PH 曲线拟合在数控前瞻中的应用

王琦魁 李 伟 陈友东

(中国农业大学 工学院，北京 100083) (北京航空航天大学 工程系统工程系，北京 100191)

王田苗

(北京航空航天大学 机械工程及自动化学院，北京 100191)

摘 要：为解决数控系统进行微小直线段平稳加工的问题，提出了一种拟合方法.综合了误差限制下的微小直线段长度、拐角、直线段相交点单调性等判定条件，将连续的微小直线段分割成若干区域.使用非线性最小二乘法将每一个区域内的点拟合成 PH 曲线，并通过模拟退火方法调整切矢量来控制拟合误差.根据区域的连接情况，将切矢量分为单向和双向两种调节方法.在模拟退火算法中，将微小直线段的斜率作为切矢量的初始值，利用细分直线的方法逐点计算弓高误差，并将此误差作为目标函数来快速进行切矢量的调整.结果表明，对微小直线段进行区域划分可以提高拟合效率.在控制弓高误差的情况下，此方法可以形成具有良好精度的光滑曲线，可以获得平稳的速度轨迹.

关 键 词：数控系统；曲线拟合；误差；PH 曲线

中图分类号：TP 273

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)09-1052-05

Application of PH curve in CNC look-ahead function

Wang Qikui Li Wei

(College of Engineering, China Agricultural University, Beijing 100083, China)

Chen Youdong

(Dept. of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Wang Tianmiao

(School of Mechanical Engineering and Automation, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: A new method was developed to smooth the micro-line while machining in computer numerical control systems. Four rules including angle between transfer vectors with speed limitation, length and angle between the micro-lines with accuracy limitation and the monotonicity of the point were proposed to divide segments into some areas. Nonlinear least squares method was introduced to fit the lines into PH curves. Simulated annealing algorithm was used to adjust the tangent vector for getting better accuracy. The model of adjustment included both unidirectional and bidirectional adjustments by the situation of the point between the areas. Straight slope was considered as the initial value of the tangent vector in the simulated annealing algorithm. Chord error was computed by segmenting the micro-line, the error was the objective function to determine the adjustment of the vector. The results illustrate the dividing rules improve the fitting efficiency. Smooth curves with high accuracy were obtained to get better velocity profile.

Key words: computer numerical control system; curve fitting; errors; Pythagorean-hodograph - curve

收稿日期：2009-09-08

基金项目：国家自然科学基金资助项目(60404019)

作者简介：王琦魁(1982—)，男，辽宁沈阳人，博士生，qkwang@126.com.

通常情况下,CAD/CAM 系统将设计曲线转化成为很多微小直线段,然后传递给数控(CNC, Computer Numerical Control)系统进行加工. 由于数控系统能力的不断提高,有些数控系统具有了曲线插补能力. 但是有些 CAD/CAM 软件不支持与数控系统进行完整的数据传递,使得系统很难进行曲线插补[1]. 同时,数控系统很难同时兼容很多不同次数的参数曲线插补. 另一方面,在 3-D 扫描技术中使用点或三角形来描述数据模型已成为一种趋势[2]. 所以,使用微小直线段表示曲线进行数控加工仍然是一种很有效的手段.

在加工时由于微小直线段的连续性较差,使得加工过程要不断进行加减速,对机床系统的冲击增大,零件的加工表面质量和加工效率降低. 为了改善加工过程,使其能够更加平稳,减小加工中的速度突变,减弱加工中刀具与零件之间的冲击,就需要对微小直线段进行预处理. 国内外的学者在这方面进行了广泛的研究. 一些学者将微小直线段拟合成为曲线,文献[1]中将在线的 NURBS 拟合分为取数据和拟合两个阶段. 在 NURBS 拟合中利用最优搜索方法来得到合适的控制点个数和曲线次数,使加工时间缩短了 23%. 文献[2]中将微小直线段拟合成 Bezier 曲线,避免了 NURBS 插补中的截断误差的问题,提出了针对 Bezier 曲线的微小直线段划分原则. 但是,Bezier 曲线在拟合中对曲线的调节能力又不及 NURBS. 文献[3]中将微小直线段拟合成 PH 曲线,以位置误差作为模拟退火算法中的目标函数,不利于保证拟合精度. 一些学者对实时前瞻方面进行了研究,提出了微小线段连接模型及其速度规划方法,得到了平滑的速度曲线[4-8].

