两类激波捕捉格式的性能分析

于 剑 阎 超

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 考虑了两类典型的激波捕捉格式:特征形式的 MUSCL (Monotone Upstream-centred Schemes for Conservation Laws)格式和 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory)格式. MUSCL格式在作特征变换时使用了局部线性化的思想,并且针对波系的性质施加相应的限制器;通过逐维重构实现有限体积法的 WENO格式. 针对一维、二维和三维 Euler系统进行数值实验. 在一维和二维的情况下,特征形式的 MUSCL格式在接触间断的捕捉上具有较明显的优势,而对于激波的捕捉则差别不大. 对于三维问题则是 WENO格式对流场的分辨更精细. 最后对上述结果给出解释,并且提出了可能的改进方法.

关 键 词: 计算流体力学; 有限体积法; 特征变量; 加权本质无振荡格式

中图分类号: V 211.3

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2010)01-0010-04

On the performance of two shock-capturing schemes

Yu Jian Yan Chao

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Two shock-capturing schemes were considered: characteristic-based MUSCL (monotone upstream-centred schemes for conservation laws) scheme and WENO (weighted essentially non-oscillatory) scheme. Local linearization was employed when performing characteristic transformation, and limiters were applied according to the characteristics of waves; A dimension by dimension reconstruction was used to obtain truly accurate finite volume WENO scheme. Numerical experiments were carried out on one-, two- and three-dimensional Euler systems. The results show with one- and two-dimensional examples that characteristic-based MUSCL scheme performs better on capturing contact discontinuities, and shows little difference from WENO scheme on shocks. For three-dimensional problems, a finer resolution of complex flow feature can be obtained by WENO scheme. Explanations as well as possible improvements are given.

Key words: computational fluid dynamics; finite volume scheme; characteristic variables; weighted essentially non-oscillatory scheme

Godunov格式由于将流动的物理特性巧妙地融入到格式构造的过程中,直到今天仍是计算流体力学的基石之一. 文献[1]沿着这个思路将格式推广到空间二阶精度,构造出了分段线性近似的 MUSCL (Monotone Upstream-centred Schemes for Conservation Laws)格式. 为了进一步提高格式的精度,文献[2]首次提出了本质无振荡的概念,发展了 ENO (Essential Non-Oscillatory)格式. 文献[3]借助 ENO格式的思想,将备选模板通过加权的方式全部加以利用,提出了 WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory)格式. 文献[4]提出了有限差分形式的 WENO格式,并使格式在光滑区的精度达到最优. WENO在格式的有效性、通量的光滑性、解的稳定性方面更好,在解的间断处则相当于 ENO格式,受到了广泛的关注[5-6].

从工程实际问题的角度来看[7],二阶 MUSCL

收稿日期: 2008-12-30

基金项目: 国家 973计划资助项目(2009CB724104)

作者简介: 于 剑(1984-),男,山东济宁人,博士生, yujian@ase.buaa.edu.cn.

格式鲁棒性好、构造简单、效率高,得到了广泛的应用,但是工程设计部门常常需要更加细致地刻画流场结构,以期发展出新的设计概念,同时一些飞行器性能指标的计算,例如气动热,也要求格式的数值耗散较低,这时高阶格式就显得更有优势,然而高阶格式的鲁棒性差、算法设计繁琐,因此在工程实际中的应用还很不成熟. 本文通过对改进的二阶 MUSCL格式和五阶 WENO格式进行详细地比较,以期对 2种格式的性能有较全面的认识,为今后格式的构造和应用提供思路.

1　数值格式

考虑如下三维双曲守恒律组

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) + \partial_y G(Q) + \partial_z H(Q) = 0 \tag{1}$$

其中,$Q = Q(x, y, z, t)$,为守恒变量; x, y, z分别为空间坐标, t为时间; $F(Q)$, $G(Q)$和 $H(Q)$分别为 x, y和 z方向上的对流通量. 定义空间单元

$$I_{ijk} = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}] \times [z_{k-1/2}, z_{k+1/2}]$$

则有

$$\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$$
$$\Delta y = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}$$
$$\Delta z = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}$$

1.1　基于特征变量的 *MUSCL* 格式

MUSCL格式一个重要的研究内容是限制器的构造. 以界面 $i+1/2$为例, MUSCL插值可以表示为

$$Q^{L}_{i+1/2} = Q_i + \frac{1}{2}\Delta Q_i$$

$$Q^{R}_{i+1/2} = Q_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta Q_{i+1}$$

其中, Q_i为单元 i中的平均值; $Q^{L}_{i+1/2}$和 $Q^{R}_{i+1/2}$分别为界面 $i+1/2$处左状态参量和右状态参量; ΔQ_i为单元 i中流场变量从界面 $i+1/2$到界面 $i-1/2$的变化坡度.

