基于观测器的网络化控制系统的变结构控制

赵翔辉 郝 飞

(北京航空航天大学 控制一体化技术国家级科技重点实验室,北京 100191)

摘 要:给出了传感器和控制器之间存在网络时网络化控制系统的一种变结构控制方法.由于对象状态的不完全可测性,利用观测器的状态来设计控制器.如果实际时延小于最大允许时延,则观测器增益矩阵可以通过求解一个线性矩阵不等式来求取,从而保证误差系统是指数渐近稳定的.控制器增益矩阵可以利用极点配置或最优控制的方法来确定,并且能够保证滑动模态是指数渐近稳定的.采用指数趋近律的方法,可以调节相应参数削弱抖振,保证系统具有要求的性能.仿真算例表明了该方法的可行性与有效性.

关 键 词:网络化控制系统;变结构控制;观测器;线性矩阵不等式

中图分类号:TP 13

文献标识码:A **文 章 编 号**:1001-5965(2010)01-0095-05

Observer-based variable structure control for networked control systems

Zhao Xianghui Hao Fei

National Key Lab. of Science and Technology on Holistic Control, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China

Abstract: A variable structure control scheme was proposed for the networked control systems with the networks existing between sensors and controllers. However, the full state of plant can not be directly measurable, so an observer-based controller was established. If the considered delay is smaller than the maximum admissible delay, the observer gain matrix can be calculated by solving a linear matrix inequality that guarantees the error system to be exponential asymptotically stable. The controller gain matrix can be determined by using pole placement or optimal control method and the main results can guarantee the sliding mode to be exponential asymptotically stable. Using the exponential reaching index can adjust the corresponding parameters to weaken the jittering so that the required performance of systems is ensured. A simulation example was given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: networked control systems; variable structure control; observer; linear matrix inequalities

通过实时网络构成的闭环反馈控制系统称为网络化控制系统(NCS,Networked Control System).这种分布式结构减少了连线,降低了成本,便于安装和维护,有着广泛的应用.NCS的主要功能元件(传感器、控制器、执行器等)都通过通信网络相连接,其信号和数据要经过网络进行交换.然而,由于有限网络带宽影响了数据及时准确地传输,从而会产生网络诱导时延,其特性依赖于网络类型和硬件选择,这会降低系统性能,甚至会破坏系统的稳定性.近年来,对NCS的研究已逐渐成为控制领域研究的热点之一[1-2].由于滑动模态对系统摄动及外部干扰具有鲁棒性,变结构控制[3-4]已被广泛应用于控制系统的设计中.然而在NCS的研究中,相关的文献报道较少.文献[5]给出了NCS的变结构控制器设计,但在控制律中直接利用了对象的状态信息,而在对象与控制器

收稿日期:2008-12-30

基金项目:国家自然科学基金资助项目(60504018);北航蓝天新星资助项目

作者简介:赵翔辉(1979—),男,内蒙古卓资人,硕士生,xianghuizhao@163.com.

之间又存在网络，显然这样的控制器是难以实现的. 文献[6]考虑了控制器和执行器之间存在网络的情况，而许多实际的网络化控制系统，通常是传感器和控制器之间存在网络[7-8]. 因此，本文主要考虑在传感器和控制器之间存在网络时，如何设计基于状态观测器的变结构控制器的问题.

1 问题描述及观测器的设计

考虑如图1所示的网络化控制系统，其中被控对象如式(1)描述：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^p$，$\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^q$ 分别为系统状态向量、输入向量和输出向量；$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为适当维数的已知矩阵.

对系统式(1)做如下基本假设：

1) $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$能控，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$能观测；

2) $\boldsymbol{B}$ 列满秩，$\boldsymbol{C}$ 行满秩.

