快速 Gram-Schmidt 回归方法

王惠文 夏 棒 孟 洁

(北京航空航天大学 经济管理学院, 北京 100191) (中央财经大学 统计学院, 北京 102206)

摘 要: 提出一种快速的变量筛选与回归建模方法. 该方法将在建模过程中,一方面筛选出对因变量有最佳解释作用的信息;另一方面基于 Gram-Schmidt 正交变换,识别和检验模型中的冗余变量,以便能够及时和成批量地删除所有冗余信息. 仿真分析指出,在自变量数量巨大,同时变量之间的多重相关程度又非常高的情形下,与经典的逐步回归相比,该方法的计算速度更快,建模过程更加简洁有效.

关 键 词: Gram-Schmidt 正交变换; 冗余变量; 变量筛选; 快速建模

中图分类号: O 212

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2013)09-1259-04

Fast algorithm of Gram-Schmidt regression method

Wang Huiwen Xia Bang

(School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Meng Jie

(School of Statistics, Central University of Finance and Economics, Beijing 102206, China)

Abstract: A new multiple linear regression method was proposed which can screen the variables fast. In the modeling process, not only can it screen variables containing best information to explain the dependent variable, but also distinguish and test redundant variables in the model based on Gram-Schmidt orthogonal transformation, so as to timely strike out all the redundant information in quantity. The simulation analysis shows that compared to classic stepwise regression this new method has a higher arithmetic speed and the modeling process is briefer and more efficient, when the variables appear in a large quantity and have a pretty serious server multicollinearity at the same time.

Key words: Gram-Schmidt orthogonal transformation; redundant variables; variable selection; fast modeling

多元线性回归分析是工程技术和经济管理等研究领域普遍应用的统计模型. 在信息技术快速发展的时代,人们在建模过程中,经常要面对大量的备选的自变量,并且在这些自变量之间往往存在严重的多重相关性. 为了解决多重相关条件下的变量筛选与建模问题,经典回归技术中已经存在一些变量选择方法,例如向前选择法(foreword selection)、向后删除法(backward elimination)以及逐步回归法(stepwise)等. 在一般的应用工作中,使用频率较高的是逐步回归法. 然而不难看出,在逐步回归的建模过程中,当某个自变量进入模型后,如果还有一部分自变量与该变量高度相关,那么这些冗余变量依然会持续参与后续的运算,从而造成大量的冗余计算工作量. 针对这一问题,本文将基于 Gram-Schmidt 正交变换,提出一种可以快速消除这些冗余运算的变量筛选和建模方法.

Gram-Schmidt 正交变换是由 Gram 和 Schmidt

收稿日期: 2012-11-09; **网络出版时间**: 2013-06-09 11:48

网络出版地址: www.cnki.net/kcms/detail/11.2625.V.20130609.1148.009.html

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71031001,71001110)

作者简介: 王惠文(1957-),女,河北玉田人,教授,wanghw@vip.sina.com.

提出的. 为了保证计算的稳定性,文献[1]又给出了修正的 Gram-Schmidt 变换方法. 在近代研究中,该变换方法被广泛地应用于模式识别[2-5]、判别分类[6-7]等数据挖掘的相关研究领域. 文献[8]提出一种 Gram-Schmidt 回归方法,可以在建模过程中挑选对因变量有解释意义的信息,删除对其无解释意义的信息,并且扣除重复解释的信息成分. 不过在这个方法中,并没有充分利用 Gram-Schmidt 正交变换对冗余变量摒除作用. 文献[9-10]讨论了如何测度被 Gram-Schmidt 正交变换所删除的信息量,并且给出了对冗余变量进行检验的统计分析方法. 这为合理有效地识别冗余变量提供了重要的理论依据.

针对大规模变量集合的回归问题,本文提出一种快速 Gram-Schmidt 回归方法. 该方法可以在回归建模过程中,一方面依然通过经典的 t 检验来选择对因变量有重要解释作用的自变量,同时利用 Gram-Schmidt 正交变换来分解和识别自变量集合中冗余信息,从而能够成批量地删除所有冗余变量,显著提高变量筛选效率和回归建模的计算速度.

