无网格SPH法中守恒光滑法的修正

龙丽平 张建宇 赵丽滨

(北京航空航天大学 航空科学与工程学院，北京 100191) (北京航空航天大学 宇航学院，北京 100191)

摘 要：守恒光滑法CSA(Conservative Smoothing Approach)是解决传统SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法稳定性问题的一种很有效的方法.研究发现在SPH法中运用所谓的守恒光滑法并不能保证系统的总物理量(质量、动量或者能量)在每个时间步均守恒，而是随着时间在理论值附近波动，对计算结果的精度有一定的影响.对此提出了守恒光滑法的修正公式，对SPH控制方程得到的各个粒子的物理量进行CSA光滑，然后运用文中提出的CSA的修正公式把对该粒子物理量的改变量加权平均给邻域内各个粒子，从而确保了SPH算法中系统的总物理量(质量、动量以及能量等)在每个时间步均守恒，而且由于减少了CSA对SPH得到的各个粒子物理量的过分光滑，从而提高了计算精度.物理意义、理论推导以及文中的算例均证明了这种修正的有效性.

关 键 词：守恒光滑法；光滑粒子水动力法；稳定性

中图分类号：O 347.2

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)11-1335-04

Correction of conservative smoothing approach used in SPH method

Long Liping Zhang Jianyu

(School of Aeronautic Science and Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Zhao Libin

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The conservative smoothing approach (CSA) is a kind of methods which is very efficient for eliminating the instability of traditional smoothed particle hydrodynamics (SPH) method. Research discovered that total physical quantities of system (such as mass, moment and energy) were no longer strictly conservative in each time step with the use of CSA. The calculated value fluctuated around the theoretical value with time and affected the result precision. Correction of CSA(CCSA) was proposed. Used CSA to smooth the physical variables obtained from SPH governing equations and then used CCSA to weighted average the change of the physical variables to each neighbor node, thus ensured the conservation of total physical quantities of system (such as mass, moment or energy) in each time step. Owing to reduce of the excessive smoothness which CSA acted on physical variables, calculation accuracy was improved. Physical meaning, theoretical derivation and numerical test show the efficiency of this correction.

Key words: CSA(conservative smoothing approach); SPH(smoothed particle hydrodynamics); stability

光滑粒子水动力法SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)是最早出现的无网格法.该方法在近似场函数时不需要网格而是通过一个核函数加权求和，在离散守恒方程时也不需要背景网格，

收稿日期：2008-11-03

作者简介：龙丽平(1977—)，女，重庆人，博士后，longliping@buaa.edu.cn.

而是对微分方程直接进行离散,在整个计算过程中彻底摆脱了对网格的依赖,因此SPH被称为一种真正的无网格法.由于其彻底摆脱了网格的束缚,目前SPH已被大量用于一些传统的有网格的数值方法很难解决的问题中,如高速冲击问题[1],水下爆炸问题[2-3]和切削问题[4]等.但是随着研究应用的深入,SPH的一些缺点也暴露出来了,比如稳定性和精度比不上有限元和其他弱形式的无网格方法,不少研究人员也在改进这些方面做了工作.

文献[5]最先发现了SPH的拉力不稳定性,发现在拉力状态时出现了不稳定的粒子集聚和分离,而压应力状态没有.对此还进行了SPH方法的Von Neumann的稳定性分析,建立了通过应力和核函数二阶导数的乘积来判断稳定性的判据.文献[6]和文献[7]把守恒光滑法CSA(Conservative Smoothing Approach)运用到一维的SPH中来消除拉力不稳定性取得了一定的效果.而后,文献[8]和文献[9]提出了多维的守恒光滑法公式,可以用来光滑速度、位移、密度、内能等,对稳定多维的SPH计算非常有效.但是本文发现,运用守恒光滑法以后导致整个系统的质量、动量等在每个时间步内并不守恒,因此本文提出了对守恒光滑法的修正,修正以后的守恒光滑法恢复了系统的守恒,而且计算精度也随之提高,最后的算例也说明了该修正的有效性.

1 守恒光滑法

文献[6]和文献[7]提出的一维的守恒光滑公式如下:

$$\overline{U}_i = U_i + \alpha_{cs}[0.5(U_{i-1}+U_{i+1}) - U_i]$$
$$0 < \alpha_{cs} \leqslant 0.5 \tag{1}$$

式中,U_i为粒子i的场变量,可以为速度、位移和密度;α_{cs}为守恒光滑系数.

