防空导弹最优弹道的协态估计优化算法

李佳峰 陈万春

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 为了快速精确地得到防空导弹中段最优弹道,在拟勒让德谱变换法的基础上提出了协态估计优化算法. 该算法克服了采用拟勒让德谱变换法所得非线性规划 NLP (Non-Linear Programming)问题优化变量过多、收敛速度慢的缺点,并能在避免求解两点边值问题 TPBVP(Two Point Boundary Value Problem)的前提下,快速解得近似满足最优解必要条件的解. 针对防空导弹中段弹道优化问题的特点,应用提出的协态估计优化算法进行优化得到结果,与拟勒让德谱变换法所得结果相比,表明该算法具有收敛速度快,优化精度高的优点.

关 键 词: 最优控制; 拟勒让德谱变换; 协态估计; 非线性规划; 弹道优化

中图分类号: V 412.4$^+$1

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2009)10-1179-04

Co-state estimation algorithm of the surface-to-air missile optimal trajectory

Li Jiafeng Chen Wanchun

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: As to obtain the precise optimal trajectory of the surface-to-air missile rapidly, a co-states estimation optimization algorithm was developed based on the Legendre pseudospectral method. The algorithm overcomes the shortcoming of the Legendre pseudospectral method such as there are too many optimization variables in the nonlinear programming (NLP) problem and the slow convergence rate. Additionally, on the premise of avoiding solving the two point boundary value problem (TPBVP), the optimal results satisfying the essential conditions could be computed rapidly. According to the characteristics of the midcourse trajectory optimization problem for a surface-to-air missile, the co-state estimation algorithm and the Legendre pseudospectral method were applied, and the results show that the algorithm takes on fast convergence rate and high optimization precision.

Key words: optimal control; Legendre pseudospectral; co-state estimation; nolinear programming; trajectory optimization

防空导弹武器系统的最终目的就是有效地毁伤目标,为了能直接用毁伤效果来衡量弹道的优劣,文献[1—2]中提出了多层次法,具体是将整个弹道分为 3 层,分别为无控射入层、中制导优化层和末制导 Monte-Carlo 仿真层. 在用多层次法分析弹道的过程中,需要使导弹在中制导段与末制导段的交班点上速度达到最大,本文即以此作为优化目标,寻求最优的中段弹道.

最优控制问题的数值算法可以归为两类:直接法和间接法. 间接法是基于某种最优控制理论的最优性条件,例如极大值原理,采用特定算法求出满足该最优性条件的解;而直接法则直接在可行控制集中进行搜索,直到得到或逼近原问题的最优解. 相比之下,直接法收敛速度更快,易于实现;间接法求解困难,所得结果更为准确. 文献[3—4]分别采用直接法求解了高超声速飞行器最小热流和最省燃料问题,得到了相应的次优弹道;然而为了得到最优解,需要用间接法求解两点边

收稿日期: 2008-10-14

作者简介: 李佳峰(1982—),男,河南洛阳人,博士生,buaaljf@163.com.

值问题 TPBVP(Two Point Boundary Value Problem).其中,文献[5]结合单纯形法和梯度法优化解得最省燃料的弹道,文献[6]用罚函数将TPBVP转化成无约束问题后采用遗传算法求解了时间最短问题.由上述文献可以看出,由于TPBVP对初始点特别敏感,求解比较繁琐,而直接法收敛速度更快,易于实现.为此,本文在利用拟勒让德谱变换[7]将原问题转化为非线性规划NLP(Nonlinear Programming)问题的基础上,提出了介于直接法与间接法之间的优化算法:协态估计优化算法.关于协态估计,文献[8-9]利用当哈密顿函数中不显含时间时为定值的特性,通过泰勒展开,在始端的某个邻域内列出近似方程组的方法猜测其初值;而本文根据最优解满足的必要条件,在整个积分过程上列方程,估算出协态变量曲线,该方法不仅可以处理哈密顿函数中显含时间的情况,而且对于存在内点约束的系统,也能有效地估算出协态曲线,进而,以估算所得协态为未知数列方程,求解这两组方程解得系统的最优解.对于防空导弹中段弹道优化问题,应用提出的协态估计算法进行优化,得到了近似满足最优解必要条件的解,它与间接法结果非常接近.