1 Gram-Schmidt 正交变换及冗余变量的检验方法

作为本文的研究基础,首先简要介绍 Gram-Schmidt 变换方法,并且讨论该变换在变量筛选过程中的作用,以及冗余变量的统计检验方法.

在线性代数理论中,Gram-Schmidt 正交变换的叙述见定理 1.

定理 1 任意一组线性无关的向量集合 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$,总可以经过 Gram-Schmidt 变换,把它们转换成一组正交向量. Gram-Schmidt 变换的计算公式见式(1).

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{z}_1 &= \boldsymbol{x}_1\\
\boldsymbol{z}_2 &= \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_1}\boldsymbol{z}_1\\
\boldsymbol{z}_3 &= \boldsymbol{x}_3 - \frac{\boldsymbol{x}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_1}\boldsymbol{z}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_2}{\boldsymbol{z}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_2}\boldsymbol{z}_2\\
&\vdots\\
\boldsymbol{z}_s &= \boldsymbol{x}_s - \sum_{k=1}^{s-1}\frac{\boldsymbol{x}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k}{\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k}\boldsymbol{z}_k
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

定理 1 指出,对于任意一组线性无关的向量集合 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s$,总可以经过 Gram-Schmidt 变换把它们转换成正交向量.

在统计数据分析中,变量的实际观测是以向量形式表出的. 因此,在本文的数据建模中,将采用 Gram-Schmidt 变换方法对变量进行筛选和降维处理. 并且,为了说明 Gram-Schmidt 变换方法在变量筛选中的作用,下面进一步给出以下推论.

推论 1 对于任意一组秩为 $s(s<p)$ 的变量集合 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$,对它们做 Gram-Schmidt 变换后,得到 $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_p$. 这其中,必有 s 个变量是相互直交的,而另外 $(p-s)$ 个变量为 $\mathbf{0}$ 向量.

从推论 1 可以看出,Gram-Schmidt 正交变换有 2 个基本功能:①将变量集合中的信息进行正交分解;②排除 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$ 中的冗余变量(即被变换成 $\mathbf{0}$ 向量的那些变量).

为了后续论述中的概念清楚起见,将公式(1)中的 $\boldsymbol{z}_j(j=1,2,\cdots,s)$ 简称为 G-S 变量;而把与 $\boldsymbol{z}_j$ 对应的原变量 $\boldsymbol{x}_j$ 称为 $\boldsymbol{z}_j$ 的关联变量.

因此,在采用 Gram-Schmidt 变换构造直交变量的过程中,如果所得到的 G-S 变量 $\boldsymbol{z}_j$ 几乎为 $\mathbf{0}$ 向量,则 $\boldsymbol{z}_j$ 所对应的关联变量即为冗余变量. 通过下面的定理 2 和定理 3,可以给出冗余变量的统计检验方法.

定理 2 设有标准化(即均值等于 0,方差等于 1)的原始变量集 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_j$. 由前 $(j-1)$ 个变量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{j-1}$ 生成的 G-S 变量集合为 $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{j-1}$,它们所张成的空间记为 $L(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{j-1})$. 记 $\boldsymbol{u}_j=\sum_{k=1}^{j-1}\frac{\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k}{\boldsymbol{z}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_k}\boldsymbol{z}_k$,则 $\boldsymbol{u}_j$ 为 $\boldsymbol{x}_j$ 在空间 $L(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{j-1})$ 上的投影;此外,由 $\boldsymbol{z}_j=\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{u}_j$,则可以证明以下 2 个等式成立:

1) $r^2(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{z}_j)=\mathrm{Var}(\boldsymbol{z}_j)$;

2) $r^2(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{u}_j)=1-\mathrm{Var}(\boldsymbol{z}_j)$.

其中,$r(\cdot,\cdot)$ 表示 2 个变量的相关系数;$\mathrm{Var}(\cdot)$ 表示变量的方差.

