利用变环境试验数据的可靠性综合评估

洪东跑 赵 宇 马小兵

(北京航空航天大学 工程系统工程系，北京 100191)

摘 要：研究了试验环境对产品可靠性的影响，提出一种利用变环境试验数据的可靠性综合评估方法. 利用 Cox 比例风险模型来描述产品的可靠性与试验环境因素的关系，给出不同环境因素对产品可靠性影响的定量度量. 结合产品的可靠性模型提出一种数据折合方法. 分别以指数分布和双参数 Weibull 分布为例，把不同环境条件下的试验数据折合为相同环境条件下的试验数据，进而利用这些试验数据对产品进行可靠性综合评估. 该方法综合利用产品在不同环境条件下的试验数据，扩大了样本量，提高了产品可靠性评估精度. 实例表明该方法合理可行，便于工程应用.

关 键 词：可靠性评估；Cox 比例风险模型；环境因素；数据折合

中图分类号：TB 114.3

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)09-1152-04

Integrated reliability assessment using varied environment test data

Hong Dongpao Zhao Yu Ma Xiaobing

(Dept. of System Engineering of Engineering Technology, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The influence of environment on reliability was studied, and a method of integrated reliability assessment using varied environment test data was put forward. The relations of reliability and environment factors were described by the Cox proportional hazards model, and the influences of environment factors were measured. According to the reliability model and the measurement, a new data conversion was proposed to convert the test data of varied environment into that of the same environment. Then the reliability of product was assessed synthetically with the converted test data. With the method, the varied environment test data is used synthetically to enlarge the sample size and increase the information for reliability assessment. Thus, the precision of reliability assessment is improved. The example shows that the method is reasonable, and it is convenient for engineering.

Key words: reliability assessment; Cox proportional hazards model; environment factor; data conversion

在工程应用中，产品的试验样本量通常较小，为了扩大样本量以提高可靠性评估精度，需要利用产品的各种试验数据进行综合评估[1]. 然而这些试验数据所属的试验环境往往不尽相同，一般称之为变环境试验数据. 产品的可靠性受环境的影响较大，在不同的环境下会表现不同的可靠性水平[2]. 因此在利用变环境试验数据进行可靠性评估时，需要对变环境试验数据进行折合，即将不同环境条件下的试验数据折合为同一环境条件下(通常为工作或使用条件)的试验数据[3]. 关于数据折合，国内外基本采用两种方法：一是环境因子的方法[4]；二是基于物理失效原理的统计模型方法[5]. 对于环境因子的方法，由于需要以大量的试验数据为基础[6]，而且环境因子的确定也缺乏工程上可行的分析办法. 对于基于物理失效原理的统计模型方法，通常利用加速寿命模型描述寿命参数和环境应力变量的关系. 著名的且常用的模型有 Arrhenius 模型、逆幂律模型、Eyring 模型以

收稿日期：2008-09-23

作者简介：洪东跑(1983—)，男，浙江温州人，博士生，hloving@163.com.

及它们的结合模型[7]. 该方法能定量描述环境应力对寿命特征参数的影响,能对没有试验数据的环境下的产品可靠性进行预测. 不过由于它通常给出的是单因素模型[8],只能用于处理简单的环境因素对可靠性的影响,但在工程中通常存在较为复杂的环境因素而且因素存在交互作用,该方法难以描述复杂环境因素对可靠性的影响.

本文利用 Cox 比例风险模型来描述产品的可靠性与环境因素的关系,给出了一种利用变环境试验数据的可靠性综合评估方法.

1　变环境试验数据可靠性模型

假设产品分别在 k 个环境下进行试验,用 t_i 表示产品的第 i 个环境下产品的观测样本. 记 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_p)^{\mathrm{T}}$ 为环境协变量,其中 p 为环境因素个数. 在环境 $\boldsymbol{X}$ 下,在时刻 t 处,假设产品的可靠性为 $R(t\mid\boldsymbol{X})$,当各环境因素独立时,由 Cox 模型[9]可知

$$R(t\mid\boldsymbol{X})=[R_0(t)]^{\exp\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\}} \tag{1}$$

其中,$R_0(t)$为基准可靠度函数,即该函数不受环境因素的影响;$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)^{\mathrm{T}}$ 为未知参数. 在式(1)中,参数 $\boldsymbol{\beta}$ 和可靠度函数 $R_0(t)$未知,一般称之为半参数模型. 利用不同环境下的观测数据可以估计参数 $\boldsymbol{\beta}$ 和可靠度函数 $R_0(t)$.