本文为了实现实时前瞻,将微小直线段分割成若干个区域,使用 PH 曲线逐个对每个区域进行拟合,从而得到目标曲线. 在拟合前针对 PH 曲线的特点,提出了误差限制下的拐角、长度判定,直线段交点的单调性等 3 个判定条件,并分析了区域连接条件的情况. 在使用模拟退火算法进行非线性最小二乘拟合时,将直线段斜率作为模拟退火算法中切矢量的初始值. 给出了一种将微小直线段进行细分,逐点计算弓高误差的方法. 将此弓高误差作为模拟退火算法的目标函数,有利于保证拟合精度的要求.

1　微小直线段区域划分条件

在对微小直线段进行拟合时,为了保证拟合精度,需要对微小直线段进行区域划分. 在区域内进行拟合并进行区域连接以提高拟合效率,缩短计算时间. 为了能够合理地对区域进行划分,下面的一些条件需要考虑.

1.1　误差限制下的微小直线拐角判定

由于微小直线段的拐角大小反映出微小直线段之间的连接关系,其能够影响拟合曲线的形状和拟合精度. 为了保证拟合误差,微小直线段需要满足误差限制下拐角的判定条件.

1) 微小直线段夹角大小的计算

如图 1 所示,微小直线段轨迹上的 3 个点为 $P_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$, $P_i(x_i,y_i)$, $P_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$,直线段 l_3 和 l_4 的长度分别为 L_{i-1} 和 L_i. 根据直线段夹角计算公式计算两段微小直线段的拐角为[5]

$$\alpha_c=\arccos[(x_{i+1}-x_i)(x_i-x_{i-1})+(y_{i+1}-y_i)(y_i-y_{i-1})]/(L_{i-1}L_i) \tag{1}$$

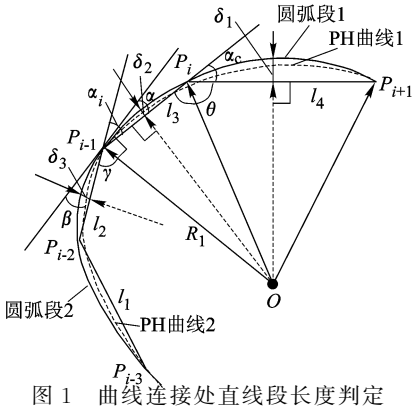


图 1　曲线连接处直线段长度判定

2) 误差限制下的拐角大小的计算

令 θ 为两条直线段之间的夹角,则由直线段连接处的角度关系可以得到

$$\theta=\arcsin((R_1-\delta_1)/R_1)+\arcsin((R_1-\delta_2)/R_1) \tag{2}$$

式中,R_1 为点 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 所在圆弧的半径;δ_1 为直线 l_4 处的弓高误差;δ_2 为直线 l_3 处的弓高误差.

令 δ_{max} 为给定的微小直线段的判定误差,用户可以根据加工零件的形状来指定判定误差与半径之间的比例关系. 由于判定误差的设定与半径的大小具有紧密联系,为了使区域划分的结果更有利于拟合过程的进行,建议用户设定判定误差与半径的比值范围在 0.02～0.18 之间.

当 $\delta_1=\delta_2=\delta_{max}$ 时 θ 角取得最小值 θ_{min},则两条微小直线段在连接点处的拐角为

$$\alpha_d=\pi-\theta_{max}=\pi-2\arcsin((R_1-\delta_{max})/R_1) \tag{3}$$

当 $\alpha_c\leqslant\alpha_d$ 时,满足拐角限制条件,则第 i 个拐角处的转接矢量夹角 $\alpha_i=\alpha_c$. 否则,将交点 P_i 定

为微小线段区域间的断点.

