卫星编队的多脉冲队形重构方法

李保军 师 鹏 张 皓 赵育善

(北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 主要研究了椭圆轨道燃料消耗最优的多脉冲编队队形重构问题. 首先,基于Lawden方程的解析解,推导了多脉冲机动的数学模型. 然后构造燃料最优目标函数,将总脉冲写成关于各脉冲作用时间和前 $n-2$ 次脉冲大小的函数. 然后利用遗传算法对问题进行求解,将结果转换到时间域,确定最终各脉冲的大小、方向和作用时间. 最后进行了数学仿真,验证了算法的正确性.

关 键 词: 编队飞行; 队形重构; 多脉冲

中图分类号: V 412.4

文献标识码: A **文 章 编 号**: 1001-5965(2009)08-0950-03

Satellites formation reconfiguration with multiple impulses

Li Baojun Shi Peng Zhang Hao Zhao Yushan

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Satellite formation flying (SFF) reconfiguration using multiple impulses was studied, which was mainly focusing on fuel efficiency. The elliptic reference orbit was considered. First the mathematical description of multiple-burn maneuver was established based on the analytical solution of the Lawden equation. Then object function was constructed as the total fuel which took the form as function of the imposing time and the magnitude of the previous n-2 burns, followed with the problem being solved utilizing the genetic algorithm. Finally the result was transferred into time domain to determine the magnitude, direction and imposing time of each of the impulse vectors. The simulation shows that the algorithm presented could lead to a more efficient method to implement the SFF reconfiguration.

Key words: formation flying; reconfiguration; multiple impulses

卫星编队飞行[1]是指若干个航天器构成一个特定形状,该特定形状中的各个航天器保持这个队形,同时又绕星球中心旋转. 编队飞行各星相互协同工作,整个星群构成一个大的"虚拟航天器"[2].

在卫星编队飞行任务中,根据空间任务的转化,编队卫星有时需要调整队形. 因此队形重构策略,在卫星编队飞行技术中占有十分重要的地位. 当前国内外对这一方面的研究已经取得了很多成果,文献[3]根据 HCW 方程建立了相对轨道面内最优三脉冲和相对轨道面外最优单脉冲的转移模型,并在此基础上提出了反馈控制. 文献[4]根据 HCW 方程提出了 3 次迹向脉冲和一次轨道面法向脉冲的相对轨道转移模型. 文献[5]以 6 个轨道根数描述相对运动,提出了二脉冲转移方法. 以上文献详细分析了脉冲式队形重构问题,但模型和算法都是针对圆轨道,不具有一般性.

本文针对椭圆轨道,以 Lawden 方程[6-8]为动力学模型,推导了多脉冲队形重构的数学形式,以脉冲的作用时间和大小为自变量,将总脉冲大小表示出来,将问题转化为规划问题. 最后通过数学仿真验证算法的正确性.

1 数学模型

收稿日期: 2008-06-27

作者简介: 李保军(1981—),男,山东德州人,博士生,Lib@sa.buaa.edu.com.

1.1　编队飞行的动力学模型

定义轨道系坐标原点 O 为主星质心,z 轴沿主星指向地心;y 轴指向主星轨道面负法线方向;x 轴在轨道面内与 z 轴垂直,指向前方,且成右手直角坐标系.

Yamanaka 利用微分变量代换,把 Lawden 方程中的自变量时间 t 用主星真近点角 θ 来代替,并进一步代换变量,在无摄动和无主动控制的情况下,得到了以主星真近点角 θ 为变量的状态转移矩阵[9].

变量代换后 Lawden 方程为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{x}'' &= 2\tilde{z}'\\ \tilde{y}'' &= -\tilde{y}\\ \tilde{z}'' &= 3\tilde{z}/\rho - 2\tilde{x}'\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

方程中变量与时间域变量的转换关系为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{r}} &= \rho\boldsymbol{r}\\ \tilde{\boldsymbol{v}} &= -e\sin\theta\boldsymbol{r} + (1/k^2\rho)\boldsymbol{v}\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

其中　　$\rho = 1 + e\cos\theta$　　$k^2 = h/p^2$

式中,e,h,p 分别为主星轨道的偏心率、动量矩大小和半通径.