该定理的结论 2)说明,当 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{z}_j)$ 几乎为 0 时,$\boldsymbol{x}_j$ 与 $\boldsymbol{u}_j$ 的相关系数几乎等于 1,于是 $\boldsymbol{x}_j$ 与空间 $L(\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{j-1})$ 的夹角就接近 0 了,也就是说 $\boldsymbol{x}_j$ 不能再提供新的信息量了. 而结论 1)则指出:要验证 G-S 变量 $\boldsymbol{z}_j$ 是否为 $\mathbf{0}$ 向量,只需要验证是否有 $r(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{z}_j)=0$.

定理 3 记服从二元正态分布的 2 个变量 $\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{z}_j$,它们的总体相关系数为 ρ;记它们之间的样本相关系数为 $r=r(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{z}_j)$. 给出原假设 $H_0:\rho=0$;对应的,有备择假设 $H_1:\rho\neq0$. 若样本容量为 n,如果原假设 H_0 成立,则有检验统计量 T 服从自由度为 $(n-2)$ 的 t 分布,即

$$T=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\overset{H_0}{\sim}t(n-2) \tag{2}$$

给定显著性水平 α,检验的临界值为 $t_{\alpha/2}(n-2)$,检验得拒绝域为 $\{|T|>t_{\alpha/2}(n-2)\}$. 更进一步的,根据定理 2 的结论 1),则由相关系数 $r(\boldsymbol{x}_j,\boldsymbol{z}_j)$ 的显著性结论,便可以推断出 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{z}_j)$ 是否显著非零了.

2　快速 Gram-Schmidt 回归方法

依据第 1 节的讨论结果,即如果某自变量在变换过程中,所得到的 G-S 变量基本上为零向量,则可以判定该变量与前面已经进入回归模型的变量集合存在高度相关性,因此可以尽早地将其剔除出自变量集合. 据此,本文提出一种快速 Gram-Schmidt 回归方法,以便更加快捷有效地实施变量筛选,并得到一个合理的回归模型.

快速 Gram-Schmidt 回归的计算步骤如下.

1) 对于变量集合 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_p$ 做标准化处理,使每一个变量的均值为 0,方差等于 1. 为记号方便起见,依然将标准化处理后的因变量记为 $\boldsymbol{y}$,而记标准化处理后的自变量记为 $\boldsymbol{z}_1^{(1)},\boldsymbol{z}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{z}_p^{(1)}$.

2) 设备选变量集合为 Λ,即 $\Lambda=\{\boldsymbol{z}_j^{(1)},j=1,2,\cdots,p\}$;另外,取 Λ 的补集为空集,即 $\bar{\Lambda}=\varnothing$. 然后,分别建立 $\boldsymbol{y}$ 关于 $\boldsymbol{z}_j^{(1)}(j=1,2,\cdots,p)$ 的一元线性回归模型. 在通过 t 检验的自变量中,选择 t 检验统计量的绝对值最大的自变量进入模型. 不妨设第 1 个被选中的变量为 $\boldsymbol{z}_1^{(1)}$,即 $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{z}_1^{(1)}$.

3) 做第 1 次 Gram-Schmidt 变换,计算

$$\boldsymbol{z}_j^{(2)}=\boldsymbol{z}_j^{(1)}-\frac{(\boldsymbol{z}_j^{(1)})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_1}{\boldsymbol{z}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}_1}\boldsymbol{z}_1\qquad j=2,3,\cdots,p \tag{3}$$

然后,检验每一组相关系数 $r(\boldsymbol{z}_j^{(1)},\boldsymbol{z}_j^{(2)})(j=2,3,\cdots,p)$ 的显著性,由此得到每个变量 $\boldsymbol{z}_j^{(2)}(j=2,3,\cdots,p)$ 的方差是否显著非零的结论. 若某变量方差显著非零,则令其属于备选变量集合 Λ;否则,将其放入 $\bar{\Lambda}$ 集合. 为了表述方便起见,这里假设有 $\Lambda=\{\boldsymbol{z}_j^{(2)},j=2,3,\cdots,m_1;m_1\leqslant p\}$.

