含多处任意脱层层合梁屈曲的微分求积解法

韩海涛 张 铮 卢子兴

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100191)

摘 要：基于铁木辛柯(Timoshenko)梁理论，建立了含任意脱层的复合梁模型，并利用微分求积DQ(Differential Quadrature)法，研究了含多处任意脱层层合梁的屈曲问题.该复合梁模型给出的含单脱层层合梁的临界屈曲载荷计算结果与相关文献结果一致.此外，以两端固支，含两个任意长度、任意深度贯穿脱层的层合梁为例，分析了脱层长度、深度以及相对位置对屈曲载荷的影响.为工程结构设计和分析提供了一种简单有效的方法，给出了一些有参考价值的结果.

关 键 词：脱层；屈曲；层合复合材料；微分求积法

中图分类号：TB 332

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2010)01-0022-04

Differential quadrature solutions for buckling of laminated beams with multiple arbitrary delaminations

Han Haitao Zhang Zheng Lu Zixing

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Based on Timoshenko beam theory, a multi-beam model was presented for buckling analysis of laminated beams with arbitrary multiple delaminations, using differential quadrature (DQ) method. Comparisons showed high consistent between the critical buckling loads of the model with a single delamination and those coming from relative references. The investigations of the clamped beams were made to reveal the influences of the length, the depth and the positions of the delaminations on buckling loads. The configuration including a beam with two across-the-width delaminations with arbitrary lengths and located at arbitrary depths was studied. DQ method provides a simple and effective method for the buckling analysis of laminated beams with arbitrary multiple across-the-width delaminations, and provides some valuable results for design of laminated structures.

Key words: delamination; buckling; laminated composites; differential quadrature method

复合材料层合结构因其比刚度大、比强度高等优良特性，在航空、航天和汽车等领域得到广泛应用.然而，层合复合材料层间剪切强度和横向强度较低，易发生层间剥离，严重削弱了层合构件的承载能力，使其在远低于设计载荷时屈曲失稳，甚至造成灾难性后果，这已成为制约层合复合材料结构应用的瓶颈.因此，层合构件的稳定性分析一直是国内外研究的热点，诸多学者通过试验、理论分析和有限元计算，对含单一脱层、对称或者等长多处脱层的层合梁/板的屈曲和后屈曲特性进行了分析[1-8]，从理论研究和工程应用方面都取得了广泛的成果.

微分求积DQ(Differential Quadrature)法具有高阶插值和无网格(点离散)特点，其计算高效率与高精度的优势使之在众多科学和工程领域得到了广泛重视和应用[9-10].文献[4]采用DQ法对含对称单脱层特殊正交层合板进行了屈曲和后屈曲分析.然而，现有文献对层合复合材料结构含

收稿日期：2008-12-17

基金项目：凡舟基金资助项目(20070501)；北京市教育委员会共建项目(XK100060522)

作者简介：韩海涛(1982—)，男，河北保定人，博士生，hht8@sohu.com.

任意多处脱层情况研究较少[5],因此,本文基于DQ法建立了复合梁模型,研究含任意位置多处脱层的层合梁屈曲问题,给出了脱层长度、深度以及脱层相对位置对层合梁稳定性的影响规律,同时也证明了本文方法是一种简明高效的计算方法.

1　DQ 法简介

DQ 法是由文献[11]提出的一种用于解决线性和非线性微分方程(组)的数值方法. 其基本思想是:对于函数定义域内的给定节点:其导数可用域内节点(包含边界节点)上函数值的加权求和来表示. 则微分方程(组)可以化为简单的代数方程组进行求解. 在 DQ 法中,节点分布通常有 2 种模式:均匀分布和余弦分布. 研究表明:节点分布模式对求解收敛速度和精度的影响较大,一般余弦分布模式比均匀分布模式更有利于提高收敛的稳定性和结果的精度[9]. 故本文采用余弦分布模式,选择 Lagrange 插值多项式作为试探函数. 关于 DQ 法的详细介绍可参考文献[9－10].