如果各环境因素不完全独立,例如 x_1 和 x_2 相关,此时可取 x_1x_2 作为一个新的协变量. 由此可给出针对各环境因素不完全独立时的可靠性模型:

$$R(t\mid(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}))=[R_0(t)]^{\exp\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}\}} \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_s)^{\mathrm{T}}$ 为相关因素的乘积项;$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_s)^{\mathrm{T}}$ 为未知参数. 对式(2)中的参数进行线性变换,可转换为式(1)形式.

2　模型参数估计

假设有 n 个样本在不同的环境下进行试验,试验数据记为$(t_i,\delta_i,\boldsymbol{X}_i)$,$i=1,2,\cdots,n$,其中 $\boldsymbol{X}_i$ 是第 i 个体的环境协变量,$\boldsymbol{X}_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ip})^{\mathrm{T}}$,$\delta_i$ 是示性变量,$\delta_i=1$ 表示 t_i 是失效数据,$\delta_i=0$ 表示 t_i 是右删失数据(不考虑其它删失). 将互异的失效数据按升序排列:$t_{(1)}<\cdots<t_{(r)}$,令 $D_i=\{j:\delta_j=1\text{ 且 }t_j=t_{(i)}\}$,$d_j$ 表示在 $t_{(j)}$ 处失效的个体数. 令 C_j 表示在 $t_{(j)}$ 时刻之前未失效且未删失的个体组成的集. 含参数 $\boldsymbol{\beta}$ 偏似然函数为

$$L(\boldsymbol{\beta})=\prod_{j=1}^{r}\frac{\prod_{i\in D_j}\exp\{\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\}}{\left[\sum_{i\in C_j}\exp\{\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\}\right]^{d_j}} \tag{3}$$

由式(3)可得参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的最大偏似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.

设可靠度函数 $R_0(t)$的估计为 $\hat{R}_0(t)$,它是不增右连续,在 $t_{(j)}$ 有跳跃. 记 $P_j=\hat{R}_0(t_{(j)})$,P_0 定义为 1,$Z_j=\{i:\delta_i=0\text{ 且 }t_i\in[t_{(j)},t_{j+1})\}$,似然函数为

$$L=\sum_{j=1}^{\tau}\prod_{l\in D_j}(P_{j-1}^{\exp\{\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\}}-P_j^{\exp\{\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\}})\prod_{l\in Z_j}P_j^{\exp\{\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\}} \tag{4}$$

这里 $\boldsymbol{\beta}$ 可用偏似然估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 代替. 令 $\alpha_j=P_j/P_{j-1}$,$j=1,2,\cdots,\tau$,由式(4)可得

$$L=\prod_{j=1}^{\tau}\left[\prod_{l\in D_j}(1-\alpha_j^{\exp\{\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\}})\prod_{l\in C_j-D_j}\alpha_j^{\exp\{\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\}}\right] \tag{5}$$

由上式可得未知参数的估计值,由于没有解析解,一般可利用数值方法求解 $\hat{\alpha}_i$. 由 $P_i=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i$ 可得 $R_0(t)$的估计值

$$\hat{R}_0(t)=\prod_{t_{(i)}\leqslant t}\hat{\alpha}_i \tag{6}$$

3　可靠性综合评估方法

假设产品的工作环境协变量为 $\boldsymbol{X}^*$,把 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 和 $\hat{R}_0(t)$代入式(1)可得可靠度函数的估计

$$\hat{R}(t\mid\boldsymbol{X}^*)=[\hat{R}_0(t)]^{\exp\{\boldsymbol{X}^{*\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}\}} \tag{7}$$

由式(6)和式(7)可知 $\hat{R}(t|\boldsymbol{X}^*)$不增右连续,是一个阶梯函数,当 t 大于最大的失效时间时,$\hat{R}(t|\boldsymbol{X}^*)$是个常数. 显然并不能满足工程应用中可靠性评估的要求. 为此,本文把不同环境下的数据折合到工作环境下,然后基于这些数据对产品进行可靠性综合评估.

假设试验数据为 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,对应的协变量为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$,折合后的数据为 $\hat{t}_1,\hat{t}_2,\cdots,\hat{t}_n$,对应的协变量为 $\boldsymbol{X}^*$. 则 $\hat{t}_1,\hat{t}_2,\cdots,\hat{t}_n$ 满足

$$\hat{R}(t_i\mid\boldsymbol{X}_i)=\hat{R}(\hat{t}_i\mid\boldsymbol{X}^*)\quad i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

如果产品的寿命服从指数分布,则基准可靠度函数为

$$R_0(t)=\exp(-\lambda_0 t) \tag{9}$$

其中 λ_0 为失效率,把式(9)代入式(8)化简可得

$$\hat{t}_i=t_i\exp\{\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{X}^{*\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}\}\quad i=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

如果产品的寿命服从双参数 Weibull 分布,则基准可靠度函数为

$$\hat{R}_0(t)=\exp\left(-\left(\frac{t}{\eta_0}\right)^{m_0}\right) \tag{11}$$

其中，m_0 为形状参数；η_0 为特征寿命. 把式(11)代入式(8)化简可得

$$\hat{t}_i = t_i \exp\{\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{X}^{*\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}/m_0\} \quad i=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

假设在不同的环境下产品的失效机理不变，则 m_0 不变，由试验数据可求得其估计值. 对于其它的分布同理可得其数据折合的方法.

