不确定载荷下的桁架结构拓扑优化

李东泽 于登云

(北京空间飞行器总体设计部 北京 100094) (中国空间技术研究院 北京 100094)

马兴瑞

(中国航天科技集团公司 北京 100037)

摘 要：对带有不确定扰动载荷的桁架结构拓扑优化问题进行了研究.将不确定载荷表示成有界凸集,从而把不确定性问题转化为一个确定性问题.构造了凸集载荷下以体积为约束的柔度最小化模型,该优化模型的实质是在高维椭球内计算最大柔度最小问题.由于采用传统优化模型存在计算上的困难,对凸集载荷进行了数学处理,并据此构造了半定规划形式的优化模型以便求解.优化结果相对于给定载荷的刚度虽然略低,但对不确定的扰动载荷却具有一定的承载能力.算例表明通过半定规划法构造的考虑扰动载荷作用下的优化结果鲁棒性较佳,结构形式更接近于实际工程结构.

关 键 词：桁架；拓扑优化；不确定载荷；鲁棒

中图分类号：O 327

文献标识码：A **文 章 编 号**：1001-5965(2009)10-1170-04

Truss topology optimization with uncertain loading scenarios

Li Dongze

(Beijing Institute of Spacecraft System Engineering, Beijing 100094, China)

Yu Dengyun

(China Academy of Space Technology, Beijing 100094, China)

Ma Xingrui

(Chinese Space Science and Technology Group Co, Beijing 100037, China)

Abstract: A new model of truss topology optimization (TTO) considering uncertain (in size and direction) loading scenarios was presented. The uncertain loading was modeled as bounded convex sets, and the uncertain model was transformed to a deterministic model. The TTO was formulated as minimization of the compliance subject to volume constraints, and the nature of this type of optimization is to minimizing maximum compliance in high dimensional ellipsoid. The traditional model considering convex sets is hard to solve, and TTO with convex sets was modeled as semidefinite programming (SDP) to overcome this special difficulty. The compliance both to given loading scenarios and a small occasional was simultaneously optimized in SDP model and optimum result showed that the compliance of the truss were slightly reduced respect to given loads, but the optimum topology of the truss is more robust and more practical than that with non-uncertain loading scenarios from the engineering viewpoints.

Key words: truss design; topology optimization; uncertain loading; robustness

桁架结构的最优拓扑形式有时只对给定的载荷是成立的,而对可能出现的不确定扰动载荷却

收稿日期：2008-09-30

基金项目：国家 973 基金资助项目

作者简介：李东泽(1973—),男,吉林长春人,博士生,Dongze_li@hotmail.com.

可能是比较脆弱的,这种情形可认为是结构的鲁棒性不佳.鲁棒优化设计是近年来研究较热的一个方向[1],用于处理优化过程中可能存在的不确定性问题.根据对不确定性因素的处理方式不同,有基于概率形式的随机优化和非概率形式的鲁棒优化.基于概率的随机优化认为不确定性因素是以某种概率的形式发生的[2-3],而非概率形式的鲁棒优化是指不确定性因素虽然是未知的,但却是有界的[4].本文采用非概率形式的鲁棒优化来研究桁架结构拓扑优化问题,以避免脆弱的拓扑设计结果.文献中通常将这类问题构造成多工况或通过施加节点位移约束来实现,前者通常需要根据经验增加工况,后者会因位移等式、不等式约束而引起数值计算方面的困难.本文采用半定规划法建立系统体积约束下的柔度最小化(刚度最大化)模型,并引入了有界的载荷集来代替可能的扰动载荷,使不确定性问题转化为一个确定性问题来求解,较满意地解决了结构的鲁棒性问题.