2　含脱层梁屈曲问题

如图 1 所示正交铺设层合梁. 单层复合材料坐标系方向与材料主方向一致. 铺层顺序为$[0/90]_{10S}$. x 为 0°纤维方向,z 为梁厚度方向.

材料参数为

$$E_1=137.9\ \text{GPa}$$
$$E_2=9.65\ \text{GPa}$$
$$G_{12}=5.5\ \text{GPa}$$
$$G_{23}=4.0\ \text{GPa}$$
$$\upsilon_{12}=0.3$$

Ⅰ和Ⅱ为 2 个任意深度和任意长度的穿透型脱层,可将层合梁分成 7 个独立的子梁,①～⑦表示子梁序号. 定义每一子梁 x 方向(轴向)长度为 $l_i(i=1,2,\cdots,7)$,z 方向(横向)厚度为 $t_i(i=1,2,\cdots,7)$,梁总长为 L,总厚度为 T,取宽度为 1. 图 1 中,脱层Ⅰ和脱层Ⅱ的长度分别为 l_2 和 l_5.

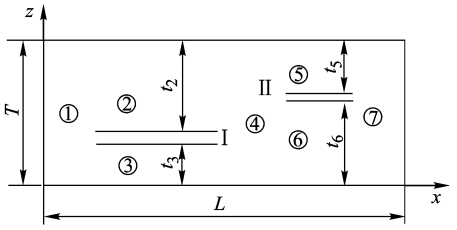


图 1　含双脱层层合梁模型示意图

各子梁在轴向压力下的控制方程[7]为

$$D_i\theta_{i,xx}-kGt_i(\theta_i+w_{i,x})=0\qquad i=1,2,\cdots,7 \tag{1}$$

$$kGt_i(\theta_{i,x}+w_{i,xx})-P_iw_{i,xx}=0\qquad i=1,2,\cdots,7 \tag{2}$$

$$D_i=\frac{E_1t_i^3}{12(1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})}\qquad i=1,2,\cdots,7 \tag{3}$$

式中,D_i 为各子梁抗弯刚度;t_i 为各子梁厚度;E_1 为层合梁轴向弹性模量;υ_{12} 和 υ_{21} 为泊松比;P_i 为各子梁轴向压力;w_i 和 θ_i 分别为各子梁横向挠度和转角;G 为横向剪切模量;k 为剪切因子.

在脱层端部截面上应满足连续条件,如在脱层Ⅰ左端 $x=l_1$ 处有

$$w_1=w_2=w_3 \tag{4}$$
$$\theta_1=\theta_2=\theta_3 \tag{5}$$
$$P_1-P_2-P_3=0 \tag{6}$$
$$-V_1+V_2+V_3=0 \tag{7}$$
$$M_1-M_2-M_3+P_2(t_3/2)-P_3(t_2/2)=0 \tag{8}$$

式(4)～式(8)依次为挠度、转角、面内轴力、横向剪力以及弯矩的连续条件,在其余 3 个脱层端部截面上也应满足相应的连续条件. 同时,不考虑脱层扩展,脱层段上、下子梁的端点在屈曲前后具有相同的轴向位移,以脱层Ⅰ为例(脱层Ⅱ端点的连续条件类似,不再赘述),有

$$\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_1+l_2}\left(\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{(1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})P_2a}{E_1t_2}-\frac{t_2}{2}[\theta(l_1)+\theta(l_1+l_2)]=\frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_1+l_2}\left(\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x+\frac{(1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})P_3a}{E_1t_3}+\frac{t_3}{2}[\theta(l_1)+\theta(l_1+l_2)] \tag{9}$$

式中,各点轴向位移是梁弯曲、轴向压缩和横截面转动 3 种变形引起的轴向位移之和. 屈曲前,$(\mathrm{d}w_i/\mathrm{d}x)^2$ 为小量,可忽略不计,则式(9)化为

$$P_2\frac{t_3}{2}-P_3\frac{t_2}{2}=\frac{(t_2+t_3)t_2t_3E_1}{4l_2(1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})}[\theta(l_1)+\theta(l_1+l_2)] \tag{10}$$