数值解的非物理振荡常常是由于跨间断插值造成的,因此为了有效地抑制振荡,本文选择特征变量进行分段线性插值. 将守恒变量投影到特征空间

$$W_j = L_i Q_j \qquad j = i-1, i, i+1 \tag{2}$$

求解单元 i内特征变量的坡度

$$\Delta W_i = \phi(\Delta W_{i-1/2}, \Delta W_{i+1/2}) \tag{3}$$

其中,ϕ代表限制器; $\Delta W_{i+1/2} = W_{i+1} - W_i$.

最终有

$$\Delta Q_i = R_i \Delta W_i \tag{4}$$

其中, W为特征变量,下角标的含义同前; L_i和 R_i为通量 $F(Q)$在单元 i中的雅各比矩阵 A_i的左右特征矩阵.

下面给出 2点说明: ①在式 (3)中,对于线性退化场采用压缩性最强的 superbee限制器来提高格式对接触间断的分辨率,对于真正非线性场采用双 minmod限制器[8]; ②特征变换矩阵 A_i有很多种求解方法,例如取算术平均或 Roe平均等,式 (2)采用的是一种局部线性化的处理, L_i和 R_i是严格的互逆矩阵,有利于消除特征变换产生的数值误差. 数值实验表明,这种处理方法可以有效避免 superbee限制器对于接触间断的过度压缩,保证格式良好的稳定性,而且计算量小.

1.2　有限体积法的 WENO格式

在单元 I_{ijk}上对式 (1)进行积分,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q_{ijk}(t) = \frac{1}{\Delta x}(F_{i-1/2,j,k} - F_{i+1/2,j,k}) + \frac{1}{\Delta y}(G_{i,j-1/2,k} - G_{i,j+1/2,k}) + \frac{1}{\Delta z}(H_{i,j,k-1/2} - H_{i,j,k+1/2}) \tag{5}$$

其中

$$Q_{ijk}(t) = \frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\frac{1}{\Delta z}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} Q(x, y, z, t)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$F_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\Delta y}\frac{1}{\Delta z}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} F(Q(x_{i+1/2}, y, z, t))\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

以下只讨论 F, G和 H可类似求解. 采用如下近似

$$F_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\Delta y}\frac{1}{\Delta z}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\hat{F}(Q^{L}_{i+1/2,\alpha,\beta}, Q^{R}_{i+1/2,\alpha,\beta})K_\beta K_\alpha$$

其中, $Q^{L}_{i+1/2,\alpha,\beta}$, $Q^{R}_{i+1/2,\alpha,\beta}$为单元界面左右两侧的状态变量; $\hat{F}$为近似 Riemann求解器; K_α, K_β为 Gauss积分权. $Q^{L}_{i+1/2,\alpha,\beta}$, $Q^{R}_{i+1/2,\alpha,\beta}$可以通过逐维重构的 WENO方法求解,具体方法详见文献[9].

2　计算方法

本文计算所采用的时间格式为三阶 TVD的 Runge-Kutta方法, CFL数若无特别说明均取 0.6. WENO格式采用 $N=2$的 Gauss积分, $Q^{L}_{i+1/2,\alpha,\beta}$和 $Q^{R}_{i+1/2,\alpha,\beta}$的重构精度为五阶. 另外, Roe为带有熵修正的 Roe格式; LxF为 Lax-Friedrich格式; cha为对 MUSCL插值使用特征变量的处理方法.

3　计算结果与分析

3.1　*WENO* 格式精度验证

为了验证本文 WENO格式的精度,在二维情

况下对程序做收敛性测试. 计算初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = (1 + 0.2\sin(x + y), 1, -0.7, 1)$$

其中,ρ为密度; u, v分别为 x, y方向上的速度; p为压力. 在此初值下的解析解为

$$(\rho, u, v, p) = (1 + 0.2\sin(x + y - 0.3t), 1, -0.7, 1)$$

给定计算域 $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$,采用周期边界条件. 取 $\Delta t = h^3$, h为网格尺度,计算推进到 $t = 2$时停止. 表 1所列的计算结果表明,本文的 WENO格式获得了预期的高阶精度.

表 1 二维精度测试结果

网 格	L_1误差	L_1精度阶
20 ×20	4.3791×10^{-4}	
40 ×40	1.3780×10^{-5}	4.99
80 ×80	4.3581×10^{-7}	4.98

3.2 一维 Euler系统

3.2.1 Lax激波管

计算域为 [-5, 5],网格点数为 100,初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} (0.445, 0.698, 3.528) & x \le 0 \\ (0.5, 0, 0.571) & x > 0 \end{cases}$$

图 1给出了 $t = 1.3$时刻的密度分布曲线. 为了便于比较,还给出了 minmod限制器的计算结果. 从图 1中可以看出,本文的 MUSCL方法对于接触间断的分辨率是最好的,而对激波的分辨能力则与 WENO类似.

