可靠性增长的单调约束模型

刘智洋 刘 鲁 黄 敏

(北京航空航天大学 经济管理学院，北京 100191) (北京航空航天大学 工程系统工程系，北京 100191)

摘 要：大型复杂产品研制过程中每一阶段的试验数据通常具有小样本特征.对此在产品可靠性评估中,提出使用约束条件,即“下一阶段可靠度真值总是大于前一阶段”,综合利用产品多阶段试验数据的方法.产品研制过程中可靠性通常是增长的,因此这种方法具有广泛的适用性.在上述约束条件下,可靠度被看作一个随机变量.首先推导出了可靠度在此条件下的分布函数表达式,然后给出了一种近似计算方法,最后通过一个实例与仅使用单阶段试验数据的评估结果作了对比.由于该方法的约束条件简单且可以求得可靠度的分布函数,因此其工程适应性强于传统的 AMSAA(Army Materiel System Analysis Activity)模型,并能获得 Duane 模型无法给出的可靠度区间估计.

关 键 词：可靠性；可靠性理论；增长；评估

中图分类号：TB 114.3

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)09-1104-04

Monotone restriction model of reliability growth evaluation

Liu Zhiyang Liu Lu

(School of Economics and Management, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Huang Min

(Dept. of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The test data of large complex products presents small sample characteristic in each phase during the development process normally. The restriction, the reliability of one phase is always higher than that of the previous one, was recommended to be used for reliability evaluation based on multi-phase test data. The reliability of product is increasing during the development process normally, therefore, such method has broad applicability. The reliability was considered a random variable with such restriction. The reliability probability distribution function based on the restriction was given, and an approximative calculational method was presented. An example was given to compare the result obtained from single phase test data with that based on multi-phase test data. Since the precondition is brief and the reliability probability distribution function can be achieved, the mentioned method is more applicable to practical applications in comparison with traditional army materiel system analysis activity(AMSAA)-model, and it can gain the reliability interval estimation which can not be obtained from Duane-model.

Key words: reliability; reliability theory; growth; evaluation

综合利用产品研制阶段不同试验的数据进行产品可靠性综合评估是有效解决产品研制阶段小样本可靠性评估的有效途径.通常,产品的研制过程是一个可靠性增长过程,其可靠性增长特性可以用相应的可靠性增长模型来描述.

目前较为常见的可靠度增长模型有:Duane

收稿日期：2008-08-04

基金项目:国家自然科学基金资助项目(70671007)

作者简介：刘智洋(1978—),男,四川成都人,博士生,lzy_careful@163.com.

模型和 AMSAA(Army Materiel System Analysis Activity)模型.但是这 2 种模型在综合利用产品研制阶段不同试验数据进行产品可靠性评估时都有比较明显的不适用之处:Duane 模型只能给出产品可靠性的点估计值,而无法给出产品可靠度的置信下限;单台 AMSAA 模型虽然精确,但是其拟合优度检验也相对苛刻,在工程实践中多台、多阶段试验数据一般都不能通过 AMASS 模型的拟合优度检验[1].这样就给工程实际中使用 Duane 模型和 AMASS 模型对产品进行可靠性评估造成了困难.

近年来有文章提出使用模糊可靠度分析的方法解决单调系统的可靠性评估问题[2],本文源于类似的思想,把产品可靠度当作一个随机变量来处理,针对简化模型前提条件这一要求,提出一种既利用产品多阶段试验信息,而其约束条件又相对简单的可靠性增长模型,即单调约束模型(MRM,Monotone Restriction Model).

MRM 的假设前提是:产品各试验阶段的可靠度相互独立,且后一阶段的可靠度总是大于等于前一阶段的可靠度.该假设前提非常简单,绝大多数产品实际的多阶段试验数据都能满足.

1　单调约束的数学模型

设产品研制过程经历了 n 个试验,R_i 为仅利用第 i 个试验数据得到的产品的可靠度估计值,它仅包含了这一试验阶段产品的可靠性信息,R_i 满足:

$$R_1 \leqslant R_2 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_{n-1} \leqslant R_n$$

其中 R_i 为相互独立的随机变量.