分别求 $\boldsymbol{y}$ 关于 $\boldsymbol{z}_1$ 和 $\boldsymbol{z}_j^{(2)}(j=2,3,\cdots,m_1)$ 的二元线性回归. 在通过 t 检验的自变量集合 $\boldsymbol{z}_j^{(2)}(j=2,3,\cdots,m_1)$ 中,选中 t 检验统计量的绝对值最大的变量进入模型. 不妨设第 2 个被选中的变量为 $\boldsymbol{z}_2=\boldsymbol{z}_2^{(2)}$.

重复上面的步骤,直到模型外边的所有变量经 Gram-Schmidt 变换处理后,要么其方差不显著非零,要么不能通过 t 检验.

算法停止后,若得到了 m 个 G-S 变量 $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_m$,则使用这 m 个 G-S 变量所关联的原始变量作为自变量,与因变量 $\boldsymbol{y}$ 进行普通最小二乘回归,从而得到最终的回归模型.

3　仿真实验

下面采用仿真数据来说明快速 Gram-Schmidt 回归方法的有效性.

首先,随机生成 3 个相互独立的服从正态分布的自变量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$,其均值为 0,方差为 1,样本容量为 1 000. 接着,构造一个因变量 $\boldsymbol{y}$:记 $\tilde{\boldsymbol{y}}=0.2\boldsymbol{x}_1+0.3\boldsymbol{x}_2+0.5\boldsymbol{x}_3$,$\tilde{\boldsymbol{y}}$ 的标准差为 s_y;然后,令

$$\boldsymbol{y}=0.2\boldsymbol{x}_1+0.3\boldsymbol{x}_2+0.5\boldsymbol{x}_3+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}\sim N(0,(s_y/10)^2)$.

为了验证本节所提出算法的有效性,再刻意生成一些冗余的自变量. 令

$$\boldsymbol{x}_{j+3}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_j,j=1,2,\cdots,33$$
$$\boldsymbol{x}_{j+3}=\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_j,j=34,35,\cdots,66$$
$$\boldsymbol{x}_{j+3}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_j,j=67,68,\cdots,99$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_j\sim N(0,0.01)(j=1,2,\cdots,99)$ 且相互独立.

这样,就得到了 103 个变量 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{102}$. 应用该仿真数据进行快速 Gram-Schmidt 回归建模的过程如下:

对数据向量 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_{102}$ 进行标准化处理. 为了记号方便起见,将变换后的变量记作 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}_1^{(1)},\boldsymbol{z}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{z}_{102}^{(1)}$. 分别建立 $\boldsymbol{y}$ 关于 $\boldsymbol{z}_j^{(1)}(j=1,2,\cdots,102)$ 的一元线性回归模型,得到相应的 t 检验统计量的数值如图 1 所示. 选择 t 统计量的绝对值最大的自变量为 $\boldsymbol{z}_3^{(1)}$,即 $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{z}_3^{(1)}$. 将剩下的自变量分别与 $\boldsymbol{z}_1$ 做 Gram-Schmidt 变换,得到 $\boldsymbol{z}_j^{(2)}(j\neq 3)$.

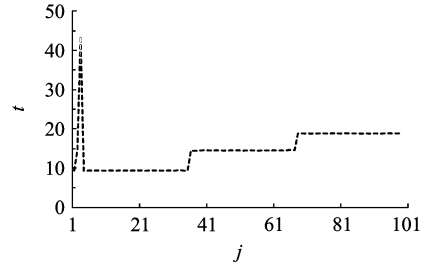

图 1　回归模型中 $\boldsymbol{z}_j^{(1)}$ 的 t 值

然后,再分别对相关系数 $r(\boldsymbol{z}_j^{(1)},\boldsymbol{z}_j^{(2)})(j\neq 3)$ 是否显著非零进行检验,结果如图 2 所示. 该检验的阈值为 $t_{0.025}(1\,000-2)=1.96$,可见在这一步检验中,所有剩余变量 $\boldsymbol{z}_j^{(2)}(j\neq 3)$ 均通过显著性检验. 事实上,根据所设计的冗余变量,其中并没有与 $\boldsymbol{z}_1=\boldsymbol{z}_3^{(1)}$ 相关的变量,因此,在这一步中并没有

冗余变量被识别出来，$\Lambda=\{z_j^{(2)},j\neq 3\}$.

