压电复合材料壁板颤振的控制

苑凯华 邱志平

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院, 北京 100191)

摘 要: 针对考虑热效应的壁板颤振问题,利用 von Karman大变形应变-位移关系、气动力活塞理论和准定常热应力理论建立了埋入压电材料的复合材料板颤振的气动弹性力学模型,使用 Bogner-Fox-Schmit单元推导出壁板颤振的非线性有限元方程. 将该动力学方程转换到状态空间模型,给出了基于这个非线性模型的最优控制. 应用 Runge-Kutta方法在时域内对一个四边简支的含压电材料的复合材料壁板颤振的控制进行了仿真,数值结果证明了该方法的有效性.

关 键 词: 壁板颤振; 活塞理论; 热应力理论; 有限元; 压电材料

中图分类号: O 326

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2009)12-1429-05

Flutter control of composite panels with embedded piezoelectric materials

Yuan Kaihua Qiu Zhiping

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The panel flutter phenomenon with thermal effect was researched. By virtue of von Karman's large deflection plate theory, piston theory aerodynamics and the quasi-steady thermal stress theory, the aeroelastic model of composite panel with embedded piezoelectric materials was established. In nonlinear finite element equation the Bogner-Fox-Schmit element was adopted. The dynamic equations of motion were transformed into a state space model in order to design controller. An optimal controller based on the nonlinear model was presented. The flutter suppression results in the time domain using the Runge-Kutta method for a simply supported piezolaminated composite panel subjected to uniform thermal loading was realized. The effectiveness of the present control method was illustrated by simulation solution.

Key words: panel flutter; piston theory; thermal stress theory; finite element method; piezoelectric materials

壁板颤振是高速飞行时一种典型的自激振动现象,对壁板颤振的研究始于 20世纪 50年代,当时进行了大量的理论分析和试验研究[1]. 文献[2]采用活塞理论计算气动力,并提出了求解非线性颤振方程的 LUM/NTF方法. 文献[3]对任意形状的各向同性板在非均匀温度分布场下,作了非线性颤振响应的有限元分析,把温度效应以热应力的形式引入到板结构的动力学方程中. 随后又研究了利用智能材料,如压电材料、形状记忆合金等对壁板颤振进行抑制[4]. 首先将压电材料应用于复合材料梁、板、壳的控制问题的是文献[5]. 对于压电柔性结构的振动控制的研究,不仅有理论的推导和数值模拟计算[6-8],还包括在实际柔性结构上成功地实现振动主动控制的工作[9].

本文研究了考虑热效应的壁板颤振问题,采用 von Karman大变形应变-位移关系、气动力活塞理论和准定常热应力理论建立了埋入压电材料的复合材料板颤振的气动弹性力学模型,推导出动力学有限元方程,并转换为状态空间表达式,通

收稿日期: 2008-11-12

基金项目: 航天科技创新基金资助项目; 航空科学基金资助项目 (2007ZA51003)

作者简介: 苑凯华 (1983-), 女, 河北保定人, 博士生, king101010@sohu.com.

过对此非线性系统控制律的设计,实现了对壁板颤振的抑制.

1 壁板颤振的有限元模型

壁板颤振的物理模型如图 1所示.

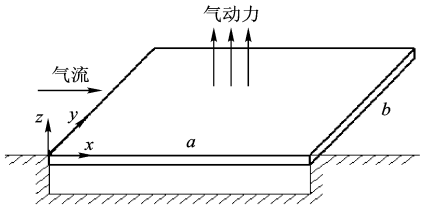


图 1 壁板颤振的物理模型

本文采用 Bogner-Fox-Schmit矩形单元,单元的每个节点有 6个自由度,包括两个面内位移 $w_m=\{u, v\}^T$ 和 4个弯曲位移 $w_b=\{w, w_{,x}, w_{,y}, w_{,xy}\}^T$.