1 最优控制问题的数学描述

考虑下面Bolza形式的的最优控制问题:

$$\left.\begin{aligned}&\min\quad J[\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\tau_{\mathrm{f}}]=M[\boldsymbol{x}(\tau_{\mathrm{f}}),\tau_{\mathrm{f}}]+\int_{\tau_0}^{\tau_{\mathrm{f}}}L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\tau)\mathrm{d}\tau\\&\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(\tau),\tau]\quad\tau\in[\tau_0,\tau_{\mathrm{f}}]\\&\psi_0[\boldsymbol{x}(\tau_0),\tau_0]=0\qquad\psi_0\in\boldsymbol{R}^p\\&\psi_{\mathrm{f}}[\boldsymbol{x}(\tau_{\mathrm{f}}),\tau_{\mathrm{f}}]=0\qquad\psi_{\mathrm{f}}\in\boldsymbol{R}^q\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^m$为控制变量;$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$为状态变量.根据拉格朗日乘子理论,引入协态变量$\boldsymbol{\lambda}(\tau)$,$\boldsymbol{v}_0\in\boldsymbol{R}^p$和$\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}\in\boldsymbol{R}^q$,得

$$\begin{aligned}\overline{J}=&M[\boldsymbol{x}(\tau_{\mathrm{f}}),\tau_{\mathrm{f}}]+\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}\psi_0+\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\psi_{\mathrm{f}}+\\&\int_{\tau_0}^{\tau_{\mathrm{f}}}\{L(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\tau)+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\tau)\cdot\\&[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{u}(\tau),\tau)-\dot{\boldsymbol{x}}]\}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{2}$$

定义哈密顿函数为

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{u},\tau)=\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}+L\tag{3}$$

最优解的必要条件为

$$\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{u}}=0\tag{4}$$

协态变量满足:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}}=-\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{x}}\tag{5}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}(\tau_0)^{\mathrm{T}}&=-\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial\psi_0}{\partial\boldsymbol{x}(\tau_0)}\\\boldsymbol{\lambda}(\tau_{\mathrm{f}})^{\mathrm{T}}&=\frac{\partial M}{\partial\boldsymbol{x}(\tau_{\mathrm{f}})}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\psi_{\mathrm{f}}}{\partial\boldsymbol{x}(\tau_{\mathrm{f}})}\\H(\tau_{\mathrm{f}})&=-\left[\frac{\partial M}{\partial\tau_{\mathrm{f}}}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\psi_{\mathrm{f}}}{\partial\tau_{\mathrm{f}}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

2 拟勒让德谱变换

设$L_N(t)$为N阶勒让德多项式,$t_l(l=1,2,\cdots,N-1)$为$\dot{L}_N(t)$的零点,令$t_0=-1$,$t_N=1$,则$t_l(l=1,2,\cdots,N)$称为LGL(Legendre-Gauss-Lobatto)点.拟勒让德谱变换就是利用状态变量在LGL点上的值,通过拉格朗日插值得到对原变量的拟合曲线,并用所得曲线的导数近似其导数,从而将原问题转化为NLP问题.

由于$t_l\in[-1,1]$和$\tau\in[\tau_0,\tau_{\mathrm{f}}]$不在同一区间,首先做下列变换:

$$\tau=\frac{(\tau_{\mathrm{f}}-\tau_0)t+(\tau_{\mathrm{f}}+\tau_0)}{2}\tag{7}$$

由拉格朗日插值公式将状态变量和控制变量分别近似表示为

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{X}(t)&=\sum_{l=0}^{N}\boldsymbol{X}_l\phi_l(t)\\\boldsymbol{U}(t)&=\sum_{l=0}^{N}\boldsymbol{U}_l\phi_l(t)\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