1.2 误差限制下的微小直线长度判定

除了微小直线段的拐角影响拟合精度外,确定适宜拟合的微小直线段的长度范围很重要.直线段的长度为 L,在满足判定误差 $\delta_{\max}$ 时,直线段最大长度为 $L_{\max}=\sqrt{4\delta_{\max}(2R_1-\delta_{\max})}$.所以,能够拟合的微小直线段的长度应满足 $L\leqslant L_{\max}$.

1.3 直线段相交点单调性判定

为了能够得到高精度的拟合效果,使得 PH 曲线拟合过程更加顺利,直线段相交点坐标需要在每个坐标方向保持单调.

综上,同时满足微小直线在交点处的拐角、长度和单调性等 3 个判定条件的直线段即为区域内的直线段,否则相交点被定为断点.根据上述 3 个判定条件所确定的断点将微小直线段划分成若干个适宜拟合计算的区域.

1.4 曲线连接处连续性判定条件

为了更好地对满足判定条件的微小直线段进行 PH 曲线拟合,便于进行拟合中切矢量的调节和曲线的连接以得到更加连续的曲线,下面给出微小直线段区域在断点处的连接模型以及区域连接情况的判定条件.

如图 1 所示,轨迹上的微小直线段的交点分别为 $P_{i-3}(x_{i-3},y_{i-3})$,$P_{i-2}(x_{i-2},y_{i-2})$,$P_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$,$P_i(x_i,y_i)$,$P_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$.直线段的长度分别为 L_1,L_2,L_3,L_4,直线段 l_2,l_3 与圆弧切向的夹角分别为 α,β.由式(4)中 α_i,α 和 β 之间的关系,求得转接点处 β 的大小:

$$\left.\begin{aligned}&\sin\alpha=L_3/2R_1\\&\cos\alpha_i=[(x_{i-2}-x_{i-1})(x_{i-1}-x_i)+\\&\qquad(y_{i-2}-y_{i-1})(y_{i-1}-y_i)]/(L_2L_3)\\&\beta=\alpha_i-\alpha\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

令弧 $P_{i-3}P_{i-1}$ 所在圆的半径为 R_2,那么 $R_2=L_2/(2\sin(\beta/2))$,则在连接处的微小直线段的误差大小为 $\delta=(1-\cos(\beta/2))R_2$.

当 $\delta\leqslant\delta_{\max}$ 时,在微小直线段区域的断点处满足连续条件,否则不满足连续条件.如图 1 所示,对于不满足连接条件的情况,曲线 2 的拟合通过调节 P_{i-1} 和 P_{i-3} 处的切矢量得到控制顶点的坐标,这样在断点 P_{i-1} 处不易使两条曲线进行平滑连接.而对于满足连接条件的情况,在进行曲线 2 的拟合时,将曲线 2 在 P_{i-1} 处的切矢量与上一个区域的拟合曲线 1 在该点处的切矢量保持一致,通过调节 P_{i-3} 处的切矢量来计算曲线 2 的控制顶点坐标,这样可以保证曲线 2 与曲线 1 在断点 P_{i-1} 保持连续,得到平滑的曲线.

通过上述 3 个微小直线段的判定条件后,得到适合进行曲线拟合的若干区域.通过分析微小直线段在区域断点处的连接情况,判定出曲线连接的两种方式.

2 误差控制下的 PH 曲线拟合

为了更好地对区域内的微小直线段进行拟合,针对 PH 曲线的特点,使用基于模拟退火算法的非线性最小二乘法.将弓高误差作为模拟退火算法中的目标函数,根据区域连接情况分别使用单向和双向切矢量调节方法,以满足精度要求.

2.1 基于模拟退火算法的曲线拟合

1) PH 曲线控制顶点的计算

给定曲线 $r(t)$ 的首末端点为 P_s,P_e,以及在端点处的单位切矢量 $\boldsymbol{I}_0,\boldsymbol{I}_1$,则满足上述条件的三次 PH 曲线的 Bezier 曲线表现形式为

$$\begin{aligned}r(t)=\sum_{k=0}^{3}P_k\binom{3}{k}(1-t)^{3-k}t^{k^3}=\\P_0(1-t)^3+3P_1(1-t)^2t+\\3P_2(1-t)t^3+P_3t^3\end{aligned}\tag{5}$$

式中 P_0,P_1,P_2,P_3 为 PH 曲线的控制顶点.