对于薄板结构,根据 von Karman大变形应变 位移关系,壁板的应变 ε可分解为 3项:

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y}+v_{,x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} w_{,x}^2 \\ w_{,y}^2 \\ 2w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} - z\begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = \varepsilon_m^0+\varepsilon_\theta^0+z\kappa \tag{1}$$

当飞行器超声速或高超声速飞行时,会产生气动加热,气动加热产生的温度效应将极大地影响壁板的颤振特性,当结构处于不均匀的温度场或者结构变形受到约束时,都要产生热应变和热应力. 随着温度的升高,这种热诱导的应力对结构刚度有削弱的作用,热应变产生附加刚度 $k_{N\Delta T}$;设壁板周围的温度场均匀升高 ΔT,那么热应变为 $-\Delta T\alpha_k$.

则壁板第 k层的本构关系为

$$\sigma_k=\bar{Q}_k(\varepsilon-\Delta T\alpha_k-e_{3k}d_k) \tag{2}$$

式中,$\bar{Q}_k$ 为第 k层的刚度矩阵;ε为壁板应变;α_k 为材料的热膨胀系数;e_{3k}为电场强度,对于复合材料层,设 $e_{3k}=0$;d_k为压电常数.

壁板厚度为 h,则壁板的刚度矩阵为

$$(A_0, B_0, D_0)=\int_{-h/2}^{h/2}\bar{Q}_k(1, z, z^2)\,dz \tag{3}$$

式中,A_0为交叉刚度;B_0为耦合刚度;D_0为弯曲刚度.

单位长度的热应力和力矩为

$$(N_{\Delta T}, M_{\Delta T})=\int_{-h/2}^{h/2}\bar{Q}_k\alpha_k\Delta T(1, z)\,dz \tag{4}$$

单位长度的压电应力和力矩为

$$(N_\phi, M_\phi)=\int_{-h/2}^{h/2}\bar{Q}_k d_k e_{3k}(1, z)\,dz \tag{5}$$

则层合板的内力为

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0 & D_0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} N_{\Delta T} \\ M_{\Delta T} \end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} N_\phi \\ M_\phi \end{Bmatrix} \tag{6}$$

式中,$\varepsilon^0=\varepsilon_m^0+\varepsilon^0\theta$.

一阶活塞理论的气动力表达式为

$$p_a=-\frac{2q_a}{\beta}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\frac{Ma_\infty^2-2}{Ma_\infty^2-1}\right)\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=-\left(\lambda\frac{D_{110}}{a^3}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{g_a}{\omega_0}\frac{D_{110}}{a^4}\frac{\partial w}{\partial t}\right) \tag{7}$$

式中,气流动压 $q_a=\rho_a V^2/2$,ρ_a为空气密度,V为气流速度;Ma_∞为马赫数;$\beta=\sqrt{Ma_\infty^2-1}$;无量纲气流动压 $\lambda=2q_a a^2/\beta D_{110}$;$g_a=\rho_a V(Ma_\infty^2-2)/\rho h\omega_0\beta^3$;$\omega_0=\sqrt{D_{110}/\rho h a^4}$;$a$为来流方向的壁板长度;$h$为壁板厚度;$D_{110}=Eh^3/(12(1-\nu^2))$.

由于在颤振分析中采用了大变形的非线性结构理论,考虑了壁板的面内张力,面内张力在振动中起到一种硬弹簧的效应. 随着振幅的增大,面内张力使壁板颤振系统的等效刚度增大,因此壁板的响应不会在超过某个临界值后由收敛立即转为发散,这时存在一个速度范围;当来流速度在这个范围中时,壁板的振动是等幅振动,这是一种非线性振动,响应在相空间中将以一孤立的闭轨形式出现,是极限环振动. 极限环振动会影响到壁板结构的疲劳寿命,对飞行器的飞行产生不利的影响.

根据 Hamilton原理建立起定常温度场下壁板颤振的有限元方程:

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 & 0 \\ 0 & m_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{w}_b \\ \ddot{w}_m \\ \ddot{w}_\phi \end{Bmatrix}+g_a\begin{bmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{w}_b \\ \dot{w}_m \\ \dot{w}_\phi \end{Bmatrix}+\left(\lambda\begin{bmatrix} a_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_b & k_{bm} & k_{b\phi} \\ k_{mb} & k_m & k_{m\phi} \\ k_{\phi b} & k_{\phi m} & k_\phi \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} k_{1\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} k_{N\Delta T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} n_{1m}+n_{1b} & n_{1bm} & n_{1b\phi} \\ n_{1mb} & 0 & 0 \\ n_{1\phi b} & 0 & 0 \end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix} n_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} w_b \\ w_m \\ w_\phi \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} p_{b\Delta T} \\ p_{m\Delta T} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