对于$l=0,1,\cdots,N$有

$$\phi_l(t)=\frac{1}{N(N+1)L_N(t_l)}\cdot\frac{(t^2-1)\dot{L}_N(t)}{t-t_l}\tag{9}$$

在LGL点上,对状态变量求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}(t_k)=\sum_{l=0}^{N}\boldsymbol{X}_l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_l(t_k)\qquad k=0,1,\cdots,N\tag{10}$$

即

$$\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}(t_0)\\\vdots\\\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}(t_N)\end{pmatrix}=\boldsymbol{D}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_0\\\vdots\\\boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}\tag{11}$$

其中$\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{R}^{n(N+1)\times n(N+1)}$.相应地,性能泛函可写成

$$\begin{aligned}J^N(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},t_N)=&M(\boldsymbol{X}_N,t_N)+\\&\frac{\tau_{\mathrm{f}}-\tau_0}{2}\sum_{k=0}^{N}L(\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{U}_k,t_k)\omega_k\end{aligned}\tag{12}$$

其中

$$\omega_k=\frac{2}{N(N+1)}\frac{1}{[L_N(t_k)]^2}\qquad k=0,1,\cdots,N\tag{13}$$

这样原最优控制问题转化为

$$\left.\begin{aligned}\min\quad & J^N(\boldsymbol{U},\boldsymbol{X},t_N)=M(\boldsymbol{X}_N,t_N)+\\ & \frac{\tau_f-\tau_0}{2}\sum_{k=0}^{N}L(\boldsymbol{X}_K,\boldsymbol{U}_k,t_k)\omega_k\\ & \frac{\tau_f-\tau_0}{2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{U}_k,t_k)-\sum_{l=0}^{N}D_{kl}\boldsymbol{X}_l=0\\ & \psi_0(\boldsymbol{X}_0,t_0)=0\\ & \psi_N(\boldsymbol{X}_N,t_N)=0\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

3　协态估计优化算法

协态在研究最优控制问题的过程中有着非常重要的地位,特别是对于间接解法,实质就是寻找协态的初值. 本文在利用勒让德方法转化所得 NLP 问题的基础上,根据最优解的必要条件估算出协态变量. 考虑带拉格朗日乘子的性能泛函:

$$\begin{aligned}\overline{J}^N=&M(\boldsymbol{X}_N,t_N)+\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}\psi_0+\boldsymbol{v}_N^{\mathrm{T}}\psi_N+\\ &\frac{\tau_f-\tau_0}{2}\sum_{i=0}^{N}L(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{U}_i,t_i)\omega_i+\\ &\sum_{i=0}^{N}\omega_i\lambda_i^{\mathrm{T}}\left[\frac{\tau_f-\tau_0}{2}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{U}_i,t_i)-\sum_{j=0}^{N}D_{ij}\boldsymbol{X}_j\right]\end{aligned}\tag{15}$$

最优解的必要条件是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{J}^N}{\partial\boldsymbol{X}_i}=0\qquad i=0,\cdots,N\\ &\frac{\partial\overline{J}^N}{\partial\boldsymbol{U}_i}=0\qquad i=0,\cdots,N\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

将式(15)代入式(16),经推导得:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\overline{J}^N}{\partial\boldsymbol{U}_i}=\omega_i\frac{\tau_f-\tau_0}{2}\cdot\\ &\left[\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{f}[\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{U}_i,t_i]}{\partial\boldsymbol{U}_i}+\frac{\partial L[\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{U}_i,t_i]}{\partial\boldsymbol{U}_i}\right]=\\ &0\qquad i=0,\cdots,N\end{aligned}\tag{17}$$

$$\frac{\tau_f-\tau_0}{2}\left[\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{U}_i,t_i)}{\partial\boldsymbol{X}_i}+\frac{\partial L(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{U}_i,t_i)}{\partial\boldsymbol{X}_i}\right]+\sum_{j=0}^{N}D_{ij}\boldsymbol{\lambda}_i=0\qquad i=0,\cdots,N\tag{18}$$