根据 PH 曲线在矢端的条件,利用首末点坐标和单位切矢量,求得三次 PH 曲线的控制顶点[9].

2) 基于模拟退火算法的曲线调节

为了全面的考虑拟合误差,利用基于模拟退火算法的非线性最小二乘方法对微小直线段进行拟合.根据模拟退火算法的需要,就要确定算法中的目标函数与温度规划.

为了能够得到理想的拟合效果,将微小直线段与拟合曲线之间的弓高误差作为模拟退火算法中的目标函数.则目标函数可以表示为

$$\Delta(\alpha_0,\alpha_1)=\sum(x_s-x_1)^2+(y_s-y_1)^2\tag{6}$$

式中,x_s,x_1 分别为最大弓高误差点处曲线上和直线上点的横坐标;y_s,y_1 分别为最大弓高误差点处曲线上和直线上点的纵坐标.

同时模拟退火算法中的温度规划为[3]

$$T_n=T_{n-1}/(1+\mu n)\tag{7}$$

式中,μ 为常数;$n=1,2,3,\cdots$.

在进行曲线拟合时,首先利用初始条件计算出控制顶点,然后再使用模拟退火算法对切矢量进行调整,计算出新的控制顶点.以弓高误差作为目标函数,调整获得最优的 PH 曲线控制顶点.所以,切矢量初始值和目标函数的计算就很重要.

2.2 切矢量初始值的设定

分割点将直线段分割成若干区域,为在每个

区域内使用 PH 曲线进行拟合就要确定区域首末分割点处的切矢量.这个矢量直接影响曲线的形状和拟合精度,合适的切矢量初始值可以减少模拟退火算法中的计算次数,快速达到拟合精度.

由于微小直线的长度较小,分割点所在直线的斜率与曲线在该点处的切矢量较为接近,可以将其作为模拟退火算法的初始值.令 α_0,α_1 分别为 PH 曲线首末点切线矢量角,则由单位切矢量的定义,得到 $\boldsymbol{I}_0=[\cos\alpha_0,\sin\alpha_0]$,$\boldsymbol{I}_1=[\cos\alpha_1,\sin\alpha_1]$.

2.3　利用细分直线计算弓高误差

为了能够方便的计算出目标函数即微小直线段与拟合曲线之间的弓高误差,避免计算曲线参数 t,通过细分直线的方法来计算弓高误差.

如图 2 所示,垂直于直线段的直线 l_v 与直线 l_{sl}段进行相交,得到曲线上点 $P_v(x_v,y_v)$和直线上的点 $P_1(x_1,y_1)$.则 P_v 与 P_1 之间的距离即为曲线与直线之间的误差,每个点处的弓高误差表示为

$$e_i=\sqrt{(x_v-x_1)^2+(y_v-y_1)^2}\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

每条直线段最大误差 $e=\max(e_1,e_2,\cdots,e_n)$.加工允许误差 $e_{max}\leqslant e$ 时,用模拟退火算法的目标函数对区域内的误差进行优化.

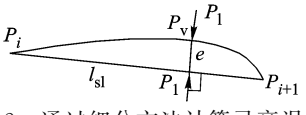


图 2　通过细分方法计算弓高误差

2.4　拟合后拐角处的速度平滑

为避免加工中拐角处的速度减为零,减少机床起停的次数.将微小直线段拟合成曲线后,刀具能够在直线段拐角处以许用的最大进给速度进行加工,可以提高加工速度.由速度、拐角和加速度的公式[6],第 i 个拐角处的最大进给速度为

$$v_i=(Ta_{max})/(2\sin(\alpha_i/2)) \tag{9}$$

式中,v_i 为转接速度;T 为插补周期;a_{max} 为最大转接加速度;α_i 为直线段的转接矢量夹角.

3　模拟仿真方法

根据断点处的连续情况,给出满足连续条件和不满足连续条件的 2 个实验.实验中系统插补周期 $T=4$ ms,最大拐角转接速度 $v=13.3$ mm/s,系统限定的最大加速度为 $a=300.0$ mm/s^2.