如果寿命分布未知，由式(6)和式(8)可知 $\hat{t}_1$，$\hat{t}_2,\cdots,\hat{t}_n$ 满足

$$\begin{aligned} &\hat{t}_i = \min(t) \\ &\text{s.t.}: \Big(\prod_{t_{(i)}\leqslant t_i}\hat{\alpha}_i\Big)^{\exp\{\boldsymbol{X}_i^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}\}} = \Big(\prod_{t_{(i)}\leqslant t}\hat{\alpha}_i\Big)^{\exp\{\boldsymbol{X}_i^{*\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}\}} \\ &i=1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{13}$$

由此可把其它环境下的数据折合为要求环境下的数据 $\hat{t}_1,\hat{t}_2,\cdots,\hat{t}_n$. 如果 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 是完全数据，则 $\hat{t}_1,\hat{t}_2,\cdots,\hat{t}_n$ 也是完全数据，利用经典统计方法可以对其进行数据分析. 如果 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 中含有右删失数据，则 $\hat{t}_1,\hat{t}_2,\cdots,\hat{t}_n$ 属于随机删失数据，一般利用近似的方法可以对其进行数据分析.

如果产品寿命服从指数分布，其寿命参数记为 θ. 记 $T=\sum_{i=1}^{n}\hat{t}_i$ 为 n 个样本总的时间，可得参数 θ 的极大似然估计

$$\hat{\theta} = T/r(r>0) \tag{14}$$

其中 r 为失效数. 文献[10]建议认为枢轴量 $2T/\theta$ 近似服从 χ^2_{2r+1} 分布. 给定置信水平 $1-\alpha$，由此可得参数 θ 的置信下限 θ_{L} 和置信上限 θ_{U}

$$\left.\begin{aligned} \theta_{\mathrm{L}} &= \frac{2T}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2r+1)} \\ \theta_{\mathrm{U}} &= \frac{2T}{\chi^2_{\alpha/2}(2r+1)} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

如果已知参数 θ 的置信区间，则可得在给定时刻 t 的可靠度置信区间.

当寿命服从双参数 Weibull 分布时，记形状参数为 m，特征寿命参数记为 η，则似然函数为

$$L(m,\eta) = \prod_{i=1}^{n} f(\hat{t}_i)^{\delta_i} R(\hat{t}_i)^{1-\delta_i} \tag{16}$$

其中，$f(t)$ 为密度函数；$R(t)$ 为可靠性函数. 由式(16)的似然函数可得参数 m 和 η 的极大似然估计 $\hat{m}$ 和 $\hat{\eta}$，由此可得产品在时刻 t 的可靠度估计. 当样本量较大时，$\hat{m}$ 和 $\hat{\eta}$ 分别服从渐近正态分布，在给定置信水平下，可得参数 m 和 η 的置信区间，以及时刻 t 的可靠度置信区间. 对于产品的寿命服从其它的分布可同理进行统计分析. 如果产品寿命分布未知，则可以利用非参数方法对折合后的数据进行统计分析.

4 实 例

某产品的寿命主要受温度、电压和操作方式的影响，其中操作方式分为开关型和连续型，分别记为 0 和 1. 该产品的工作环境为温度 328 K、电压 10 V 和操作方式为连续型，现要评估该产品在工作环境下运行 2 000 h 的可靠性. 现有该产品在 8 种不同环境下的试验数据[8]，记温度为 T，电压为 V，操作方式为 O，如表 1 所示.

表 1 不同环境下的试验数据

T	V	O	t/h
358	12	0	498,750
358	12	1	445,588,691,750(20)
378	12	0	178,252,309,398
378	12	1	211,266,298,343,364,387,445(14)
378	16	0	118,163,210,249
378	16	1	145,192,208,231,254,293,300(10)
398	12	0	87,112,134,163
398	12	1	116,149,155,173,193,214,228(7)