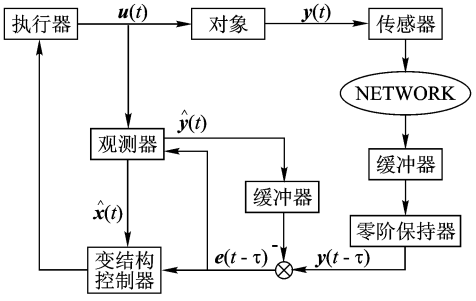


图1 基于观测器的网络化控制系统的结构

假设传感器采用时间驱动，控制器和执行器采用事件驱动，数据采用单包传输，不考虑数据丢包和错序的影响. 在控制器端设置缓冲器，使网络诱导延时为常数. 像文献[8]那样，在控制器端引入观测器，利用其信号构造变结构控制器，不仅可以对网络时延进行补偿，也可过滤网络噪声. 其方程如下：

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=&\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\\ &\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}(t-\tau)-\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau))\end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{x}}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为观测器的状态向量；$\boldsymbol{L}\in\mathbf{R}^{n\times q}$ 为观测器增益阵；τ 为网络诱导时延，即从传感器采样到控制器接收到采样信号之间的所需时间，其中包含了等待时延、处理时延以及传播时延.

在观测器的输出端也引入一个等长度的缓冲器，来获得信号 $\hat{\boldsymbol{x}}(t-\tau)$，然后用此信号与接收到的实际对象状态信息的偏差以及控制输入共同作为观测器的输入来构造观测器. 不失一般性地假设时延 τ 是有界的，即假设 $0\leqslant\tau\leqslant\tau_{\mathrm{M}}$，$\tau_{\mathrm{M}}$ 是有界时滞的界.

定义误差向量 $\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t)$，观测器方程和误差方程分别为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t)=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau) \tag{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{\phi}(t)\qquad t\in[t_0-\tau_{\mathrm{M}},t_0) \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{\phi}(t)$是误差系统的初始函数.

本文的主要目的：

1) 设计状态观测器，使得$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{\sigma}(t)=\boldsymbol{0}$；

2) 设计变结构控制 $\boldsymbol{u}(t)$，使得闭环网络化控制系统在有限时间到达切换流形 $\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\Lambda}\hat{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}$，确定矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 使得滑动模态具有良好的动态品质.

引理1[9] 对给定的矩阵 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{m\times m}$，$\boldsymbol{M}>0$，$\gamma>0$ 和 $\boldsymbol{\omega}:[0,\gamma]\to\mathbf{R}^m$，下面不等式成立：

$$\gamma\int_0^\gamma\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(\beta)\boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega}(\beta)\mathrm{d}\beta\leqslant\left(\int_0^\gamma\boldsymbol{\omega}(\beta)\mathrm{d}\beta\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\left(\int_0^\gamma\boldsymbol{\omega}(\beta)\mathrm{d}\beta\right)$$

定理1 对于系统式(4)和给定的 $0\leqslant\tau\leqslant\tau_{\mathrm{M}}$，如果存在 $\boldsymbol{P}>0$ 以及合适维数的矩阵 $\boldsymbol{N}$，满足：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P} & -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}+\boldsymbol{P} & \tau_{\mathrm{M}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ * & -\boldsymbol{P} & -\tau_{\mathrm{M}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\\ * & * & -\boldsymbol{P}\end{bmatrix}<0 \tag{6}$$

其中 $*$ 表示矩阵的对称块. 则当观测器增益为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}^{+}$ 时，误差系统式(4)是指数渐近稳定的.

证明 由于矩阵 $\boldsymbol{C}$ 行满秩，对于固定的矩阵 $\boldsymbol{L}$，则必存在矩阵 $\boldsymbol{M}$，使得

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} \tag{7}$$

此时式(4)变为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)$$

取 Lyapunov-Krasovskii 候选泛函：

$$\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{\sigma}(t))=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t)\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\sigma}(t)+\int_{-\tau_{\mathrm{M}}}^0\int_{t+\beta}^t\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\alpha)(\tau_{\mathrm{M}}\overline{\boldsymbol{P}})\boldsymbol{\sigma}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

式中$\overline{\boldsymbol{P}}>0$ 待定. $\boldsymbol{V}(t,\boldsymbol{\sigma}(t))$沿系统式(4)的轨线求导得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{V}}(t,\boldsymbol{\sigma}(t))=&\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}+\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)-\\ &2\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t)\overline{\boldsymbol{P}}\overline{\boldsymbol{C}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)+\tau_{\mathrm{M}}^2\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\overline{\boldsymbol{P}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)-\\ &\int_{-\tau_{\mathrm{M}}}^0\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)(\tau_{\mathrm{M}}\overline{\boldsymbol{P}})\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\end{aligned}$$