1　问题描述

为简化问题表述,考虑图 1 所示的 6 节点平面桁架结构,左侧 2 个节点固定,其余为自由节点,材料弹性模量为 210 GPa,初始设计每根杆件直径取为 40 mm.假定载荷向量中非零载荷节点自由度分量用 $\overline{\boldsymbol{f}}$ 表示,则图 1 中节点 3,6 上的载荷表示为

$$\overline{\boldsymbol{f}}=(0,-1,1,0)\times 1\,000\,\mathrm{N}$$

图 2 为该结构在以杆件横截面积为设计变量,以体积为约束(体积上限 $V\leqslant 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$),以柔度最小化为目标函数的拓扑优化结果,优化后的各杆件尺寸见表 1.

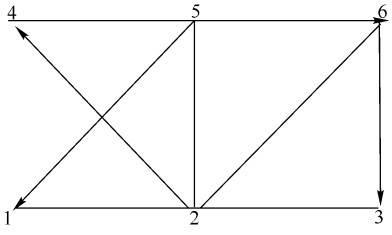


图 1　6 节点基结构

最小柔度值为 0.308 6,将尺寸较小的杆件(10^{-7}量级)删除后形成图 2 所示的最优拓扑.从中可以看出此时的结构已经成为机构,节点 6 处的任何垂直于杆件的载荷扰动都可使柔度值为无穷大,该结构已经不具有承受扰动载荷的能力.由此可以看出该拓扑优化结果仅对给定载荷具有较好的承载能力,但鲁棒性差.若要得到一个比较“鲁棒”的解,一般要人为确定某个扰动载荷,而扰动载荷如何给出以及建立相应的优化模型成为获得“鲁棒解”的关键.

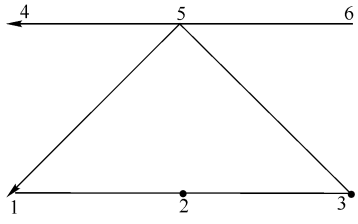


图 2　6 节点桁架最优拓扑

表 1　确定性载荷下的优化结果

杆元编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
杆件断面积/mm²	277.8	392.9	277.8	7.4×10^{-8}	5.2×10^{-8}	1.3×10^{-7}	392.9	6.4×10^{-8}	833.3	277.8

2　扰动载荷的构造

2.1　问题分析

不失一般性,假定设计时关心的主要载荷为 $\boldsymbol{F}=\{\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_k\}$,$\boldsymbol{f}_i\in\mathbf{R}^n$,$i=1,\cdots,k$,$k$ 为工况数,n 为桁架结构系统的自由度数,那么桁架结构拓扑优化的最大最小问题为模型[5]:

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^m}\left(c^{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t}):\sum_{i=1}^{m}t_i\leqslant\overline{V},\boldsymbol{t}\geqslant 0\right)\\&c^{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t})=\max_{\boldsymbol{f}_i\in\boldsymbol{F}}\max_{\boldsymbol{u}_i\in\mathbf{R}^n}[2\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}_i]\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

式中,$c^{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t})$代表载荷集 $\boldsymbol{F}$ 下的最大柔度;$\boldsymbol{u}_i$ 为载荷 $\boldsymbol{f}_i$ 下的位移.显然载荷集 $\boldsymbol{F}$ 可能是不全面的,对于载荷集 $\boldsymbol{F}$ 中没有包含的载荷,即便是一个很小的扰动载荷,也可能出现图 2 所示的鲁棒性不佳的问题.如果将载荷集 $\boldsymbol{F}$ 扩展为包含扰动载荷的另一个载荷集 $\boldsymbol{M}$,则优化后的结构鲁棒性会更好.下面讨论载荷集 $\boldsymbol{F}$ 到 $\boldsymbol{M}$ 的扩充.

2.2　载荷集 $\boldsymbol{F}$ 的扩充

假设受载荷节点集为 l,其自由度为 q 维,对应的载荷写为 $\widetilde{\boldsymbol{F}}=[\widetilde{\boldsymbol{f}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{f}}_k]$,$\widetilde{\boldsymbol{f}}_i\in\mathbf{R}^q$,即 $\widetilde{\boldsymbol{f}}_i$ 中只保留载荷向量中与上述 q 个自由度对应的分量,目的是在 q 维空间内将 $\widetilde{\boldsymbol{F}}$ 扩充成包含扰动载荷的新载荷集,使包含节点集 l 的最优拓扑结构对扰动载荷具有一定的承载能力.

