2009, 13: 75-82

[10] Babu R. Ultra-tight integration of GPS/pseudolites/INS: system design and performance analysis [D]. Australia: The University of New South Wales, 2006

[11] 格雷沃尔. 惯性导航组合[M]. 2 版. 北京:电子工业出版社,2011
Grewal M S. Global positioning systems inertial navigation, and integration [M]. 2nd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2011 (in Chinese)

[12] Babu R, Wang Jinling, Rao G. Analysis of ultra-tight GPS/INS integrated system for navigation performance [C]// IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Networking, Madras Institute of Technology. Chennai, India: Anna University, 2008: 234-237

[13] 高帅和. 分布式 GPS/SINS 超紧组合架构下的信号处理和信息融合技术研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学自动化学院,2012
Gao Shuaihe. Research on signal processing and information fusion under distributed ultra-tight GPS/SINS integrated architecture [D]. Harbin: College of Automation, Harbin Engineering University, 2012 (in Chinese)

(编 辑:刘登敏)

(上接第 1149 页)

[13] Tserpes K I, Papanikos P, Kermanidis Th. A three-dimensional progressive damage model for bolted joints in composite laminates subjected to tensile loading [J]. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2002, 24(10): 663-675

[14] Hashin Z. Failure criteria for unidirectional fibre composites [J]. Journal of Applied Mechanics, 1980, 47: 329-334

[15] Tan S C, Perez J. Progressive failure of laminated composites with a hole under compressive loading [J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 1993, 12(10): 1043-1057

[16] Riccio A, Scaramuzzino F. Embedded delamination growth in composite panels under compressive load [J]. Composites Part B: Engineering, 2001, 32(3): 209-218

[17] 中国航空研究院. 中国航空材料手册[M]. 2 版. 北京:航空工业出版社,2006
Chinese Aviation Research Institute. China aeronautical materials handbook [M]. 2nd ed. Beijing: Aviation Industry Press, 2006

[18] 喻梅,许希武. 复合材料挖补修理结构的压缩强度分析[J]. 中国矿业大学学报,2008,37(5):711-714
Yu Mei, Xu Xiwu. Study of the compression strength of scarf patch repaired composite structures [J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2008, 37(5): 711-714 (in Chinese)

[19] Mortensen F, Thomsen O T. Analysis of adhesive bonded joints: a unified approach [J]. Composites Science and Technology, 2002, 62(7): 1011-1031

[20] Kafkalidis M S, Thouless M D. Deformation and fracture of adhesive layers constrained by plastically-deforming adherents [J]. Adhesion Science and Technology, 2000, 14(13): 1593-1607

(编 辑:李 晶)