由 $0\leqslant\tau\leqslant\tau_{\mathrm{M}}$ 对于一般正定的矩阵 $\boldsymbol{R}$，知下式成立：

$$-\int_{-\tau_M}^{0}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}(1+\alpha)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\leqslant -\int_{-\tau}^{0}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha$$

又由引理 1 可得

$$-\int_{-\tau}^{0}\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}(t+\alpha)(\tau_M\overline{\boldsymbol{P}})\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t+\alpha)\mathrm{d}\alpha\leqslant -\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t)\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\sigma}(t)+2\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t)\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)$$

由此可得

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t,\boldsymbol{\sigma}(t))\leqslant\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{P}}-\overline{\boldsymbol{P}})\boldsymbol{\sigma}(t)-2\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t)(\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}-\overline{\boldsymbol{P}})\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t-\tau)\cdot\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)+\tau_M^2\dot{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{T}}(t)\overline{\boldsymbol{P}}\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)$$

令 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t)\quad\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t-\tau)]$,则有

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t,\boldsymbol{\sigma}(t))\leqslant\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\xi}(t)$$

$$\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}+\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{P}} & -\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}+\overline{\boldsymbol{P}}\\ * & -\overline{\boldsymbol{P}}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\tau_M\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \tau_M\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\end{bmatrix}\overline{\boldsymbol{P}}\begin{bmatrix}\tau_M\boldsymbol{A} & \tau_M\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\end{bmatrix}$$

其中 * 表示矩阵的对称块. 取 $\overline{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{P}^{-1}$,$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}\overline{\boldsymbol{P}}$,式(6)分别左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{\overline{\boldsymbol{P}},\overline{\boldsymbol{P}},\overline{\boldsymbol{P}}\}$,便有下式成立:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}+\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{A}-\overline{\boldsymbol{P}} & -\overline{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}+\overline{\boldsymbol{P}} & \tau_M\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{P}}\\ * & -\overline{\boldsymbol{P}} & -\tau_M\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{P}}\\ * & * & -\overline{\boldsymbol{P}}\end{bmatrix}<0 \tag{8}$$

其中 * 表示矩阵的对称块. 根据 Schur 补引理知 $\boldsymbol{\Omega}<0$,故有

$$\dot{\boldsymbol{V}}(t,\boldsymbol{\sigma}(t))\leqslant-\lambda_{\min}(-\boldsymbol{\Omega})\parallel\boldsymbol{\xi}(t)\parallel^2\leqslant-\lambda_{\min}(-\boldsymbol{\Omega})\parallel\boldsymbol{\sigma}(t)\parallel^2$$

定义函数 $\boldsymbol{W}(t)=\boldsymbol{V}(t)\mathrm{e}^{\mu t}$,利用与文献[10]类似的方法,可得存在足够小的常数 $\mu>0$ 以及常数 $\rho>0$,满足

$$\boldsymbol{V}(t)\leqslant\rho\sup_{t_0-\tau_M\leqslant s\leqslant t_0}\parallel\boldsymbol{\phi}(s)\parallel^2\mathrm{e}^{-\mu t}\qquad t\geqslant t_0$$

进而由式(8)可得

$$\parallel\boldsymbol{x}(t)\parallel\leqslant\sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(\overline{\boldsymbol{P}})\rho}\sup_{t_0-\tau_M\leqslant s\leqslant t_0}\parallel\boldsymbol{\phi}(s)\parallel\mathrm{e}^{-\frac{\mu t}{2}}\qquad t\geqslant t_0$$

所以误差系统式(4)是指数渐近稳定的. 又由 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}^{-1}$ 及式(7)可求出观测器增益阵 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{C}^{+}$. **证毕**

利用定理 1,可以求出使误差系统式(4)指数渐近稳定的最大允许时延界 τ_M.

$$\left.\begin{array}{ll}\max\limits_{\boldsymbol{P},\boldsymbol{N}} & \tau_M\\ \text{s. t.} & \boldsymbol{P}>0,\text{式(6)}\end{array}\right\} \tag{9}$$

上述问题可以转化为线性矩阵不等式中的广义特征值问题,利用广义特征值求解器得到该问题的全局最优解.