式中,m, g, a_a, k分别为质量矩阵、气动阻尼矩阵、

气动力影响矩阵和线性刚度矩阵; n_1 和 n_2 为面内张力产生的非线性刚度矩阵,分别是位移的一次和二次函数; $k_{N\Delta T}$为热应变产生的附加刚度,与 $N_{\Delta T}, M_{\Delta T}$有关; $k_{b\phi}$, $k_{m\phi}$, k_{ϕ}, $k_{t\phi}$为压电材料产生的刚度,与 N_{ϕ}, M_{ϕ} 有关; p为温度场引起的附加力矢量[10]; w_{ϕ} 为外加电压;下标 b,m分别代表与弯曲位移和与面内位移有关的项.

考虑具有对称铺层的复合材料壁板,由于 $B_0 = \mathbf{0}$,则 $k_{mb} = k_{bm}^{T} = \mathbf{0}$, $k_{\phi b} = k_{b\phi}^{T} = \mathbf{0}$, $n_{1\phi b} = n_{1b\phi}^{T} = \mathbf{0}$, $k_{t\phi} = \mathbf{0}$, $p_{b\Delta T} = \mathbf{0}$.

壁板结构整体的有限元方程为

$$M\ddot{W} + G\dot{W} + KW = P_{\Delta T} - K_{b\phi}W_{\phi} \qquad (9)$$

式中, $K = (\lambda A_a + K_0 - K_{N\Delta T} + N_1/2 + N_2/3)$.

2 壁板的状态空间模型

在壁板颤振的动力学方程中,位移矩阵中的自由度很大,非线性刚度矩阵是位移的函数,为了便于实现对此系统的控制,有必要将式 (9)转换到模态空间中[3]. 壁板的位移可以表示为

$$W = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m} q_{rs}(t)\,\phi_{rs} \qquad (10)$$

式中, q_{rs}为模态坐标; ϕ_{rs}为壁板线性振动的模态向量.

$$K_0\phi_{rs} = \mu M\phi_{rs} \qquad (11)$$

对于一个矩形壁板,当来流沿 x方向时, y方向仅取第一阶模态,而 x方向可以取前 6阶模态. 在文献[11]中,已经证明了这种模态综合方法的正确性和有效性.

位移又可以表示为

$$W = \sum_{r=1}^{6} q_r(t)\,\phi_r = \Phi q \qquad (12)$$

非线性矩阵:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \sum_{r=1}^{6} q_r N_1^{(r)} \\ N_2 &= \sum_{r=1}^{6}\sum_{s=1}^{6} q_s q_r N_2^{(rs)} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

通过模态变换,由式 (9)得到

$$\ddot{q} + \tilde{G}\dot{q} + \tilde{K}q = \tilde{P}_{\Delta T} - \tilde{K}_{b\phi}W_{\phi} \qquad (14)$$

式中

$$\Phi^{T}M\Phi = I$$

$$\Phi^{T}G\Phi = \tilde{G} \qquad \Phi^{T}K\Phi = \tilde{K}$$

$$\Phi^{T}P_{\Delta T} = \tilde{P}_{\Delta T} \qquad \Phi^{T}K_{b\phi} = \tilde{K}_{b\phi}$$

由式 (14)可以得到状态空间模型:

$$\dot{x} = Ax + BW_{\phi} + Z \qquad (15)$$

式中

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I \\ -\tilde{K} & -\tilde{G} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\tilde{K}_{b\phi} \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{P}_{\Delta T} \end{bmatrix}$$

3 壁板颤振的控制律设计

上述系统是非线性的,用时域方法求解上述动力学方程时,刚度矩阵在每一个时间步都会发生变化,因此要求控制律随时间变化.

首先将矩阵 A中的 $\tilde{K}$分解为

$$\tilde{K} = \tilde{K}_{lin} + \tilde{K}_1 + \tilde{K}_2 \qquad (16)$$

式中, $\tilde{K}_{lin} = \lambda A_a + K_0 - K_{N\Delta T}$,是随时间不变的刚度矩阵部分; $\tilde{K}_1$ 和 $\tilde{K}_2$ 是随着位移的改变而变化的刚度矩阵部分,是非线性项.