文献[9]提出的多维的守恒光滑公式

$$\overline{U}_i = U_i + \alpha_{cs}\left[\left(\sum_{j\neq i} m_j U_j W_{ij}/\rho_j\right)\Big/\left(\sum_{j\neq i} m_j W_{ij}/\rho_j\right) - U_i\right]$$
$$0 < \alpha_{cs} \leqslant 0.5 \tag{2}$$

式中,m_j为粒子i的邻域内粒子j的质量;W_{ij}为核函数;ρ_j为粒子j的密度.

在每一个时间步内,通过求解连续介质守恒方程得到各个粒子的速度、位移、密度等场变量U_i,再运用式(1)或者式(2)对各个粒子的场变量进行守恒光滑.从式(1)和式(2)可以看出,守恒光滑法的物理意义为改变粒子i的场变量值,其改变量等于把粒子i邻域内所有粒子(不包括粒子i本身)场变量的加权平均值与粒子i场变量的差乘以一个光滑系数.这样避免了粒子i场变量的突变,增加了场变量的连续性,从而稳定计算过程.守恒光滑法在实际应用中确实起到了很好的稳定程序的作用,但是从计算公式无法推导出守恒光滑以后的场变量$\overline{U}_i$仍然满足连续介质的守恒方程,或者说不能保证守恒光滑以后整个计算域所有粒子的质量、动量和能量仍然守恒.后面的算例也证实了运用守恒光滑法来光滑速度以后整个系统的动量不守恒,因此本文对守恒光滑法进行了如下修正.

2 守恒光滑法的修正

对于多维情况,在每个时间步内,运用连续介质的守恒方程求得计算域内所有粒子的场变量U_i,其中$i=1,2,\cdots,n$,n为计算域所有粒子的总数.再对每个粒子i运用式(2)进行守恒光滑稳定计算,得到$\overline{U}_i$,然后对粒子i邻域内的所有粒子j($j=1,2,\cdots,m$)的场变量U_j进行如下的修正:

$$\overline{U}_j = U_j - \Delta U_i W_{ij} m_j/\rho_j \quad j=1,2,\cdots,m \tag{3}$$

式中

$$\Delta U_i = \alpha_{cs}\left[\left(\sum_{j\neq i} m_j U_j W_{ij}/\rho_j\right)\Big/\left(\sum_{j\neq i} m_j W_{ij}/\rho_j\right) - U_i\right] \tag{4}$$

令

$$\Delta U_j = -\Delta U_i W_{ij} m_j/\rho_j \tag{5}$$

通过式(3),把式(2)中的ΔU_i加权平均到邻域内所有粒子的场变量上,这样就确保了求动态问题或者瞬态问题时每个Δt时间步的总质量、总动量以及能量的守恒.例如运用式(2)光滑粒子的速度,则U代表粒子的速度,经过式(2)以后粒子i的动量改变量为$m_i\Delta U_i$,而运用式(3)以后,邻域内粒子的动量改变量之和为

$$\sum_{j=1}^{m}\Delta U_j m_j = \sum_{j=1}^{m} -\Delta U_i W_{ij}\frac{m_j}{\rho_j}m_j =$$
$$-\Delta U_i\sum_{j=1}^{m} m_j W_{ij}\frac{m_j}{\rho_j} = -\Delta U_i m_i$$

证明了粒子i的动量改变量与其邻域内所有粒子的动量改变量之和为0,因此可以得出,如果运用守恒光滑法对速度进行光滑以后,通过式(3)的修正保证了整个系统的动量仍然守恒.

由于邻域内粒子j中包括了i粒子本身,最

后

$$\overline{U}_i = U_i + \Delta U_i - \Delta U_i W_{ii} m_i / \rho_i \tag{6}$$

式中,$W_{ii} > 0$.

式(6)削减了式(2)对 U_i 的改变量,使得粒子 i 的场变量更接近理论值.

3　算　例

取一立方体求解域如图 1,共布置 16×16×16 个粒子,粒子间距 0.5 m,拉梅常数 $\lambda = 1$ N/m^2,切变模量 $\mu = 1$ N/m^2,密度 $\rho = 1$ kg/m^3. 上表面中心 1 m×1 m 的面积上(图 1 中箭头所指的粒子)加载图 2 所示的载荷压力.