如表 1 所示,微小直线段的拐角与长度条件均满足判定条件,由单调性判定条件将其划分为 4 个区域,且各区域间满足连续条件.在表 2 中,拐角 2 处的拐角为 87.09°,大于此处的限制拐角 51.68°,直线段长度大于限定长度,即不满足判定条件,将其划分为 2 个区域,并且在拐角 2 处也不满足连续性条件.经划分后的区域内微小直线段数量得到了减少,提高了拟合效率.

表 1　满足连续条件微小直线段的区域划分结果 mm

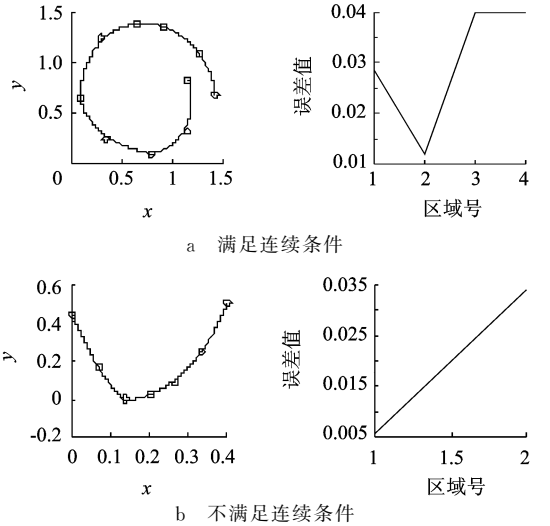
区域	直线段交点位置坐标
1	(1.44,0.69)(1.27,1.11)(0.93,1.37)
2	(0.93,1.37)(0.65,1.35)(0.3,1.22)(0.1,0.66)
3	(0.1,0.66)(0.35,0.25)(0.8,0.1)
4	(0.8,0.1)(1.16,0.32)(1.17,0.83)

表 2　不满足连续条件微小直线段的区域划分结果 mm

区域	直线段交点位置坐标
1	(0,0.436 7)　(0.066 7,0.163 3)　(0.133 3,0)
2	(0.133 3,0)　(0.2,0.023 3)　(0.266 7,0.083 3) (0.333 3,0.246 7)　(0.4,0.5)

微小直线段经拟合后得到的曲线以及拟合误差的效果如图 3 所示.

根据区域的连接情况,拟合时使用了不同的矢量调整方法.在图 4a 中,各区域的连接情况满足曲线连续判定条件,在连接点处使用了单向切矢量调整方法,保证了曲线的连续性.而图 4b 中,区域 1 与区域 2(见表 2)在断点(0.133 3,0)处的连接情况不满足曲线连续判定条件,在区域 2 内使用了双向切矢量调整方法,曲线在断点处不满足连续性.同时,图 4 把直线段,原始曲线和拟合曲线进行了比较,拟合曲线更加接近设计曲线.



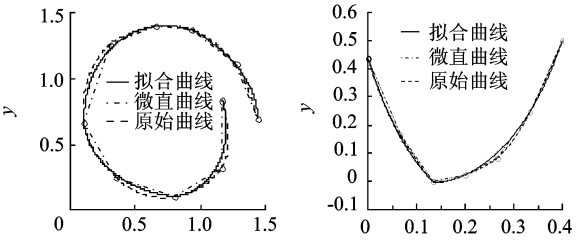
a　满足连续条件

b　不满足连续条件

图 3　拟合曲线及其误差

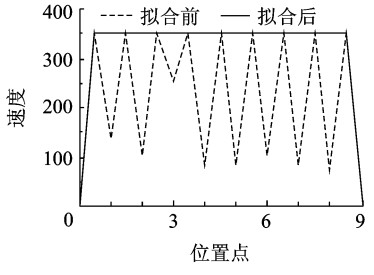
由给定的最大进给速度 5.84 mm/s,拟合前后的速度曲线如图 5 所示.满足连续条件的直线

段拟合后可以实现恒速度加工,而不满足连续条件的直线段则需在曲线连接处以许用的最大拐角速度进行加工.利用拟合后的曲线进行加工,减弱了加工中的速度变化,使得加工过程更加平稳.