利用线性二次最优控制获得反馈增益 P,这个反馈增益使得下面的二次型性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}(x^{T}Qx + W_{\phi}^{T}RW_{\phi})\,d\tau \qquad (17)$$

式中, Q是正定加权矩阵,本文取 $Q = \begin{bmatrix} K_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix}$; R是半正定的加权矩阵.

根据线性最优二次控制的理论,反馈增益 P可以由 Riccati方程得到.

对上述的非线性系统,引入全状态反馈最优控制[12]:

$$W_{\phi} = -R^{-1}B^{T}\{Px(t) + r(t)\} \qquad (18)$$

式中, $r(t)$满足下面的方程:

$$\left.\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -(A^{T} - PBR^{-1}B^{T})\,r(t) - PZ(t) \\ r(t_f) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

式中, $t_f = \infty$;应用边界条件 $r(t_f) = 0$, $r(t)$可以通过反向的时间积分求得.

将式 (18)代入式 (15)得

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^{T}Px(t) - BR^{-1}B^{T}r(t) + Z \qquad (20)$$

更进一步表示为

$$\ddot{q} + (\tilde{G} - \tilde{K}_{b\phi}S_{\dot{q}})\dot{q} + (\tilde{K} - \tilde{K}_{b\phi}S_{q})q = \tilde{P}_{\Delta T} - \tilde{K}_{b\phi}R^{-1}b^{T}r(t) \qquad (21)$$

式中, $[S_q \quad S_{\dot{q}}] = R^{-1}B^{T}P$.

上述控制中考虑了非线性刚度矩阵,是基于非线性模型的控制.

4 数值算例

考虑在均匀温度场下四边简支的矩形壁板，如图 2所示，其中黑色填充部分为铺设在壁板最顶层和最底层的压电材料的位置. 壁板的几何外形为 $a=0.3$ m, $b=0.2$ m; 复合材料板的层数是8，每层厚 0.15 mm; 层合板的铺迭方式为 $[0°/45°/-45°/90°]_S$，由石墨/环氧材料制成；材料的主要参数为弹性模量 $E_1=155$ GPa, $E_2=8.07$ GPa, $G_{12}=4.55$ GPa, 泊松比 $\nu=0.22$, 热膨胀系数 $\alpha_1=-7\times10^{-8}$ ℃, $\alpha_2=3.01\times10^{-5}$ ℃, 密度 $\rho=1550$ kg/m^3；压电材料的主要参数为弹性模量 $E_p=62.1$ GPa, 泊松比 $\nu=0.3$, 热膨胀系数 $\alpha_p=5.41\times10^{-6}$ ℃, 密度 $\rho_p=7550$ kg/m^3, 压电应力常数 $d_{31}=-1.9\times10^{-10}$ m/V, 电场强度 $e_{3max}=6.0\times10^5$ V/m.

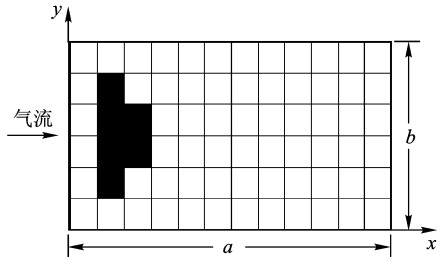


图 2 壁板颤振模型示意图

表 1给出了当 $\Delta T=0, 25, 50$ ℃时控制前后壁板发生颤振，即开始极限环振动的临界速度. λ_0, λ_{con}分别表示控制前后的临界速度.

表 1 控制前后临界速度比较

ΔT/℃	λ_0	λ_{con}
0	620	739
25	476	582
50	405	459

用四阶龙格-库塔法得到在 $\lambda=700$, $\Delta T=0$ ℃时的壁板的最大弯曲位移随时间变化的历程，此时壁板发生了极限环颤振，如图 3所示，相位图如图 4所示，图中，w/h为无量纲弯曲振动位移，$w_{,t}/h$为无量纲弯曲振动速度. 最大位移点在 $\bar{x}=0.75$, $\bar{y}=0.5$处，无量纲时间 $\tau=\omega_0 t$当在 $\tau=4$时开始控制，得到位移历程图如图 5所示，所施加的控制力时程图如图 6所示.