2　变结构控制器的设计

取切换函数为

$$\boldsymbol{S}(\hat{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\Lambda}\hat{\boldsymbol{x}} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}\in\mathbf{R}^{p\times n}$ 为待设计矩阵,且满足 $\det(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B})\neq0$. 由 $\boldsymbol{B}$ 行满秩,易找到满足要求的 $\boldsymbol{\Lambda}$. 对式(10)求导得

$$\dot{\boldsymbol{S}}(\hat{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\Lambda}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)=0 \tag{11}$$

由此可得等效控制为

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}(t)=-(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)) \tag{12}$$

为了保证正常运动段的品质,减少到达滑动模态的时间和超调量,并抑制和削弱滑动模态上的抖动现象,采用如下的指数趋近律:

$$\dot{\boldsymbol{S}}=-\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{S} \tag{13}$$

其中　$\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}=[\mathrm{sgn}\,s_1,\mathrm{sgn}\,s_2,\cdots,\mathrm{sgn}\,s_p]^{\mathrm{T}}$

$\boldsymbol{K}=\mathrm{diag}\{k_1,k_2,\cdots,k_p\}\qquad k_i>0$

$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathrm{diag}\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_p\}\quad\varepsilon_i>0,i=1,2,\cdots,p$

取变结构控制为等效控制加切换控制的形式,即

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}(t)+\boldsymbol{u}_s(t) \tag{14}$$

将式(12)和式(14)代入式(11)得

$$\dot{\boldsymbol{S}}(\hat{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_s(t)=-\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{S} \tag{15}$$

所以　$\boldsymbol{u}_s(t)=-(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{S})$

$$\boldsymbol{u}(t)=-(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{L}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)+\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{S})$$

从而当 $\boldsymbol{S}\neq0$ 时:

$$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{S}}=-\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{S})<-\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\mathrm{sgn}\,\boldsymbol{S}$$

这表明滑动模态的存在条件和到达条件被满足.

切换面的设计原则主要是确定矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$,使得滑动模态渐近稳定,且具有良好的动态品质.

对观测器状态方程(2)作线性变换 $\hat{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{T}\hat{\boldsymbol{x}}$,使得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ \hat{\boldsymbol{B}}\end{bmatrix} \tag{16}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{B}}$ 为 $p\times p$ 非奇异矩阵,则式(3)变为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}}_1(t)=\boldsymbol{A}_{11}\hat{\boldsymbol{z}}_1(t)+\boldsymbol{A}_{12}\hat{\boldsymbol{z}}_2(t)+\hat{\boldsymbol{L}}_1\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}}_2(t)=\boldsymbol{A}_{21}\hat{\boldsymbol{z}}_1(t)+\boldsymbol{A}_{22}\hat{\boldsymbol{z}}_2(t)+$$

$$\hat{\boldsymbol{L}}_2\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)+\hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t)$$

这里对 $\hat{\boldsymbol{z}}$ 作了分解,相应的矩阵定义如下:

$$\hat{\boldsymbol{z}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{z}}_1\\ \hat{\boldsymbol{z}}_2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{TAT}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{L}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{L}}_1\\ \hat{\boldsymbol{L}}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{TLC}$$

切换方程 $\boldsymbol{\Lambda}\hat{\boldsymbol{x}}=0$ 变换后变为 $\boldsymbol{\Lambda T}^{-1}\hat{\boldsymbol{z}}=0$.