可靠性评估关心的是产品研制结束或研制过程中的重要节点的可靠度.这里,R_n 是产品最后一个试验阶段的可靠度,但只是利用最后一个试验阶段数据得到的结果.由于其没有利用前面 $n-1$ 个试验阶段试验数据中包含的可靠性增长信息,它的评估结果是保守的.所以这里寻求同时利用前面 $n-1$ 个试验阶段试验数据的方法.

R_i 的概率分布函数设为 $F_i(R_i)$.考虑 n 个阶段 R_i 的联合概率分布:

$$F(R_1,\cdots,R_i,\cdots R_n) = P(x_1 \leqslant R_1,\cdots,x_i \leqslant R_i,\cdots,x_n \leqslant R_n) \quad (1)$$

其中 r_i 为 R_i 的观测值.

利用所有 n 个试验阶段试验数据得到的产品可靠度概率分布就是 R_i 的联合概率分布:

$$F(R_1,\cdots,R_i,\cdots,R_n)$$

考虑这种联合概率分布下,最后一个试验阶段可靠度 R_n 的概率分布情况,此时引入 MRM 的约束条件,则产品在试验结束时的可靠度的概率分布即为 $F(R_1,\cdots,R_i,\cdots,R_n)$ 在约束条件 $R_1 \leqslant R_2 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_{n-1} \leqslant R_n$ 下关于 R_n 的边缘概率分布:

$$F_{R_n}(R_n) = F(1,\cdots,1,R_n) \quad (2)$$

其中 $R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n$.

求边缘分布函数 $F_{R_n}(R_n)$,先求边缘概率密度函数 $f_{R_n}(R_n)$.

由 R_i 相互独立,R_i 的联合概率密度函数:

$$f_1(R_1)f_2(R_2)\cdots f_i(R_i)\cdots f_{n-1}(R_{n-1})f_n(R_n)$$

$f_{R_n}(R_n)$ 在约束条件 $R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n$ 下为

$$f_{R_n}(R_n) = \iiint\limits_{R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n} f_1(R_1)\cdots f_n(R_n)\mathrm{d}(R_1\cdots R_{n-1})$$

由此可得

$$F_{R_n}(R_n) = \int_n^{R_n} f_{R_n}(r)\mathrm{d}r \quad (3)$$

上面的可靠度概率分布函数还不是最终结果,因为前面的推导都包含条件 $R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n$,此条件的概率为

$$P(R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n)$$

即为考虑所有阶段试验数据的联合概率分布在约束条件 $R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n$ 下的值,也即联合概率分布在约束条件构成的边界内的积分:

$$P(R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n) = \iiint\limits_{R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n} f_1(R_1)\cdots f_n(R_n)\mathrm{d}(R_1\cdots R_{n-1})$$

可靠度 $1 > R_i > 0$,即积分边界还应包括 $1 > R_i > 0$.

$$P(R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n) = \iiint\limits_{R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_i \leqslant \cdots \leqslant R_n,\, 0 < R_i < 1} f_1(R_1)\cdots f_n(R_n)\mathrm{d}(R_1\cdots R_{n-1}) \quad (4)$$

本文认为,此条件是一定满足的,这便是 MRM 的前提条件.因此本文求解的可靠度区间估计是在此条件下的可靠度区间估计.

由条件概率公式:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

可得基于 MRM 的研制结束时可靠度 R_n 的最终分布函数:

$$F_{\mathrm{f}}(R_n) = \frac{F_{R_n}(R_n)}{P(R_1 \leqslant \cdots \leqslant R_n)} =$$

$$\frac{\int_0^{R_n} f_{R_n}(r)\mathrm{d}r}{\underset{R_1\leqslant\cdots\leqslant R_i\leqslant\cdots\leqslant R_n,0<R_i<1}{\iiint\cdots\int} f_1(R_i)\cdots f_n(R_n)\mathrm{d}(R_1\cdots R_{n-1})} \tag{5}$$

置信度为 $1-\alpha$ 的可靠度下限是 $F_{\mathrm{f}}(R_n)$ 的 α 分位点. 这个下限值是利用了所有试验阶段可靠性信息得到的结果.