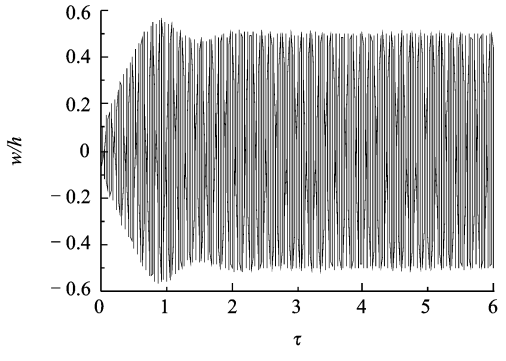


图 3 未加控制时的最大位移图

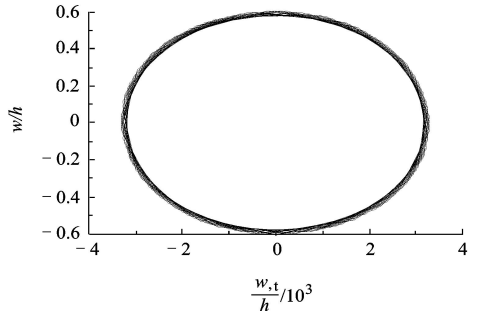


图 4 未加控制时的相位图

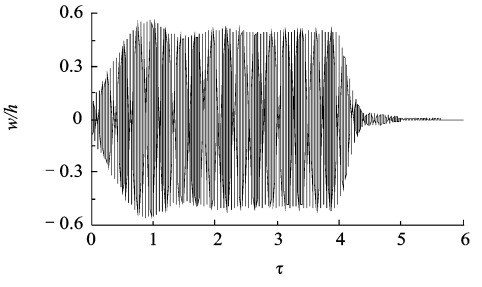


图 5 $\tau=4$时刻开始控制后的最大位移图

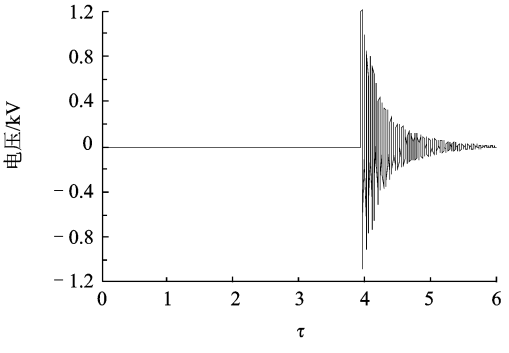


图 6 $\tau=4$时刻开始控制的电压时程图

5 结 论

本文考虑了超声速和高超声速下壁板颤振的非线性力学特性，根据 Hamilton原理建立了壁板颤振的气动弹性模型，应用压电材料作为作动器和传感器，设计了基于上述非线性动力学模型的控制律，并应用 Runge-Kutta数值积分的方法模拟了控制前后壁板颤振的位移响应. 数值模拟表明，对壁板结构施加控制后，不仅提高了颤振的临界速度，而且降低了壁板极限环振动的振幅，有效地实现了对壁板颤振的抑制.

参考文献 (References)

[1] Dowell E H. Aeroelasticity of plates and shells[M]. Netherlands: Noordhoff International Publishing, 1975: 1 - 9

[2] Gray C E, Mei C, Shore C P. Finite element method for large-amplitude two-dimensional panel flutter at hypersonic speeds[J]. AIAA Journal, 1991, 29(2): 290 - 298

[3] Xue D Y, Mei C. Finite element nonlinear panel flutter with arbitrary temperatures in supersonic flow[J]. AIAA Journal, 1993, 31(1): 154 - 162

[4] Li Qinqin, Mei C, Huang J K. Suppression of thermal postbuckling and nonlinear panel flutter motions using piezoelectric actuators[J]. AIAA Journal, 2007, 45(8): 1861 - 1873

[5] Koconis D B, Kollar L P, Springer G S. Shape control of composite plates and shells with embedded actuators Ⅰ: voltages specified[J]. Journal of Composite Materials, 1994, 28(5): 415 - 458