边界条件变为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_0&=-\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}\frac{\partial\psi_0}{\partial\boldsymbol{X}_0}\\ \lambda_N&=\frac{\partial M}{\partial\boldsymbol{X}_N}-\boldsymbol{v}_N^{\mathrm{T}}\frac{\partial\psi_N}{\partial\boldsymbol{X}_N}\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

可以将式(17)~式(19)看成是关于协态的线性方程组,记为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})\lambda=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})\tag{20}$$

一般情况下,方程组(20)中的方程个数多于未知数的个数,这样可以通过矩阵的广义逆进行估算,得

$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}=\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})\tag{21}$$

将协态变量的估计值代入式(20)得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U})=\boldsymbol{0}\tag{22}$$

由式(1)可将状态变量写成控制变量的隐式函数,设为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\tag{23}$$

代入式(22)得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{U})\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{U})\boldsymbol{B}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{U})-\\ &\boldsymbol{B}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}),\boldsymbol{U})=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{24}$$

解上述方程组即可得满足系统最优解必要条件的解. 由于上述方程组是由式(23)代入式(22)而得,并不是线性方程组,因此在实际应用中需要采用优化算法来求解.

4　算法在弹道优化中的应用

防空导弹从发射到击中目标的过程中,由于导引律的不同弹道可分成多个阶段,其典型的弹道可分为射入段、中制导阶段及末端制导段.

4.1　问题描述

考虑二维的弹道模型:

$$\left.\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{1}{m}(P\cos\alpha-D-mg\sin\theta)\\ \dot{\theta}&=\frac{1}{mV}(P\sin\alpha+L-mg\cos\theta)\\ \dot{x}&=V\cos\theta\\ \dot{y}&=V\sin\theta\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

式中,V 为速度;θ 为弹道倾角;α 为攻角;P 为推力;m 为质量;D 为阻力;L 为升力.

设助推器工作时间为 t_1,则质量和推力可表示为

$$\left.\begin{aligned}m&=m_0+\dot{m}t\quad t\in[t_0,t_1]\\ m&=m_0+\dot{m}t_1\quad t\in[t_1,t_f]\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}P&=P_0\quad t\in[t_0,t_1]\\ P&=0\quad t\in[t_1,t_f]\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

式中,$\dot{m}$ 为质量变化率;P_0 为常值推力. 目标函数为

$$\min-V(t_f)\tag{28}$$

边界条件取为 $V(t_0)=500\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})$;$\theta(t_0)=37°$;$x(t_0)=0$;$y(t_0)=300\ \mathrm{m}$;$\theta(t_f)=0$;$x(t_f)=25\ \mathrm{km}$;$y(t_f)=10\ \mathrm{km}$.

4.2　优化过程

先用拟勒让德谱变换将原问题转化为 NLP

问题并进行初步优化得到次优解，以该次优解为基础构造式(21)，得到协态估计值 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$，将 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 代入式(20)得控制变量的估计值 $\hat{\boldsymbol{u}}$，以 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 作为初值求解式(24)得到最终结果.

在整个过程中，推力在 t_1 处有间断，使得速度在该点不再可导，而勒让德方法是用拉格朗日插值公式拟合曲线，如果整个过程仅划分为一段，将产生很大的误差，因此需要将其分为两段$[t_0, t_1]$和$[t_1, t_f]$，对应的分段数分别取为 $N_1 = 10$，$N_2 = 20$，即将整个过程分为 30 份，但是有 32 个点，即 $N = 31$，其中的第 11 个点和第 12 个点重合. 由于状态变量在该点是连续的，所以在转化的过程中需要额外加 4 个连接等式约束. 在本问题中，飞行时间 t_f 未知，因此应作为一维优化变量处理.

按照上述方法及分析，最优控制问题将转化为 NLP 问题，其中的优化参数含有 132 个状态变量，33 个控制变量，1 个时间变量；等式约束有 132 个微分约束，4 个连接条件，7 个边界条件.