假定$[\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{q-k}]$为$\tilde{\boldsymbol{F}}$正交补集中的某正交规范基，令$\boldsymbol{B}=r[\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{q-k}]$($r$一般取$\tilde{\boldsymbol{F}}$的Frobenius范数的0.1～0.3倍)为扰动载荷，则可定义矩阵$\tilde{\boldsymbol{Q}}=[\tilde{\boldsymbol{f}}_1,\cdots,\tilde{\boldsymbol{f}}_k,r\boldsymbol{b}_1,\cdots,r\boldsymbol{b}_{q-k}]$. 任意$q$维向量$\boldsymbol{f}^*$可表示为$\tilde{\boldsymbol{Q}}$的列向量的线性组合. 为避免混淆，令$\boldsymbol{M}^*$为$q$维空间节点载荷集，将其表示成$\boldsymbol{M}^*=\{\boldsymbol{f}^*\mid\boldsymbol{f}^*=\tilde{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{\lambda}\}$，$\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_1,\cdots,\lambda_q]$为对应基下的坐标. 显然若令$\|\boldsymbol{\lambda}\|\leqslant1$，则$\boldsymbol{M}^*$必包含$\tilde{\boldsymbol{Q}}$，令与$\boldsymbol{M}^*$对应的$n$维载荷集为$\boldsymbol{M}$，与$\boldsymbol{f}^*$对应的$n$维载荷向量为$\boldsymbol{f}$，与$\tilde{\boldsymbol{Q}}$对应的$n\times q$矩阵为$\boldsymbol{Q}$，令$\boldsymbol{M}=\{\boldsymbol{f}\mid\boldsymbol{f}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda}\}$，则$\boldsymbol{M}$即为扩充后的新载荷集.

上述过程是将不确定的扰动载荷处理为一个有界的凸集($q-k$维超球$\boldsymbol{B}$)，然后将$\boldsymbol{F}$扩充成新载荷集$\boldsymbol{M}$，从而式(1)转化为在$\boldsymbol{M}$中计算最大最小问题. 显然载荷集$\boldsymbol{M}$含有无穷多个载荷，因此很难计算$\boldsymbol{M}$中的最大柔度，而半定规划列式可解决该问题.

3 半定规划模型的建立

传统半定规划的数学形式为[6]

$$\left.\begin{aligned}&\min_{x}\quad\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\&\text{s.t.}\quad\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}_0+\sum_{i=1}^{m}x_i\boldsymbol{F}_i\geqslant0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$；$\boldsymbol{F}_i(i=0,\cdots,m)$为$n$阶常对称矩阵；矩阵$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\geqslant0$表示$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$为半定矩阵；$\boldsymbol{x}$为设计变量，本文指杆件体积向量$\boldsymbol{t}$. 下面将考虑扰动载荷的最大最小问题构造成半定规划形式.

与$c^{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{t})$类似，载荷集$\boldsymbol{M}$下的最大最小问题的柔度形式可表示为

$$c^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})=\max_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^q,\|\boldsymbol{\lambda}\|\leqslant1}\ \max_{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^n}[2(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}]$$

引入变量τ，令$c^{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{t})\leqslant\tau$，则与式(1)等价的优化模型为[7]

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^m,\tau\in\mathbf{R}}\quad\tau\\&\text{s.t.}\quad2(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}\leqslant\tau\\&\qquad\sum_{i=1}^{m}t_i\leqslant\overline{V},\boldsymbol{t}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式(3)中的第1个约束可转换为下面的线性矩阵不等式形式[8]：

$$\begin{pmatrix}\tau\boldsymbol{I}_q&\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})\end{pmatrix}\tag{4}$$