[6] 方有亮,武哲. 配置压电自感作动器复合层板的振动主动控制[J]. 航空学报, 2000, 21(3): 247 - 250
Fang Youliang, Wu Zhe. Active vibration control of composite plate with self-sensing piezoelectric actuators[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2000, 21(3): 247 - 250 (in Chinese)

[7] 咸奎成,黄海. 自适应压电桁架形状控制中作动器优化配置[J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(5): 527 - 530
Xian Kuicheng, Huang Hai. Optimal actuator placements for shape control of adaptive piezoelectric truss[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(5): 527 - 530 (in Chinese)

[8] 胡举喜,邱志平. 压电层合板振动的鲁棒控制[J]. 北京航空航天大学学报, 2008, 34(8): 873 - 876
Hu Juxi, Qiu Zhiping. Using the robust control method to control the vibration piezoelectric laminated plates[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2008, 34(8): 873 - 876 (in Chinese)

[9] 吴大方,刘安成,麦汉超,等. 压电智能柔性梁振动主动控制研究[J]. 北京航空航天大学学报, 2004, 30(2): 160 - 163
Wu Dafang, Liu Ancheng, Mai Hanchao, et al. Study on active vibration control of piezoelectric intelligent flexible beam[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(2): 160 - 163 (in Chinese)

[10] Cheng Guangfeng. Finite element modal formulation for panel flutter at hypersonic speeds and elevated temperatures[D]. Virginia: Department of Engineering Mechanics, Old Dominion University, 2002

[11] Zhou R C, Xue D Y, Mei C. A finite element time domain-modal formulation for nonlinear flutter of composite panels[J]. AIAA Journal, 1994, 32(10): 2044 - 2052

[12] Junkins J L, Kim Y. Introduction to dynamics and control of flexible structures[M]. Washington D C: AIAA, 1993: 287

(编　辑:李　晶)

(上接第 1428页)

4 结　论

在多层次弹道优化框架中,随着系统层次的增加,系统设计变量的增加,考虑到系统的复杂性,各层次之间的相互作用耦合,将一个层次视为一个学科,多层次弹道优化问题实质上可视为一个 MDO问题. 本文采用了 GSE方法求解多层次弹道优化问题,结合了中制导段弹道优化和末制导段时间常数设计两个问题,采用杀伤概率这一系统效能指标作为弹道优化的指标,从而得到使整个系统效能最优的优化弹道. 通过枚举法的验证,说明 GSE方法求解多层次弹道优化问题是有效的. 而均匀设计和神经网络的应用,大大减小了计算的周期.

参考文献 (References)

[1] Phillips C A, Drake J C. Trajectory optimization for a SAM using a multi-tier approach[R]. AIAA-94-4404, 1994

[2] Phillips C A, Drake J C. Trajectory optimization for a missile using a multitier approach[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2000, 37(5): 653 - 662

[3] 王振国,陈小前,罗文彩,等. 飞行器多学科设计优化理论与应用研究[M]. 北京:国防工业出版社, 2006
Wang Zhenguo, Chen Xiaoqian, Luo Wencai, et al. Research on the theory and application of multidisciplinary design optimization of flight vehicles[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2006 (in Chinese)

[4] Sobieszczanki-Sobieski J. Sensitivity of complex, internally coupled systems[J]. AIAA Journal, 1990, 28(1): 153 - 160

[5] 方卫国,郦正能. 基于全局敏度方程方法的飞机方案设计[J]. 航空学报, 1998, 19(3): 293 - 298
Fang Weiguo, Li Zhengneng. Aircraft scheme optimization design based on global sensitivity equation method[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 1998, 19(3): 293 - 298 (in Chinese)

[6] Zarchan P. Tactical and strategic missile guidance[M]. 3rd ed. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, 1998

[7] 斯维特洛夫 В Г, 戈卢别夫 И С. 防空导弹设计[M]. 北京:中国宇航出版社, 2004: 42 - 44
Светлов В Г, Голубев И С. Air defense missile design[M]. Beijing: Chinese Astronautics Press, 2004: 42 - 44 (in Chinese)

[8] 方开泰,马长兴. 正交与均匀实验设计[M]. 北京:科学出版社, 2001
Fang Kaitai, Ma Changxing. Orthogonal and uniform design of experiments[M]. Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese)

(编　辑:张　嵘)