2 工程用两阶段循环模型计算方法

实质上这是一个变多重积分为分步积分的过程.

假设一个产品经历了 n 个试验阶段,首先使用 MRM 分析第 1,2 阶段的试验数据. 其仅利用本阶段数据得到的可靠度分别为:R_1,R_2. 概率分布函数和概率密度函数分别为:$F_1(R_1)$,$F_2(R_2)$,$f_1(R_1)$,$f_2(R_2)$,则联合概率密度:

$$f(R_1,R_2)=f_1(R_1)f_2(R_2) \tag{6}$$

由前所述,第 2 阶段试验结束时真实可靠度的概率密度函数即为 1,2 阶段可靠度联合分布 $F(R_1,R_2)$在约束条件 $R_1\leqslant R_2$ 下,关于 R_2 的边缘概率密度函数:

$$f_{R_2}(R_2)=\int_0^{R_2} f_1(R_1)f_2(R_2)\mathrm{d}R_1=f_2(R_2)F_1(R_2)$$

约束条件下第 2 阶段可靠度边缘概率分布函数即为

$$F_{R_2}(R_2)=\int_0^{R_2} f_2(r)F_1(r)\mathrm{d}r \tag{7}$$

其真实可靠度概率分布应为

$$F_{\mathrm{f}}(R_2)=\frac{F_{R_2}(R_2)}{P(R_2\geqslant R_1)} \tag{8}$$

这里

$$P(R_2\geqslant R_1)=P(R_2-R_1\geqslant 0)=\iint_{R_2-R_1\geqslant 0,1>R_{1,2}>0} f_1(R_1)f_2(R_2)\mathrm{d}(R_1R_2)$$

积分范围是$\begin{cases}R_2-R_1\geqslant 0\\ 1>R_{1,2}>0\end{cases}$,可得

$$P(R_2\geqslant R_1)=\int_0^1\mathrm{d}R_2\int_0^{R_2} f_1(R_1)f_2(R_2)\mathrm{d}R_1=\int_0^1 f_2(R_2)F_1(R_2)\mathrm{d}R_2=F_{R_2}(1)$$

如图 1 所示.

所以,第 2 阶段结束时,基于 MRM 的可靠度概率分布应为

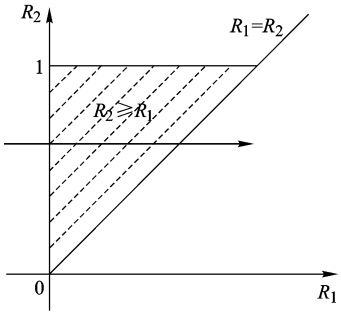

图 1 约束范围

$$F_{\mathrm{f}}(R_2)=\frac{F_{R_2}(R_2)}{F_{R_2}(1)} \tag{9}$$

其中,任意阶段的可靠度分布函数 $F(R)$、概率密度函数 $f(R)$,使用 β 分布拟合求得近似解.

β 分布函数如下式:

$$F_\beta(n-f,f+1)=\frac{1}{B(n-f,f+1)}\int_0^r x^{n-f-1}(1-x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

β 分布概率密度函数如下式:

$$f_\beta(n-f,f+1)=\frac{1}{B(n-f,f+1)}x^{n-f-1}(1-x)^f \tag{11}$$

其中,$0<x<1$;n 为等效成败型产品的试验次数;f 为等效的失效次数.

解如下方程求得 β 分布参数 n,f.

$$\int_{R_{\mathrm{L}}}^1 x^{n-f-1}(1-x)^f\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 x^{n-f-1}(1-x)^f\mathrm{d}x \tag{12}$$

式中,$f=n(1-R)$,R 为该阶段可靠度的点估计;R_{L}为该阶段置信度为 α 的可靠度下限. 即已知 R,R_{L},α,求解 n,f.