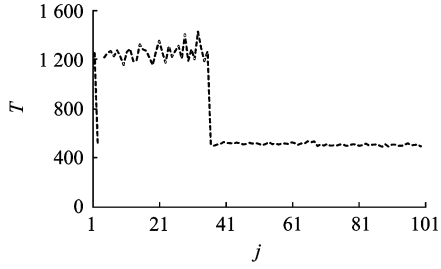

图 2 相关系数检验的 T 值

接下来，将 Λ 中的变量分别与 z_1 联合，做关于 $\boldsymbol{y}$ 的二元线性回归，得到 $z_j^{(2)}(j\neq 3)$ 的 t 检验统计量如图 3 所示. 选择 t 统计量的绝对值最大的自变量为 $z_{72}^{(2)}$，即 $z_2=z_{72}^{(2)}$. 然后，将备选集合 Λ 中的剩余变量分别与 z_1,z_2 做 Gram-Schmidt 变换，得到 $z_j^{(3)}(j\neq 3,72)$.

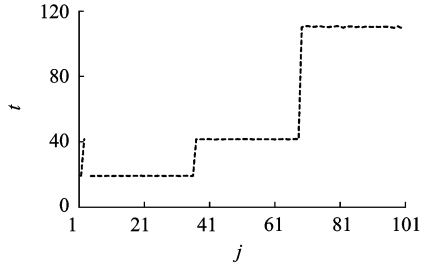

图 3 回归模型中 $z_j^{(2)}$ 的 t 值

为了识别冗余变量，对相关系数 $\boldsymbol{r}(z_j^{(1)},z_j^{(3)})(j\neq 3,72)$ 是否非零做显著性检验，结果如图 4 所示. 图 4 中点划线为检验的阈值位置(1.96)，从中可见变量 $z_{70}^{(3)},z_{71}^{(3)},z_{73}^{(3)},\cdots,z_{102}^{(3)}$ 均未通过显著性检验. 事实上，由于 $z_{70},z_{71},\cdots,z_{102}$ 都是根据 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 构造的冗余变量，因此在这一步中，所有与 $z_2=z_{72}^{(3)}$ 相关的变量 $z_{70}^{(3)},z_{71}^{(3)},z_{73}^{(3)},\cdots,z_{102}^{(3)}$ 就都被识别出来了，于是这 32 个冗余变量被一次性删除，得到 $\Lambda=\{z_1^{(3)},z_2^{(3)},z_4^{(3)},\cdots,z_{69}^{(3)}\}$.

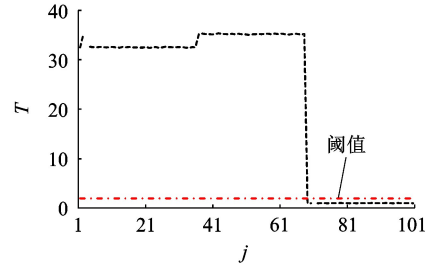

图 4 相关系数检验的 T 值

重复上面的步骤，得到 t 统计量的绝对值最大的变量为 $z_3=z_{58}^{(3)}$；而在相关系数检验中，剩余的所有变量均未通过显著性检验，被全部排除在模型之外，变量筛选和回归迭代过程结束. 事实上，由于前面步骤所得到的 G-S 变量的关联变量 $z_3^{(1)},z_{72}^{(1)},z_{58}^{(1)}$，分别对应仿真实验中的基础变量 $\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2$，已经完全涵盖了自变量集合的全部信息，而剩余变量均是根据基础变量生成的冗余变量，因此在这一步中，剩余的 67 个变量就都被一次性删掉了.