记 $\boldsymbol{\Lambda T}^{-1}=[\boldsymbol{\Lambda}_1\quad\boldsymbol{\Lambda}_2]$,则有

$$\boldsymbol{\Lambda}_1\hat{\boldsymbol{z}}_2+\boldsymbol{\Lambda}_2\hat{\boldsymbol{z}}_2=0 \tag{17}$$

不失一般性地假设 $\boldsymbol{\Lambda}_2$ 非奇异,由式(17)可得

$$\hat{\boldsymbol{z}}_2=-\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_1\hat{\boldsymbol{z}}_1$$

于是得到 $n-p$ 维的滑动模态的运动方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{z}}}_1(t)=\widetilde{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{z}}_1(t)+\hat{\boldsymbol{L}}_1\boldsymbol{\sigma}(t-\tau) \tag{18}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{\Lambda}_2^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_1 \tag{19}$$

定理 2 如果 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是 Hurwitz 的,则系统(18)是指数渐近稳定的.

证明 假设定理 1 的条件可以满足,故有

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}(t)-\boldsymbol{LC}\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)$$

是指数渐近稳定的,而时延 τ 是定常的,故有

$$\|\boldsymbol{\sigma}(t-\tau)\|\leqslant m_0\mathrm{e}^{-\lambda_0 t} \tag{20}$$

其中 m_0 和 λ_0 为正常数. 由于式(18)的解为

$$\hat{\boldsymbol{z}}_1(t)=\mathrm{e}^{\widetilde{\boldsymbol{A}}t}=\mathrm{e}^{\widetilde{\boldsymbol{A}}t}\hat{\boldsymbol{z}}_{10}+\int_0^t\mathrm{e}^{\widetilde{\boldsymbol{A}}(t-\alpha)}\hat{\boldsymbol{L}}_1\boldsymbol{\sigma}(\alpha-\tau)\mathrm{d}\alpha \tag{21}$$

对式(21)两端取范数得

$$\|\hat{\boldsymbol{z}}_1(t)\|\leqslant\|\mathrm{e}^{\widetilde{\boldsymbol{A}}t}\|\,\|\hat{\boldsymbol{z}}_{10}\|+\int_0^t\|\mathrm{e}^{\widetilde{\boldsymbol{A}}(t-\alpha)}\|\cdot\|\hat{\boldsymbol{L}}_1\|\,\|\boldsymbol{\sigma}(\alpha-\tau)\|\mathrm{d}\alpha \tag{22}$$

考虑到$\widetilde{\boldsymbol{A}}$是 Hurwitz 的,故

$$\|\mathrm{e}^{\widetilde{\boldsymbol{A}}t}\|\leqslant m_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \tag{23}$$

其中 m_1 和 λ_1 为适当正数. 将式(20)和式(23)代入式(22)得

$$\|\hat{\boldsymbol{z}}_1(t)\|\leqslant m_1\|\hat{\boldsymbol{z}}_{10}\|\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+m_0m_1\|\hat{\boldsymbol{L}}_1\|\cdot\int_0^t\mathrm{e}^{-(\lambda_0+\lambda_1)t+\lambda_1\alpha}\mathrm{d}\alpha=$$

$$m_1\|\hat{\boldsymbol{z}}_{10}\|\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+m_0m_1\lambda_1^{-1}\|\hat{\boldsymbol{L}}_1\|\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 t})\leqslant$$

$$m_1\|\hat{\boldsymbol{z}}_{10}\|\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}+m_0m_1\lambda_1^{-1}\|\hat{\boldsymbol{L}}_1\|\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\leqslant m\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

其中,$m=m_1\|\hat{\boldsymbol{z}}_{10}\|+m_0m_1\lambda_1^{-1}\|\hat{\boldsymbol{L}}_1\|$;$\lambda=\min\{\lambda_0,\lambda_1\}$. 所以,系统(18)是指数渐近稳定的.

证毕

引理 2[5] 若$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可控,则$(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12})$是可控的.

由于$(\boldsymbol{A}_{11},\boldsymbol{A}_{12})$是可控的,可以利用极点配置或最优控制的方法来取定增益矩阵 $\boldsymbol{F}$,从而由式(17)确定出 $\boldsymbol{\Lambda}_1$. 为了方便,取 $\boldsymbol{\Lambda}_2=\boldsymbol{I}_p$,当 $\boldsymbol{\Lambda}=[-\boldsymbol{F}\quad\boldsymbol{I}]\boldsymbol{T}$ 时,由定理 2 可保证滑动模态是指数渐近稳定的.