求解式(12)的数值计算方法并不唯一,本文使用高斯(Gauss)求积法进行积分运算,使用布伦特(Brent)求根法进行方程求解.

完成 2 个阶段 MRM 的求解后,再引入第 3 阶段试验数据,由计算结果 $F_{\mathrm{f}}(R_2)$ 和 $F_3(R_3)$ 重新构成 2 个阶段 MRM,计算考虑增长的第 3 阶段可靠度概率分布函数……,如此循环,直至得到最后一个阶段的可靠度概率分布函数 $F_{\mathrm{f}}(R_n)$.

考虑增长的产品 $1-\alpha$ 可靠度下限即为 $F_{\mathrm{f}}(R_n)$的 α 分位点.

3 计算实例

某发动机研制阶段,经历了 3 个试验阶段,每个试验阶段的故障记录经环境折合[3-4]后如表 1 所示.

表 1　各阶段的故障间隔时间　　min

故障序号	阶段 1	阶段 2	阶段 3
1	115	180	200
2	260	250	230
3	120	290	240
4	150	150	350
5	100	190	290
6	200	310	280
7	300	280	320
8	180	300	300
9	220	260	380
10	280	320	390

第 3 阶段试验结束时,产品的可靠度下限(置信度 $\gamma=1-\alpha=0.8$)评估结果如表 2 所示.

表 2　产品的可靠度下限评估结果

任务时间/min	Normal 方法	MRM 方法
150	0.974 0	0.975 0
200	0.894 7	0.903 0
300	0.427 9	0.476 0

注:Normal—基于第 3 阶段试验数据,使用 Weibull 分布算法进行可靠度评估;MRM—综合利用 3 个阶段试验数据,使用 MRM 进行评估.

4　结　论

1) 由评估结果可以看出,仅使用单阶段(最终阶段)试验数据进行产品可靠度评估时,由于单阶段试验不充分,所得的可靠度下限评估结果偏低,不能客观准确的反映产品当前的可靠性水平,而本论文的方法更符合实际情况,结果区间收敛性更好,更接近研制最终阶段产品的可靠度下限真值;

2) 从本文的示例可以看出,单调约束模型 MRM 的工程适应性很强,只要产品阶段试验数据反映出增长的趋势,就能使用此模型,充分利用产品全部研制阶段的试验数据进行可靠度评估;

3) 在工程实践中使用 MRM 时,由于可靠度的概率密度函数 $f(R)$是由曲线拟合所得,误差不可避免,因此对于高可靠性产品(通常可靠度大于 0.95)MRM 会存在较大误差,MRM 的建议适用范围是可靠度小于 0.95,弹用发动机就是这类典型产品.

参考文献 (References)

[1] 周源泉,翁朝曦. 可靠性增长[M]. 北京:科学出版社, 1992: 5－15
Zhou Yuanquan, Weng Zhaoxi. Reliability growth[M]. Beijing: Science Press, 1992: 5－15(in Chinese)

[2] Utkin L V. A new efficient algorithm for computing the imprecise reliability of monotone systems[J]. Reliability Engineering and System Safety, 2004, 86(3): 179－190

[3] 赵宇,黄敏,王智. 一种用于变环境数据的可靠性增长分析模型[J]. 航空学报, 2002, 23(2): 111－114
Zhao Yu, Huang Min, Wang Zhi. Model of reliability growth evaluation to various environments[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2002, 23(2): 111－114(in Chinese)

[4] 赵宇,黄敏. 变母体变环境数据的可靠性综合评估模型[J]. 北京航空航天大学学报, 2002, 28(5): 597－600
Zhao Yu, Huang Min. Integrated evaluation model of reliability based on varied population-environment data[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 28(5): 597－600(in Chinese)

(责任编辑:赵海容)