最后，做因变量 $\boldsymbol{y}$ 与 G-S 变量的关联变量 $z_3^{(1)},z_{72}^{(1)},z_{58}^{(1)}$ 的线性回归模型，得到估计结果为

$$\hat{\boldsymbol{y}}=0.501\boldsymbol{z}_1+0.200\boldsymbol{z}_2+0.101\boldsymbol{z}_3$$

再根据 $z_3^{(1)},z_{72}^{(1)},z_{58}^{(1)}$ 对应于原始变量 $\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2$，进而代入上面的估计方程中，得到最终的回归结果为

$$\hat{\boldsymbol{y}}=0.200\boldsymbol{x}_1+0.301\boldsymbol{z}_2+0.501\boldsymbol{x}_1$$

上述变量筛选与回归估计的结果与仿真实验的设计是相吻合的，并且模型的 $R^2\approx 0.989$，拟合效果很好.

4 结 论

本文讨论了 Gram-Schmidt 正交变换在变量筛选过程中的作用，指出在采用 Gram-Schmidt 变换构造直交变量的过程中，如果在第 j 步所得到的 G-S 变量 $\boldsymbol{z}_j$ 几乎为 $\boldsymbol{0}$ 向量，就说明与之关联的原始变量 $\boldsymbol{x}_j$ 与前面已经形成的 G-S 变量集合 $\boldsymbol{z}_1,\boldsymbol{z}_2,\cdots,\boldsymbol{z}_{j-1}$ 高度相关，因此它已不能再提供新的信息量了，这时 $\boldsymbol{x}_j$ 被称为冗余变量. 本文介绍了如何测度被 Gram-Schmidt 变换所删除的信息量，并指出对冗余变量进行检验的统计分析方法.

根据上述理论，提出了一种快速 Gram-Schmidt 回归方法. 该方法在回归建模的变量筛选过程中，通过 Gram-Schmidt 正交变换来识别冗余变量. 因此在筛选出对因变量有最佳解释作用的信息的同时，可以运用冗余变量的统计检验方法，成批量地快速删除冗余变量. 容易看出，尤其在自变量数量巨大，同时变量之间的多重相关性程度又非常高的情形下，这种方法的计算速度更快，建模过程更加简洁有效. 显而易见，这种思想方法还可以被推广至判别分析等有导师模型的变量筛选与建模问题，作者将在该领域继续开展相关的研究工作.

参考文献（References）

[1] Björck Å. Solving linear least squares problems by Gram-Schmidt orthogonalization[J]. BIT, 1967, 7: 1-21

[2] Chen S, Billings S A, Luo W. Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification[J]. International Journal of Control, 1989, 50(5): 1873-1896

（下转第 1268 页）

转弯过程中,从而间接导致了误差均值的增大.

2) 速度误差和位移误差的统计结果与静态试验处在同一数量级.

总体来看,该组合导航算法能够使姿态、速度和位移误差维持在较低的范围内,精度可以满足初级教练机的使用需要.

表 3 动态试验误差统计

项目		均值	最大值	均方根
姿态角误差/(°)	航向角	0.115	0.542	0.083
	横滚角	0.032	0.210	0.051
	俯仰角	0.028	0.055	0.010
速度误差/($m \cdot s^{-1}$)	东向速度	0.024	0.188	0.025
	北向速度	0.027	0.144	0.020
	天向速度	0.004	0.029	0.005
位移误差/m	东向位移	2.588	5.523	3.892
	北向位移	3.939	7.346	2.633
	天向位移	0.008	4.684	0.016

4 结束语

结合初级教练机的实际使用需求,设计了基于 MEMS 惯性器件、GPS、磁强计和高度计的低成本组合导航仪,并有针对性的提出了一种基于运动学非线性模型的组合导航算法. 通过静态试验和动态跑车试验,表明在 GPS 低数据更新率的条件下,该组合导航算法能够有效抑制姿态、速度和位置信息的发散,导航精度能够满足初级教练机的使用需要.