固支端边界条件为

$$w\mid_{(x=0,L)}=0\qquad \theta\mid_{(x=0,L)}=0 \tag{11}$$

另外,各子梁域内节点均采用余弦分布. 采用微分求积法对以上控制方程和边界条件进行离散,得到一个求解标准特征值的线性代数方程组. 为方便起见,定义相对屈曲载荷为

$$\lambda=P_{\mathrm{cr}}/(4\pi^2D_1/L^2) \tag{12}$$

式中,P_{cr} 为含脱层层合梁临界屈曲载荷;$4\pi^2D_1/$

L^2 为不含脱层时层合梁的欧拉临界屈曲载荷；D_1 为不含脱层时层合梁的抗弯刚度.

3 结果与讨论

3.1 含单脱层层合梁的屈曲

含对称单脱层层合梁模型如图2所示，脱层的轴向长度为 a. 层合梁分成4段子梁，①～④表示子梁序号. 表1列出了脱层长度比 $a/L=0.4$ 时在不同脱层深度情况下，本文方法和文献[7]给出的相对屈曲载荷的计算结果，其中包含有剪切作用情况及退化到无剪切作用情况的对比. 表1中 $h=t_2$ 为脱层与层合梁上表面的距离. 由表1对比结果可见，本文方法得到的相对屈曲载荷与文献[7]吻合得很好.

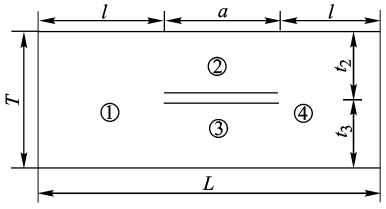


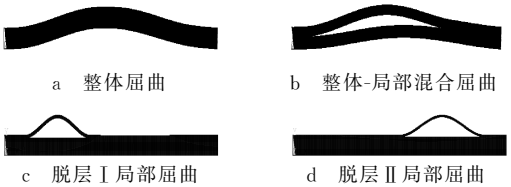
图2 含对称单脱层层合梁模型示意图

表1 脱层长度比为0.4时在不同脱层深度下的相对屈曲载荷 P/P_{cr} 比较

脱层深度(h/T)	P/P_{cr}(含剪切作用)		P/P_{cr}(无剪切作用)	
	本文方法	文献[7]	本文方法	文献[7]
0.02	0.00250	0.00250	0.00251	0.00250
0.05	0.01557	0.01557	0.01561	0.01562
0.1	0.06179	0.06165	0.06219	0.06242
0.2	0.23612	0.23542	0.24474	0.24705
0.3	0.47900	0.48033	0.51764	0.53138

3.2 含多处脱层层合梁的屈曲

如上所述，图1为层合梁的多处脱层示意图. 对任意双脱层，不失一般性，将脱层Ⅱ的长度和深度保持不变，采用本文方法研究脱层Ⅰ的长度和深度对层合梁临界屈曲载荷的影响. 计算发现，对于不同脱层组合，层合梁表现出相应的不同屈曲模式，如图3所示. 下面对几种典型的脱层组合进行讨论.



a 整体屈曲　b 整体-局部混合屈曲

c 脱层Ⅰ局部屈曲　d 脱层Ⅱ局部屈曲

图3 屈曲模式示意图

3.2.1 脱层Ⅱ为长、浅脱层

设脱层Ⅱ比例 $l_5/L=0.4$，深度 $t_5/T=0.1$，脱层Ⅰ和脱层Ⅱ中心与梁左端距离分别为 $x_{c1}/L=0.25$，$x_{c2}/L=0.7$. 由于脱层Ⅱ较长且处于浅表层，极易导致层合梁在脱层Ⅱ处局部屈曲，故当脱层Ⅰ长度相对较小($l_2/L\leqslant 0.2$)时，对屈曲失效模式的影响较小，如图4所示，层合梁的相对屈曲载荷与只含脱层Ⅱ时的情况完全相同.

当脱层Ⅰ长度逐渐增大($l_2/L>0.2$)时，脱层Ⅰ对层合梁稳定性的影响逐渐明显，尤其是当脱层Ⅰ位置较浅($t_2/T<0.1$ 或 $t_2/T>0.9$)时，与只含脱层Ⅱ时相比，脱层Ⅰ大幅降低了层合梁的屈曲承载能力.