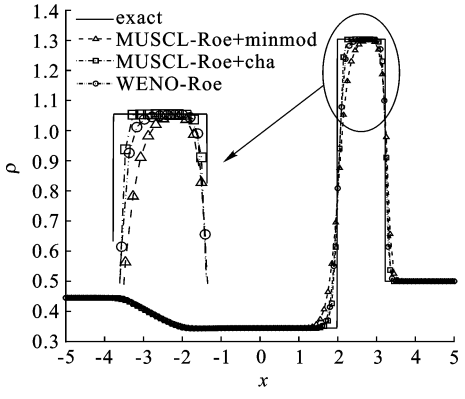


图 1 *Lax*激波管问题密度分布曲线

3.2.2 Blast-Waves问题

该问题描述 2个互相碰撞的冲击波,流场的发展过程非常复杂,而且包含有跨音速的膨胀波区,可以用来检验数值方法的鲁棒性以及避免收敛到非物理解的能力. 计算域取为 [0, 1],网格点数为 400,初始条件为

$$(\rho, u, p) = \begin{cases} 1, 0, 1\,000 & 0 < x < 0.1 \\ 1, 0, 0.01 & 0.1 < x < 0.9 \\ 1, 0, 100 & 0.9 < x < 1.0 \end{cases}$$

图 2给出了 $t = 0.038$时刻的密度分布曲线,其中精确解为五阶 WENO格式在 2 000个点上的计算结果. 图 2的结论与上一算例完全一致,特征形式的 MUSCL插值能够非常有效地捕捉接触间断,与精确解符合得较好,而且没有非物理的振荡.

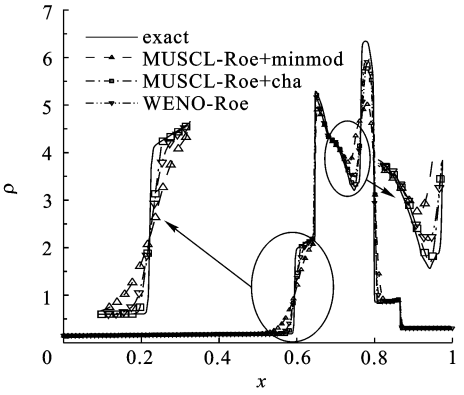
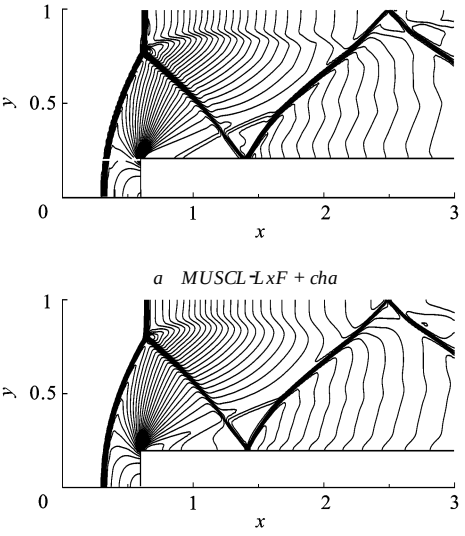


图 2 *Blast-Waves*问题密度分布曲线

3.3 二维 *Euler*系统

计算模型为经典的二维前向台阶激波反射流动,自由来流马赫数为 $Ma = 3.0$. 台阶前产生一道弓形激波,在上壁面反射形成 λ激波,波后拖出接触间断. 另外,流动在台阶拐角处过度膨胀,与台阶上壁面相撞形成一道孤立激波. 采用文献 [10]中的方法来修正拐角处的奇性问题. 计算网格取为 240 ×80,时间推进至 $t = 4.0$. 从图 3中可以看出,特征形式的 MUSCL方法计算得到的接触间断的强度比 WENO要大,在与 2道反射激波相交后仍较清晰,显示了较高的分辨率. MUSCL格式捕捉到的孤立激波也比 WENO锐利. 需要注意的是,随着反射次数的增加,MUSCL格式对激波的耗散逐渐增大 (相对于 WENO格式).