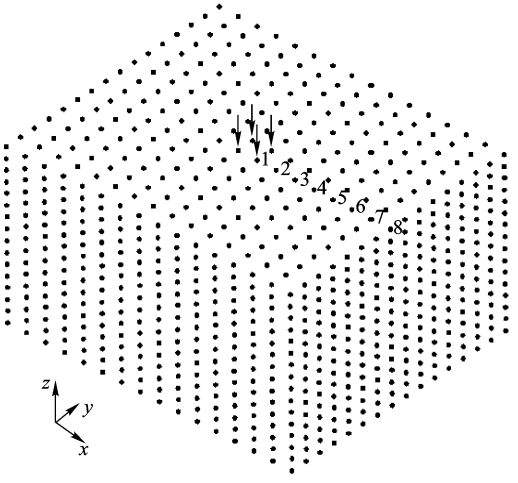

图 1　模型示意图

本算例所用的线弹性 SPH 公式如下:

质量守恒:

$$\dot{\rho}_i = \rho_i \sum_{j \in M_i} (v_j^\beta - v_i^\beta) W_{,x_j^\beta} \frac{m_j}{\rho_j} \tag{7}$$

动量守恒:

$$\dot{v}_i = -\frac{1}{\rho_i} \sum_{j \in M_i} (\sigma_j^{\alpha\beta} + \alpha_i^{\alpha\beta}) W_{,x_j^\beta} \frac{m_j}{\rho_j} + \frac{PA_i}{m_j} \tag{8}$$

式中,$\frac{PA_i}{m_j}$ 为引入外载荷;A_i 为粒子 i 占有的表面面积.

应力:

$$\sigma_i = \boldsymbol{C} \varepsilon_i \tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \tag{10}$$

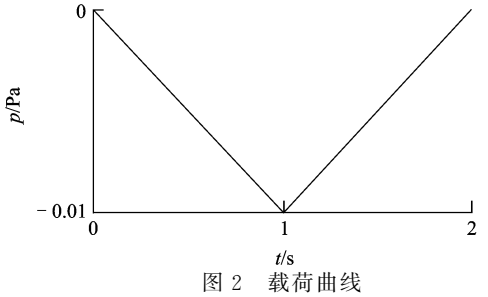

图 2　载荷曲线

应变:

$$\varepsilon_i^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[\sum_{j \in M_i} (u_j^\alpha - u_i^\alpha) W_{,x_j^\beta} \frac{m_j}{\rho_j} + \sum_{j \in M_i} (u_j^\beta - u_i^\beta) W_{,x_j^\alpha} \frac{m_j}{\rho_j} \right] \tag{11}$$

上述式中,α, β 为方向因子;$j \in M_i$ 表示 j 为 i 邻域内的粒子;m, v, u 分别为质量、速度、位移;$W_{,x_j^\beta}$ 为核函数对 x_j^β 的导数. 本文核函数取样条函数:

$$W(e,h) = \frac{a}{h^3} \begin{cases} \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3} - e^2 + \frac{1}{2}e^3\right) & 0 \leqslant e < 1 \\ \frac{1}{4}(2-e)^3 & 1 \leqslant e < 2 \\ 0 & 2 \leqslant e \end{cases} \tag{12}$$

式中,$e = \frac{r}{h} = \frac{|x_i - x_j|}{h}$;$h$ 为影响域半径;a 为归一化常数,在一维、二维和三维情形分别为 $\frac{2}{3}$,$\frac{10}{7\pi}$ 和 $\frac{1}{\pi}$.

采用蛙跳法进行迭代:

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \dot{\rho} \delta t^n \tag{13}$$

$$v^{n+1/2} = v^{n+1} + \frac{1}{2}(\delta t^n + \delta t^{n+1}) \dot{v} \tag{14}$$

$$u^{n+1} = u^n + v^{n+1/2} \delta t^n \tag{15}$$

$$\delta t^n = \min \frac{0.3h}{\left(\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_i}} + v_i\right)} \tag{16}$$

由于是小变形情况,式中影响域半径 h 可以不随时间改变. 在式(14)后面引入式(2)和式(3),由于 2 s 以后不再施加外力,而且没有任何边界约束位移条件,整个系统的动量在 2 s 以后应该守恒为一个常数 −0.01. 按照以上的 SPH 公式进行瞬态分析,输出 2 s 以后的总动量如图 3～图 4,其中 CCSA 即为修正的 CSA,可以看出运用 CSA 导致动量随时间波动,而且,光滑系数 α_{cs} 越大,波动的幅度越大,误差越大,而趋于稳定所需要的时间减小;而运用了 CCSA 以后,总动量在每个时间步均恢复守恒.

图 5 为除上表面外其余 5 个面施加无反射边

界以后模型上表面1～8个粒子的 z 方向最大速度值,图中比较了解析解、有限元法 FEM、CSA 光滑的 SPH 法以及运用 CCSA 光滑的 SPH 法计算的8个粒子的最大速度值.可以看出,有限元法由于运用最小位能原理导致求得近似的位移场以及速度较解析解偏小;SPH 由于运用了 CSA 光滑修正,使得各粒子上的速度峰值也减小;运用本文提出的 CCSA 削减了 CSA 对粒子速度的改变,所以最后的结果更接近于理论值.