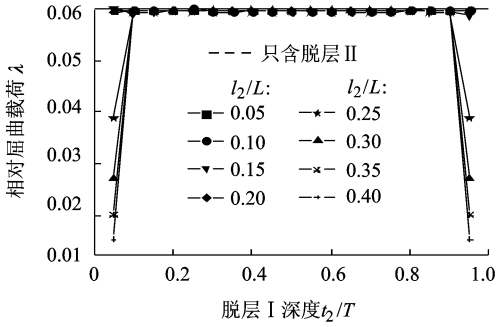


图4 脱层Ⅱ为长、浅脱层时脱层Ⅰ长度和深度对层合梁相对屈曲载荷的影响

3.2.2 脱层Ⅱ为长、深脱层

设脱层Ⅱ比例 $l_5/L=0.4$ 深度 $t_5/T=0.4$，脱层Ⅰ和脱层Ⅱ中心与梁左端距离分别为 $x_{c1}/L=0.25$，$x_{c2}/L=0.7$. 采用本文方法得到的相对屈曲载荷结果如图5所示. 与3.2.1不同，脱层Ⅱ为长、深脱层时，脱层Ⅰ对层合梁稳定性的影响比较明显.

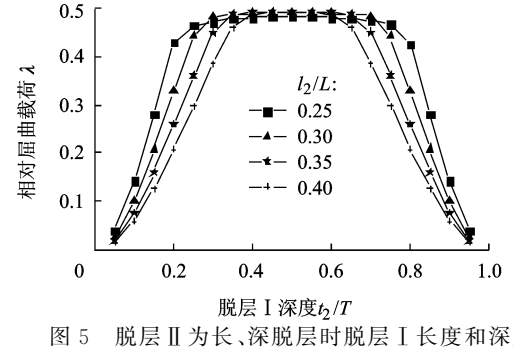


图5 脱层Ⅱ为长、深脱层时脱层Ⅰ长度和深度对层合梁相对屈曲载荷的影响

当脱层Ⅰ很靠近层合梁表层($t_2/T<0.2$)时，层合梁相对屈曲载荷急剧下降；脱层Ⅰ逐渐向层合梁厚度中心靠近($t_2/T>0.3$)时，层合梁屈曲受脱层Ⅰ影响较小，脱层Ⅱ引起的屈曲模式起主导作用.

3.2.3 脱层Ⅱ为短脱层

设脱层Ⅱ比例 $l_5/L=0.1$，脱层Ⅰ和脱层Ⅱ中心与梁左端距离分别为 $x_{c1}/L=0.4$，$x_{c2}/L=0.$

85. 当脱层Ⅱ深度 $t_5/T=0.1$ 和 $t_5/T=0.4$ 时,采用本文方法得到的相对屈曲载荷结果分别如图 6 和图 7 所示. 对比图 6 和图 7,虽然脱层Ⅱ深度不同,但是当脱层Ⅰ长度和深度均相同时,层合梁相对屈曲载荷也基本相同. 可见脱层Ⅱ较短时对层合梁稳定性影响不大,层合梁的临界屈曲载荷主要受脱层Ⅰ影响. 当脱层Ⅰ较短时,脱层Ⅰ越深对层合梁屈曲载荷影响越小;而当脱层Ⅰ位于浅层时,会严重降低层合梁的稳定性.

综上所述,对于两个长脱层,脱层长度相近时,距离层合梁表面较近的脱层对屈曲模式起主导作用;对于两个长度相差较大的脱层,脱层深度相近时,层合梁表现为较长脱层引起的局部屈曲;脱层长度很短时,对层合梁的屈曲模式影响较小.