综上,总结 NCS 变结构控制器设计步骤如下:

1) 根据式(9)求取最大允许时延界 τ_{Mmax},如果实际时延 $\tau>\tau_{\mathrm{Mmax}}$,问题不可解,否则做下一步;

2) 根据定理 1,求解公式(6),计算观测器增益阵 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{NP}^{-1}\boldsymbol{C}^{+}$;

3) 求取非奇异线性变换矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得式(16)成立;利用极点配置或最优控制的方法来求取增益矩阵 $\boldsymbol{F}$,使得$(\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{F})$为 Hurwitz 矩阵;取 $\boldsymbol{\Lambda}=[-\boldsymbol{F}\quad\boldsymbol{I}]\boldsymbol{T}$,并保证 $\det(\boldsymbol{\Lambda B})\neq0$;

4) 取合适的 $\varepsilon_i,k_i(i=1,2,\cdots,p)$,$\varepsilon_i$ 较小,k_i 较大;

5) 根据式(19)求取控制律.

采用指数趋近律的方法可以通过调节参数 ε_i 和 k_i 来削弱抖振. 参数 ε_i 表示到达切换面的趋近速度,可以选取足够小的 ε_i,保证趋近速度较小,穿过切换面的距离就小,从而切换的滞后小,也就保证了抖振较小. 但同时注意到趋近速度很慢,导致了坏的品质,为了保证削弱抖振的同时也保证快速趋近,故应在减小 ε_i 的同时,增大 k_i 的值.

由于基于观测器构造的切换面 $\boldsymbol{S}(\hat{x})=\boldsymbol{\Lambda}\hat{\boldsymbol{x}}$ 与理想的切换面 $\boldsymbol{S}(x)=\boldsymbol{\Lambda x}$ 是平行的,它们存在距离 $\boldsymbol{d}=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\sigma}(t)$,随着时间 t 的增加 $\boldsymbol{d}$ 最终趋于零,但这种替换会对系统的鲁棒性造成一定的影响.

3 算例及仿真

考虑图 1 所示的 NCS,被控对象(式(1))中:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -7 & -25\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{C}=[1\quad0]$$

由式(9)求取最大允许时延界 $\tau_{\mathrm{Mmax}}=0.28$. 取 $\tau=0.2$,根据定理 1,求解式(5)得

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.7985 & -0.2114\\ -0.2114 & 0.0786\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}=[0.7678\quad-0.2032]$$

故观测器增益

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{NP}^{-1}\boldsymbol{C}^{+}=[0.9615\quad0]^{\mathrm{T}}$$

观测器方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_1(t)\\ \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -7 & -25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1(t)\\ \hat{\boldsymbol{x}}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}(t)+\begin{bmatrix}0.9615 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_1(t-\tau)\\ \boldsymbol{\sigma}_2(t-\tau)\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 已经是标准形式,故 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}$. 取期望极点为$-5$,由极点配置原理可取 $F=-5$,故取 $\boldsymbol{\Lambda}=[5\quad 1]$;取 $K=100$,$\varepsilon=0.01$,由式(14)求得控制律为

$$\boldsymbol{u}(t)=-493\hat{\boldsymbol{x}}_1-70\hat{\boldsymbol{x}}_2+4.8075\boldsymbol{\sigma}_1(t-\tau)+0.01\mathrm{sgn}(-5\hat{\boldsymbol{x}}_1+\hat{\boldsymbol{x}}_2)$$

当取初始条件为 $\boldsymbol{x}_0=[1\quad -1]^{\mathrm{T}}$ 时 NCS 的状态响应、控制输入、切换函数的曲线分别见图 2～图 4. 当 $\varepsilon=1$ 时,仿真曲线见图 5～图 7. 可以看出,状态响应和控制输入有明显的抖振. 这说明减小 ε 对削弱抖振具有显著的效果. 在 0～3 s 给对象施加扰动信号 $\boldsymbol{f}(t)=[0\quad 0.5\sin t]^{\mathrm{T}}$,取 $\varepsilon=0.01$,状态响应和控制输入仿真曲线分别见图 8～图 9. 由图 8～图 9 可见,当存在外部扰动时,闭环系统渐近稳定,这说明该变结构控制器具有较好的鲁棒性;同时发现状态 $\boldsymbol{x}_2$ 和控制输入都存在小幅抖振,可以通过减小 ε 消除.