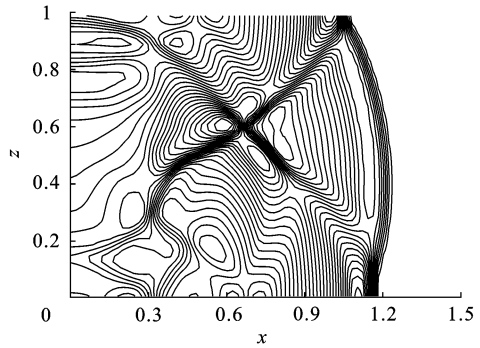
a MUSCL-LxF + cha

b WENO-LxF

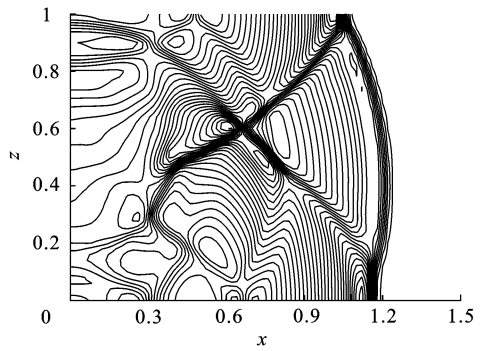
图 3 前向台阶激波反射流动密度等值线

3.4　三维 *Euler*系统

采用球 Riemann模型[11],即在 $z=0$和 $z=1$的上下 2块平板之间,布置一个球 Riemann问题,球心位于 (0, 0, 0.4),球的半径为 0.2,在初始时刻,球内外均为静止气体,球外状态为 $p_{out}=1$, $\rho_{out}=1$,球内状态为 $p_{in}=5$, $\rho_{in}=1$. 球内外之间的压力跳跃形成了一个向外扩展的激波和滑移面,以及向中心传播的稀疏波. 这个稀疏波又导致了一个当地爆炸,于是形成了第 2个向外运动的激波. 在球心,将会形成一个几乎静止的低密度区. 这些复杂的波系除了自身相互作用外,还与上下 2个平板相互作用. 计算区域为 $(x, y, z)\in[0, 1.5]\times[0, 1.5]\times[0, 1.0]$,网格点数为 75 × 75 × 50. 图 4给出了 $t=0.7$时刻 x-z平面上的压力等值线. 由图中可以看出,2种方法都能够较清晰地捕捉到流场的复杂结构. 相对于 MUSCL方法,WENO格式算出的激波结构更加精细.



a　*MUSCL-Roe + cha*



b　*WENO-Roe*

图 4　球 *Riemann*问题压力等值线图

4　结束语

从以上计算结果的分析中可以看出,在一维和二维的情况下,本文特征形式的 MUSCL方法对接触间断的捕捉效果较好,而在三维情况下,二者差别不大;WENO格式在激波捕捉方面比特征形式的 MUSCL格式要好. 产生上述现象的一个重要原因是现在常用的格式一般都假设波的传播方向为单元交界面的法向,这在一维情况下是合理的,推广到多维时,上述处理方法则不能正确反映波的传播方向,会带来较大的数值耗散. 因此,在设计数值格式的时候把多维效应考虑在内将有可能使得上述 MUSCL格式在多维情况下的性能得到改善. 相比较而言,高阶格式 (WENO)对于界面流通量的选择不敏感,在各种情况下的表现基本一致. 上述比较都是在同样网格条件下进行,考虑到对于间断的分辨更有效的是网格的细化,而本文的特征形式的 MUSCL格式计算量小,可以在保证计算效率的前提下使用密网格,因而有较强的应用价值.

参考文献 (References)

[1] Van Leer B. Towards the ultimate conservation difference scheme V: a second-order sequal to Godunov's method[J]. Journal of Computational Physics, 1979, 32(1): 101 - 136

[2] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1987, 71(2): 231 - 303

[3] Liu X D, Osher S, Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 115(1): 200 - 212

[4] Jiang G S, Shu C W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1996, 126(1): 202 - 228

[5] Shen Y Q, Zha G C. Improvement of the WENO schemes smoothness estimator[R]. AIAA-2008-3993, 2008

[6] Nichols R H, Tramel R W, Buning P G. Evaluation of two high-order weighted essentially nonoscillatory schemes[J]. AIAA Journal, 2008, 46(12): 3090 - 3102

[7] Ladeinde F, Alabi K, Safta C, et al. The first high-order CFD simulation of aircraft: challenges and opportunities[R]. AIAA-2006-1526, 2006

[8] Rider W J. Methods for extending high-resolution schemes to non-linear systems of hyperbolic conservation laws[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1993, 17(10): 861 - 885

[9] Titarev V A, Toro E F. Finite-volume WENO schemes for three-dimensional conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2004, 201(1): 238 - 260

[10] Woodward P, Colella P. The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks[J]. Journal of Computational Physics, 1984, 54(1): 115 - 173

[11] Langseth J O, Leveque R J. A wave propagation method for three-dimensional hyperbolic conservation laws[J]. Journal of Computational Physics, 2000, 165(1): 126 - 166

(编　辑:吴　琼)