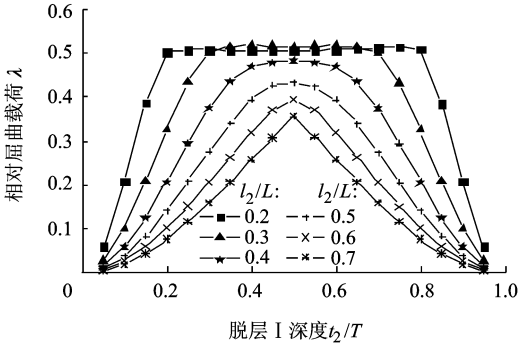


图 6　脱层Ⅱ为短、深脱层时脱层Ⅰ长度和深度对层合梁相对屈曲载荷的影响

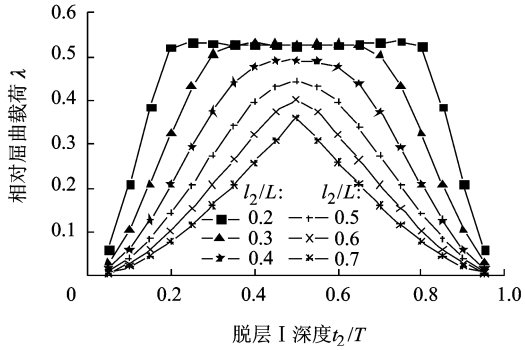


图 7　脱层Ⅱ为短、浅脱层时脱层Ⅰ长度和深度对层合梁相对屈曲载荷的影响

4　结　论

1) 本文提出了求解含任意多处脱层层合梁屈曲问题的微分求积模型,使用该模型计算得到的相对屈曲载荷与文献中的结果相吻合,证明了该模型的适用性和准确性.

2) 层合梁存在多处脱层时,屈曲失稳模式较存在单一脱层时复杂得多,其临界屈曲载荷受脱层长度、深度以及相互位置等因素的共同影响.

3) 最易引发的脱层屈曲模式对层合梁的临界屈曲载荷起主导作用,尤其是当其中一个脱层非常易于引发结构屈曲时,则另外一个脱层对层合梁屈曲载荷的影响较微弱.

4) 作为一种简明高效的数值算法,DQ 法为求解含任意多处脱层层合梁屈曲问题提供了一种实用方法.

参考文献(References)

[1] Rodman U, Saje M, Planinc I, et al. Exact buckling analysis of composite elastic columns including multiple delaminations and transverse shear [J]. Engineering Structures, 2009,89(2):380－390

[2] Aslan Z, Sahin M. Buckling behavior and compressive failure of composite laminates containing multiple large delaminations[J]. Composite Structures, 2009,89(3):382－390

[3] 朱菊芬, 牛海英. 双分层损伤层合梁屈曲有限元分析[J]. 大连理工大学学报, 2004, 44(1): 20－25
Zhu Jufen, Niu Haiying. FE analysis of double delamination damage of composite beam buckling[J]. Journal of Dalian University of Technology, 2004, 44(1): 20－25(in Chinese)

[4] Moradi S, Taheri F. Application of differential quadrature method to the delamination buckling of composite plates[J]. Computers and Structures, 1999, 70(6): 615－623

[5] MSRao P, Sylvain D, Shu D W, et al. Buckling analysis of tri-layer beams with multiple separated delaminations[J]. Composite Structures, 2004,66 (1/2/3/4): 53－60

[6] Chai H, Babcock C D, Knauss W G. One dimensional modeling of failure in laminated plates by delamination buckling [J]. Journal of Solids and Structures, 1981, 17(11):1069－1083

[7] Chen H P. Shear deformation theory for compressive delamination buckling and growth[J]. AIAA Journal, 1991, 29(5): 813－819

[8] 蒋莉, 张志民. 湿热问题全复合材料夹层板面芯分层屈曲研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2002,28(4):438－442
Jiang Li, Zhang Zhimin. Bucking delaminating of composite sandwich plates under hygrothermal conditions [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 28(4):438－441(in Chinese)

[9] Bert C W, Malik M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review [J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(1): 1－27

[10] Shu C. Differential quadrature and its application in engineering [M]. Berlin: Springer, 2000: 186－266

[11] Bellman R, Casti J. Differential quadrature and long-term integration[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1971, 34(2): 235－238

(编　辑:李　晶)