注：()内的数字为右删失样本数

取温度、电压和操作方式作为协变量 x_1，x_2 和 x_3，假设操作方式对产品寿命的影响分别与温度和电压相互独立，而温度与电压相关，则取 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_1x_2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)^{\mathrm{T}}$，由式(2)来描述产品寿命与这三个环境因素的关系. 利用表 1 的数据对模型进行检验可知在显著水平 $\alpha=0.1$ 时，不能否定假设：$\beta_4=0$，即不能认为 x_1 与 x_2 是相关的. 故重新取 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)^{\mathrm{T}}$，由式(1)来描述产品寿命与这三个环境因素的关系. 结合表 1 的试验数据，利用式(3)可得参数 $\boldsymbol{\beta}$ 的最大偏似然估计 $\hat{\beta}_1=0.14$，$\hat{\beta}_2=0.36$ 和 $\hat{\beta}_3=-2.22$. 由于产品的寿命服从两参数 Weibull 分布，利用式(12)可以把表 1 中其它环境下的试验数据折合为工作环境下的试验数据，如表 2 所示.

表 2 折合后的试验数据

T	V	O	t/h
328	10	1	3 830,5 768
328	10	1	1 815,2 398,2 818,3 059(20)
328	10	1	3 047,4 313,5 288,6 812
328	10	1	1 915,2 414,2 705,3 113,3 304,3 513(14)
328	10	1	3 048,4 210,5 424,6 431
328	10	1	1 986,2 630,2 849,3 164,3 479,4 013,4 109(10)
328	10	1	3 314,4 266,5 104,6 209
328	10	1	2 343,3 010,3 131,3 495,3 899,4 323,4 606 (7)

注：()内的数字为右删失样本数

对表 2 的数据进行统计分析,可得产品在工作环境下在 2 000 h 时的可靠性估计 $\hat{R}=0.97$ 和置信水平为 0.9 的可靠性下限 $R_L=0.95$.

5　结 束 语

产品的可靠性往往受环境影响,在不同的环境下产品会表现不同的可靠性水平. 本文利用 Cox 比例风险模型来描述产品可靠性与环境因素的关系,并给出了环境因素对可靠性影响的定量度量. 该模型综合考虑了不同环境下的试验数据,能较好地反映环境因素对可靠性的影响. 利用该模型把不同环境下的试验数据折合为要求的环境下的试验数据,给出了变环境试验数据可靠性综合评估方法. 该方法综合利用各种环境下的试验数据,弥补了产品样本量的不足,提高了可靠性评估精度.

参考文献(References)

[1] 赵宇,黄敏. 变母体变环境数据的可靠性综合评估模型[J]. 北京航空航天大学学报, 2002,28(5):597－600
Zhao Yu, Huang Min. Integrated evaluation model of reliability based on varied population-environment data [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2002, 28 (5):597－600(in Chinese)

[2] 何书元,赵宇,房祥忠. 估计不同环境下的设备可靠性[J]. 数理统计与管理, 2007, 26(6): 1007－1011
He Shuyuan, Zhao Yu, Fang Xiangzhong. Equipment reliability estimation under different environment [J]. Application of Statistics and Management, 2007, 26(6): 1007－1011(in Chinese)

[3] 赵宇,黄敏,王智. 一种用于变环境数据的可靠性增长分析模型[J]. 航空学报,2002,23(2):111－114
Zhao Yu, Huang Min, Wang Zhi. Model of reliability growth evaluating to various environments [J]. Acta Aeronautica & Astronautica Sinica, 2002, 23(2):111－114 (in Chinese)

[4] 李凤,师义民,荆源. 两参数 Weibull 分布环境因子的 Bayes 估计[J]. 系统工程与电子技术,2008,30(1):186－189
Li Feng, Shi Yimin, Jing Yuan. Bayesian estimation for environmental factor of two parameter of Weibull distribution [J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(1):186－189 (in Chinese)

[5] Tebbi O, Gu rin F, Dumon B. Statistical analysis of accelerated experiments in mechanics using a mechanical accelerated life model [C]//Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium. Tampa:IEEE, 2003:124－131

[6] 傅博,杜振华,赵宇. 一种基于遗传算法的环境因子确定方法[J]. 北京航空航天大学学报,2004,30(5):465－468
Fu Bo, Du Zhenhua, Zhao Yu. Acquirement method of environmental factor with genetic algorithm [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(5):465－468 (in Chinese)

[7] Wendai W, Dimitri B K. Fitting the Weibull log-linear model to accelerated life-test data [J]. IEEE Transactions on Reliability, 2000, 49(2):217－223

[8] Mettas A. Modeling & analysis for multiple stress-type accelerated life data [C]//Proceedings Annual Relability and Maintainability Symposium. Los Angeles: IEEE, 2000: 138－143

[9] Cox D R. Regression models and life-tables [J]. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1972, 34(2):187－220

[10] Lawless J F. Statistical models and methods for lifetime data [M]. New York: John Wiley& Sons,2003:105－108

(责任编辑:娄　嘉)