参考文献 (References)

[1] 宫经宽. 航空机载惯性导航系统[M]. 北京:航空工业出版社,2010:11-17

[2] 王玲玲,富立,陈三. 基于低成本 IMU 的捷联航姿系统软件设计与实现[J]. 中国惯性技术学报,2009,17(4):379-380
Wang Lingling, Fu Li, Chen San. Design and implement of AHRS based on low-cost IMU [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2009, 17(4): 379-380 (in Chinese)

[3] Zhang Tao, Xu Xiaosu. A new method of seamless land navigation for GPS/INS integrated system [J]. Measurement, 2012, 45: 691-701

[4] Noureldin A, El-shafie A, Bayoumi M. GPS/INS integration utilizing dynamic neural networks for vehicular navigation [J]. Information Fusion, 2011, 12: 48-57

[5] Lou Lu, Xu Xin. An approach to improving attitude estimation using sensor fusion for robot navigation [J]. Procedia Engineering 2011, 15: 5601-5605

[6] Doostdar P, Keighobadi J. Design and implementation of SMO for a nonlinear MIMO AHRS [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 32: 94-115

[7] Bijker J, Steyn W. Kalman filter configurations for a low-cost loosely integrated inertial navigation system on an airship [J]. Control Engineering Practice, 2008, 16: 1509-1518

[8] Grewal M S, Andrews A P. Kalman fitering theory and practice using MATLAB [M]. 3rd ed. Hoboken: John Wiley and Sons Inc, 2008: 293-296

[9] Rogers R M. Applied mathematics in integrated navigation systems [M]. 3rd ed. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, 2007: 149-152

[10] 付梦印,邓志红,闫莉萍. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2010:161-165
Fu Mengyin, Deng Zhihong, Yan Liping. Kalman filtering theory and its application in navigation system [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2010: 161-165 (in Chinese)

(编 辑:赵海容)

(上接第 1262 页)

[3] Cristianini N, Shawe-Taylor J, Lodhi H. Latent semantic kernels [J]. Journal of Intelligent Information Systems, 2002, 18(2/3): 127-152

[4] Mao K Z. Orthogonal forward selection and backward elimination algorithms for feature subset selection[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2004, 34(1): 629-634

[5] He Yunhui. Modified generalized discriminant analysis using kernel Gram-Schmidt orthogonalization in difference space for face recognition[C]//Proceedings-2009 2nd International Workshop on Knowledge Discovery and Data Mining, WKKD 2009. Piscataway, NJ: IEEE Computer Society, 2009: 36-39

[6] Su Chaoton, Hsiao Yuhsiang. Multiclass MTS for simultaneous feature selection and classification[C]//IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. Piscataway, NJ: IEEE Computer Society, 2009: 192-205

[7] Bian Yiwen. A Gram-Schmidt process based approach for improving DEA discrimination in the presence of large dimensionality of data set[J]. Expert Systems with Applications: An International Journal, 2012, 39(3): 3793-3799

[8] 王惠文,陈梅玲,Gilbert Saporta. Gram-Schmidt 回归及在刀具磨损预报中的应用[J]. 北京航空航天大学学报,2008,34(6):729-733
Wang Huiwen, Chen Meiling, Gilbert Saporta. Gram-Schmidt regression and application in cutting tool abrasion prediction[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 34(6): 729-733 (in Chinese)

[9] Wang Huiwen, Yi Bin, Ye Ming. Unsupervised dimension reduction method based on Gram-Schmidt process[C]//Proceedings of IASC 2008. Tokyo: Japanese Society of Computational Statistics, 2008: 1659-1667

[10] 王惠文,仪彬,叶明. 基于主基底分析的变量筛选[J]. 北京航空航天大学学报,2008,34(11):1288-1291
Wang Huiwen, Yi Bin, Ye Ming. Variable selection based on principal basis analysis[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 34(11): 1288-1291 (in Chinese)

(编 辑:文丽芳)