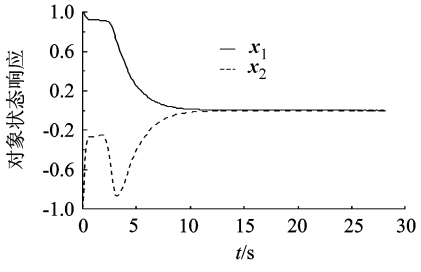


图 2　对象状态响应($\varepsilon=0.01$)

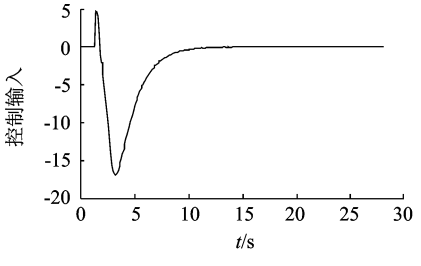


图 3　控制输入($\varepsilon=0.01$)

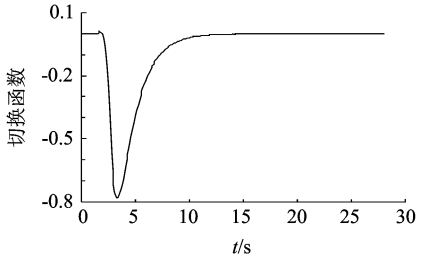


图 4　切换函数($\varepsilon=0.01$)

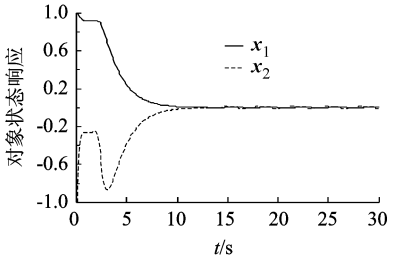


图 5　对象状态响应($\varepsilon=1$)

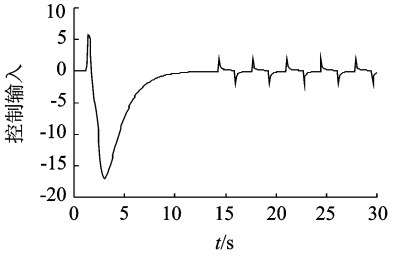


图 6　控制输入($\varepsilon=1$)

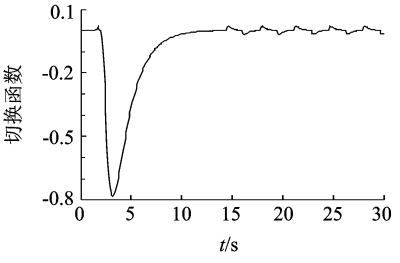


图 7　切换函数($\varepsilon=1$)

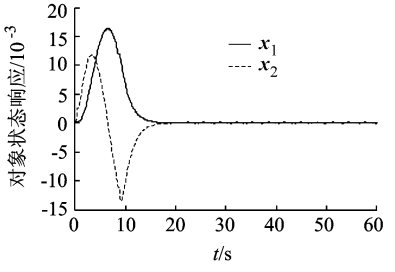


图 8　存在扰动时对象状态响应($\varepsilon=0.01$)

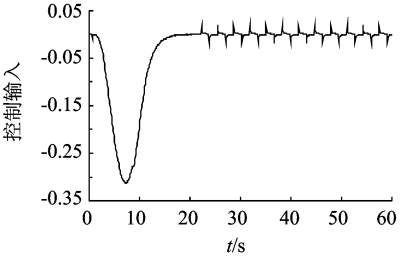


图 9　存在扰动时控制输入($\varepsilon=0.01$)

4　结　论

本文主要研究了在传感器和控制器之间存在网络时 NCS 的变结构控制问题. 由于对象的状态不能直接利用,所以在控制器端构造了状态观测器,利用观测器的状态来构造切换函数和变结构

(下转第 109 页)