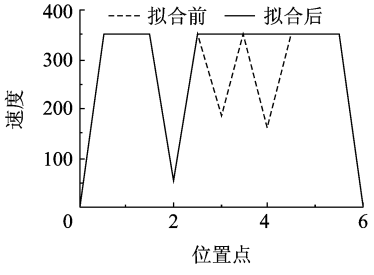


a 满足连续条件 b 不满足连续条件

图4 拟合曲线与原始曲线比较



a 满足连续条件



b 不满足连续条件

图5 拟合前后加工速度比较

4 结束语

本文研究了一种针对微小直线段的PH曲线拟合方法.通过分析微小直线段的连接方式,提出了3条用于分割微小直线段的规则.将微小直线段划分为若干个区域,将每个区域拟合成为一条PH曲线.进行曲线连接时,根据微小直线段在区域连接点处的连接情况,在模拟退火算法中分别采用用单向和双向切矢量调节,以保证拟合精度.将微小直线段区域首末点所在直线的斜率作为模拟退火算法中矢量的初始值,使得计算能够快速收敛,减少迭代计算次数,提高程序执行效率,缩短拟合时间,以适应实时前瞻的要求.利用细分直线的方法计算弓高误差,在满足拟合精度的情况下,提高了误差计算速度.结果表明,这一拟合方法能够使微小直线段的加工转化为自由曲线的加工,使加工变得更加柔和.

参考文献(References)

[1] Yeh Syhshiuh, Su Shinchun. Design of NURBS curve fitting process on CNC machines[C]//Proceedings of the 2007 American Control Conference. Piscataway, NJ: IEEE Press, 2007:3612-3617

[2] Yau Hongtzong, Wang Junbin. Fast Bezier interpolator with real-time lookahead function for high-accuracy machining [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2007, 47(10): 1518-1529

[3] Tsai Yifeng. Real-time CNC interpolators for precision machining of complex shapes with Pythagorean-hodograph curves[D]. Michigan: Department of Mechanical Engineering, University of Michigan, 2000

[4] 叶佩青,赵慎良.微小直线段的连续插补控制算法研究[J].中国机械工程,2004,15(15):1354-1356
Ye Peiqing, Zhao Shenliang. Study on control algorithm for micro-line continuous interpolation[J]. China Mechanical Engineering, 2004, 15(15): 1354-1356(in Chinese)

[5] 王宇晗,肖凌剑,曾水生,等.小线段高速加工速度衔接数学模型[J].上海交通大学学报,2004,38(6):901-904
Wang Yuhan, Xiao Lingjian, Zeng Shuisheng, et al. An optimal feedrate model and solution for high-speed machining of small line blocks with look-ahead[J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(6): 901-904(in Chinese)

[6] 徐志明,冯正进,汪永生,等.连续微小路径段的高速自适应前瞻插补算法[J].制造技术与机床,2003(12):20-23
Xu Zhiming, Feng Zhengjin, Wang Yongsheng, et al. High-speed adaptative look-ahead interpolation algorithm for continuous micro path sections[J]. Manufacturing Technology and Machine Tool, 2003(12): 20-23(in Chinese)

[7] 许海峰,王宇晗,李宇昊,等.小线段高速加工的速度模型研究和实现[J].机械工程师,2005(4):9-13
Xu Haifeng, Wang Yuhan, Li Yuhao, et al. Research on feedrate model of look-ahead and solution algorithm for high-speed machining of small line segments[J]. Mechanical Engineer, 2005(4): 9-13(in Chinese)

[8] 游有鹏,王珉,朱剑英.NURBS曲线高速高精度加工的插补控制[J].计算机辅助设计与图形学学报,2001,13(10):943-947
You Youpeng, Wang Min, Zhu Jianying. An interpolator for NURBS curve machining with high-speed and high accuracy [J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 2001, 13(10): 943-947(in Chinese)

[9] 刘国龙,王文仲.G1连续三次PH曲线光顺判定[J].指挥技术学院学报,2002,11(2):90-94
Liu Guolong, Wang Wenzhong. Smoothness of G1 PH interpolating cubic[J]. Journal of Institute of Command and Technology, 2002, 11(2): 90-94(in Chinese)

(责任编辑:文丽芳)