由此可将含有扰动载荷的最大最小问题转换为下面的半定规划模型：

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\boldsymbol{t}\in\mathbf{R}^m,\tau\in\mathbf{R}}\quad\tau\\&\text{s.t.}\quad\begin{pmatrix}\tau\boldsymbol{I}_q&\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})\end{pmatrix}\geq0\\&\qquad\sum_{i=1}^{m}t_i\leqslant\overline{V},\boldsymbol{t}\geqslant\boldsymbol{0}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

式(5)中的3个约束条件都是不等式约束，将其合为一个线性矩阵不等式：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t},\tau)=\begin{bmatrix}\tau\boldsymbol{I}_q&\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}&&\\\boldsymbol{Q}&\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})&&\\&&-\sum_{i=1}^{m}t_i+\overline{V}&\\&&&\operatorname{diag}(\boldsymbol{t})\end{bmatrix}\geq0$$

将$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t},\tau)$中含有变量$(\boldsymbol{t},\tau)$部分提出，则拆分后的系数矩阵为

$$\boldsymbol{F}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}&&\\\boldsymbol{Q}&\operatorname{diag}(\boldsymbol{0})&&\\&&\overline{V}&\\&&&\operatorname{diag}(\boldsymbol{0})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&&\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{K}_i&&\\&&-\boldsymbol{1}&\\&&&\operatorname{diag}(\boldsymbol{e}_i)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}_{m+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_q&\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}&&\\\boldsymbol{0}&\operatorname{diag}(\boldsymbol{0})&&\\&&\boldsymbol{0}&\\&&&\operatorname{diag}(\boldsymbol{0})\end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{e}_i$为第i个元素为1其余元素为0的向量；$\operatorname{diag}(\boldsymbol{e}_i)$为以$\boldsymbol{e}_i$为对角线的方阵. 将系数矩阵$\boldsymbol{F}_i$，$\boldsymbol{F}_{m+1}$乘以设计变量后与$\boldsymbol{F}_0$重新组合为半定规划模型：

$$\begin{cases}\min\limits_{\boldsymbol{t},\tau}\quad\tau\\\text{s.t.}\quad\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t},\tau)=\boldsymbol{F}_0+\sum\limits_{i=1}^{m}t_i\boldsymbol{F}_i+\tau\boldsymbol{F}_{m+1}\geqslant0\end{cases}$$

该式即为式(2)，而式(2)可采用齐次原始-对偶不可行内点算法求解[9].

由式(5)可以看出，扰动载荷包含在矩阵$\boldsymbol{Q}$中，而矩阵$\boldsymbol{Q}$是半定规划模型的约束条件，从物理意义上看，矩阵$\boldsymbol{Q}$由两部分组成，一部分为主载荷，一部分为扰动载荷，扰动载荷与给定的主载荷均为正交，不同扰动载荷之间也是正交的，这两部分载荷所形成的载荷集$\boldsymbol{Q}$从数学上看满秩的，这就在模型中强制保证了每个载荷加载节点存在不同方向的扰动载荷. 采用这种形式求得的解满足载荷集$\boldsymbol{M}$中的每个载荷，故该解定为最大柔度

最小解[10],后文的算例也说明这种构造方法较为合理.

4　数值算例

算例 1　本例采用前文所述 6 节点基结构,该例在单载荷无扰动载荷情况下导致最后的拓扑结构为不稳定结构,现在将给定载荷扩充为包含扰动载荷的新载荷.本例中有 2 个载荷节点,共 4 个自由度,含有不确定载荷集的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ 的列向量个数应为 $q=2\times l=4$,其中椭球的一个半轴为给定载荷 $\tilde{\boldsymbol{f}}$,其余 3 个半轴为 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 的正交补集的正交规范基,长度取给定载荷的 10%,经计算矩阵 $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ 为

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}=\begin{bmatrix} 0 & 100 & -100 & 0 \\ -1\,000 & 70.71 & 70.71 & 0 \\ 1\,000 & 70.71 & 70.71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 141.42 \end{bmatrix} \tag{6}$$

每列的节点位移顺序为 $3x,3y,6x,6y$,各杆件最后的优化结果见表 2,将尺寸较小的杆件(10^{-7}量级)删除,形成图 3 所示的稳定的最优拓扑结构,此时的桁架系统相对于载荷 $\boldsymbol{f}$ 的柔度为 0.313 8,仅比原来大了 1.67%左右,但其鲁棒性显然优于图 2 所示结构.