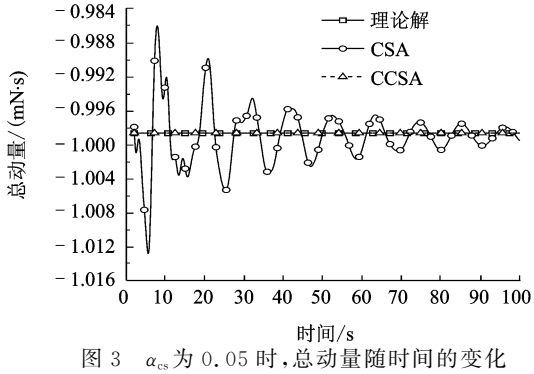

图3 α_{cs} 为0.05时,总动量随时间的变化

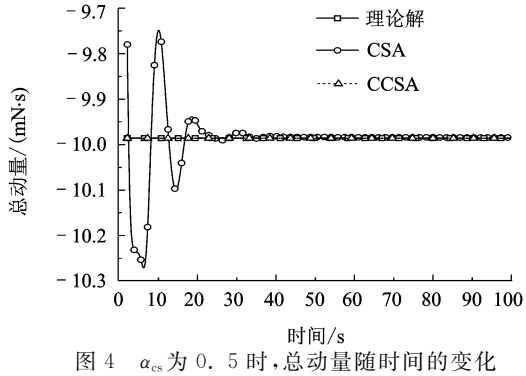

图4 α_{cs} 为0.5时,总动量随时间的变化

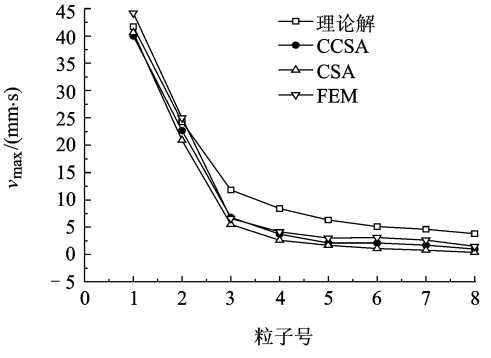

图5 8个粒子最大速度比较

4 结 论

由于在 SPH 中运用的传统的守恒光滑法在稳定计算结果的同时也带来了动量的不守恒以及振动幅值的减小;本文提出的守恒光滑的修正 CCSA,从其物理意义、公式推导和算例均表明,CCSA 不仅完全修复了 CSA 的动量不守恒,还从一定程度提高了计算精度,使得最后的结果更接近理论值.

(编 辑:李 晶)

参考文献(References)

[1] Libersky L D, Petscheck A G. Smooothed particle hydrodynamics with strength of materials [C]//Trease H E, Fritts M F, Crowley W P. Proceedings of the Next Free Lagrange Conference. Heidelberg: Springer-Verlag, 1991: 248－257

[2] Liu M B, Liu G R, Lam K Y. Smoothed particle hydrodynamics for numerical simulation of underwater explosions [J]. Computational Mechanics, 2003, 30(2): 106－118

[3] Liu M B, Liu G R, Zong Z, et al. Computer simulation of high explosive explosion using smoothed particle hydrodynamics methodology [J]. Computers & Fluids, 2003, 32(3): 305－322

[4] Limido J, Espinosa C, Salaim M, et al. SPH method applied to high speed cutting modeling[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2007, 49(7): 898－908

[5] Swegle J W, Hicks D L, Attaway S W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis[J]. Journal of Computational Physics, 1995, 116(1): 123－134

[6] Guenther C, Hicks D L, Swegle J W. Conservative smoothing versu artificial viscosity[R]. SAND94-1853, 1994

[7] Swegle J W, Attaway S W, Heinstein M W, et al. An analysis of smoothed particle hydrodynamics[R]. SAND93-2513, 1994

[8] Balsara D S. Von Neumann stability analysis of smoothed particle hydrodynamics—suggestions for optimal algorithms [J]. Journal of Computational Physics, 1995, 121(2): 357－372

[9] Randles P W, Libersky L D. Smoothed particle hydrodynamics: some recently improvements and applications[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139(1/2/3/4): 375－408

[10] 龙丽平,张建宇,丁桦,等.模拟弹塑性碰撞的修正 SPH 方法[J].北京航空航天大学学报, 2007, 33(6): 658－662
Long Liping, Zhang Jianyu, Ding Hua, et al. Simulation of elastic-plastic impact with modified smoothed particle hydrodynamics method[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(6): 658－662(in Chinese)