本文所有计算均在 Matlab 2007a 中实现，初值取攻角为定值 $-1.5°$，飞行时间取 20 s，采用 SQP (Sequential-Quadratic-Programming) 优化算法先对所得 NLP 问题进行 500 次优化得到初步结果，以该解为基础估算出协态及控制变量 $\hat{\boldsymbol{u}}$，如图 1 所示，从图中可见虽然直接法所得攻角跳变较大，但是由于估算时主要用到的是相对光滑的状态变量，所以估计所得结果也非常光滑. 以 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 为初值求解式(24)，经过 5 次优化得到最终结果如图 2 所示，图中也显示了采用间接法所得的结果，另外两种方法所得协态变量如图 3 和图 4 所示. 由于推力在 10 s 处出现跳动，攻角此时也不再连续. 通过与间接法所得最优解相比可见，协态法的结果非常准确.

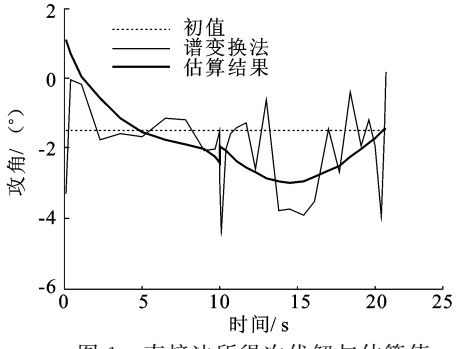


图 1 直接法所得次优解与估算值

谱变换法和协态估计优化算法的优化过程如表 1 所示. 随着优化循环次数的增加谱变换法可以稳定地收敛到最优解，然而收敛速度非常慢，且越靠近最优解收敛速度越慢，而协态法则与之相反，它对初值比较敏感，但是收敛速度非常快. 因此结合两者的优缺点，以谱变换法初步优化结果为协态法的初值进行优化，既能使算法有较快的收敛速度，也使得算法对初值并不敏感.

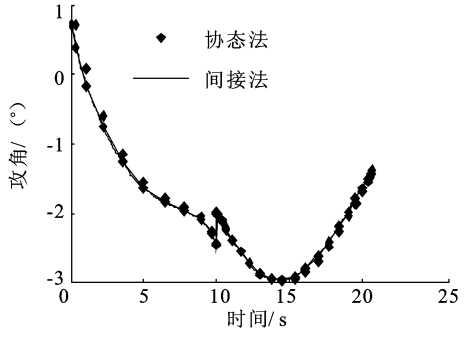


图 2 协态法攻角与间接法攻角

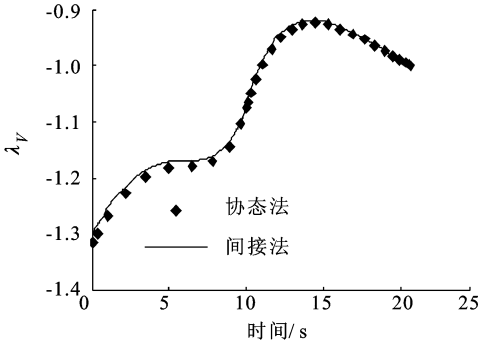


图 3 λ_V 的估计值与精确值

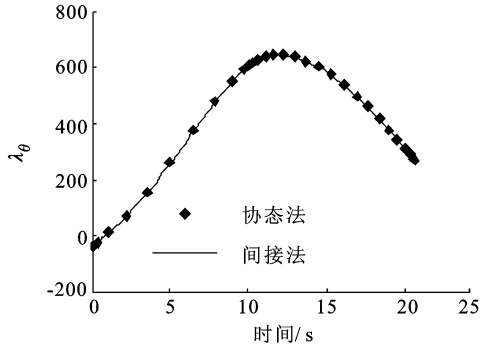


图 4 λ_θ 的估计值与精确值

表 1 不同方法所得结果

优化算法	循环次数	消耗时间/s	终端速度/(m·s^{-1})
谱变换法	500	71.05	1118.35
谱变换法	1000	141.23	1130.54
谱变换法	1500	212.45	1131.88
谱变换法	2000	282.82	1131.90
协态法	5	21.76	1132.87

(下转第 1187 页)