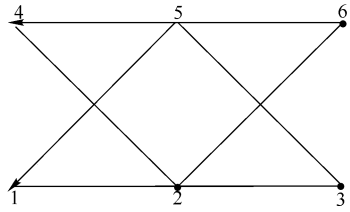


图 3　考虑不确定载荷下的最优拓扑形式

算例 2　图 4a 所示为三维吊钩状桁架结构,顶部 4 个节点固支,其余节点为自由节点,节点载荷 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 作用于底部桁架前端:

$$\tilde{\boldsymbol{f}}=(0,0,-1,0,0,-1)\times 1\,000\ \mathrm{N}$$

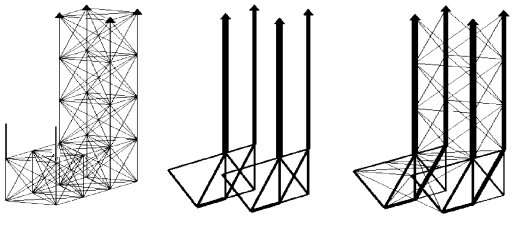
载荷节点内部编号为 9,13.所用材料属性同算例 1,体积上限取 0.076 m^3(初始体积的 1/3).图 4b 为没有扰动载荷情况下的优化结果,优化结果中共有杆件 34 根,系统最小柔度为 0.120 4.由图 4b 可以看到,最优拓扑形式为两个不相连接的二维桁架,只要有横向扰动载荷,该拓扑就是不稳定结构.图 4c 为考虑扰动载荷作用下的最优拓扑结构,本例中的载荷节点也为 2 个,共 6 个自由度,矩阵 $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ 的列向量个数为 $q=3\times l=6$,其中椭球的一个半轴为给定载荷 $\boldsymbol{f}$,其余 5 个半轴为 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 的正交补集的正交规范基,长度也取给定载荷的 10%,计算后的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{Q}}$ 为式(7).

优化结果显示,此时的最后拓扑结构共有 57 根杆,结构最小柔度为 0.122,仅增加了 1.33%左右.虽然在最后的拓扑结构中增加了 23 根杆件,但该拓扑结构是稳定的,对小幅横向扰动载荷是具有一定承载能力的,其鲁棒性优于图 4b 所示结构.限于篇幅本文没有给出优化后的各杆件断面尺寸.

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 141.42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1\,000 & 0 & 70.71 & 0 & 0 & -70 \\ 0 & 0 & 0 & 141.42 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 141.42 & 0 \\ -1\,000 & 0 & -70.71 & 0 & 0 & 70. \end{bmatrix} \tag{7}$$

表 2　考虑不确定载荷下的优化结果

杆元编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
杆件断面积/mm^2	284.5	388.5	278.5	6.18	5.2×10^{-8}	6.18	388.5	1.2×10^{-7}	825.3	275.8



a 基结构　　b 确定性载荷下的优化结果　　c 不确定载荷下的优化结果

图 4　有无不确定载荷下的拓扑优化结果比较

5　结　论

本文采用的半定规划法构造的考虑扰动载荷作用的优化模型,能够解决桁架结构拓扑优化中出现的不稳定结构问题.通过将不确定的扰动载荷建模为未知有界集,使问题变为一个确定性问题.在相同体积(或相同质量)约束下,考虑扰动载荷时的优化结果虽然刚度略有降低(<2%),但最终拓扑结构不仅对给定载荷是稳定结构,而且对干扰载荷也具有一定的承载能力,其鲁棒性得到提高,结构形式更接近于实际工程结构.

(下转第 1178 页)