在方程(1)中,y 方向与其它方向无耦合关系,其状态转移矩阵可单独求得

$$\Phi_y(\theta,\theta_0) = \begin{bmatrix}\cos\Delta\theta & \sin\Delta\theta\\ -\sin\Delta\theta & \cos\Delta\theta\end{bmatrix} \tag{3}$$

x,y 两方向的状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}_{xz}(\theta,\theta_0) = \boldsymbol{\Phi}_\theta\boldsymbol{\Phi}_{\theta_0}^{-1} \tag{4}$$

其中　　$\boldsymbol{\Phi}_\theta =$

$$\begin{bmatrix}1 & -c(1+1/\rho) & s(1+1/\rho) & 3\rho^2 J\\ 0 & s & c & 2-3es\rho\\ 0 & 2s & 2c-e & 3-6esJ\\ 0 & s' & c' & -3e(s'J + s/\rho^2)\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\theta_0}^{-1} = \frac{1}{1-e^2}\times$$

$$\begin{bmatrix}1-e^2 & 3es(1/\rho+1/\rho^2) & -es(1+1/\rho) & -ec+2\\ 0 & -3s(1/\rho+e^2/\rho^2) & s(1+1/\rho) & c-2e\\ 0 & -3(c/\rho+e) & c+c/\rho+e & -s\\ 0 & 3\rho+e^2-1 & -\rho^2 & es\end{bmatrix}_{\theta_0}$$

其中　　$s = \rho\sin\theta$　　$c = \rho\cos\theta$

$s' = \cos\theta + e\cos 2\theta$　　$c' = -\sin\theta - e\sin 2\theta$

综合 3 个方向,方程式(1)的解可用状态转移矩阵表示为

$$\boldsymbol{X}_\theta = \boldsymbol{\Phi}(\theta,\theta_0)\boldsymbol{X}_{\theta_0} = \begin{bmatrix}\varphi_{11}(\theta,\theta_0) & \varphi_{12}(\theta,\theta_0)\\ \varphi_{21}(\theta,\theta_0) & \varphi_{22}(\theta,\theta_0)\end{bmatrix}\boldsymbol{X}_{\theta_0} \tag{5}$$

由状态转移矩阵的表达式可知,x,y 两方向有随时间不断增长的漂移项,即含有 J 的项,因而相对距离会不断增大.所以卫星要达到编队的周期性条件,初始状态中 J 的系数要等于 0,即

$$(3\rho_0 + e^2 - 1)\tilde{z}_0 - \rho_0^2\tilde{v}_{x0} + es_0\tilde{v}_{z0} = 0 \tag{6}$$

由式(2),将式(6)转换到时间 t 域下为

$$[3\rho_0^2 + \rho_0(e^2\sin^2\theta_0 - 1)]z_0 + \rho_0^2 e\sin\theta_0 x_0 - (\rho_0/k^2)v_{x0} + (es_0/k^2\rho_0)v_{z0} = 0 \tag{7}$$

1.2　多脉冲队形重构的数学描述

多脉冲队形重构问题,是指在编队条件下,一定范围(时间域 T 或真近点角域 Θ)内,对伴飞卫星施加多次脉冲,使其达到某一期望的状态,过程中使控制代价(本文中为总燃料消耗)最小.

若记中心星初始时真近点角 θ_0.初始运动状态为 $\boldsymbol{X}_0$,施加脉冲的真近点角分别为 $\theta_1\cdots\theta_n(\theta_0\leqslant\theta_1\leqslant\cdots\leqslant\theta_n\leqslant\Theta)$,所对应的运动状态分别为 $\boldsymbol{X}_{10}\cdots\boldsymbol{X}_{n0}$.期望运动状态为 $\boldsymbol{X}_{d0}$.

卫星在 θ_1 施加第 1 次脉冲 $\Delta\boldsymbol{X}_1$,达到对应的运动状态 $\boldsymbol{X}_{10}$,则有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(\theta_1,\theta_0)\boldsymbol{X}_0 + \Delta\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{\Phi}(\theta_1,\theta_0)\boldsymbol{X}_{10}\\ &\Delta\boldsymbol{X}_1 = [\boldsymbol{0}\quad \Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_1]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

同样,卫星在 θ_n 施加第 n 次脉冲 $\Delta\boldsymbol{X}_n$,达到对应的运动状态 $\boldsymbol{X}_{n0}$,有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(\theta_n,\theta_{n-1})\boldsymbol{X}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{X}_n = \boldsymbol{\Phi}(\theta_n,\theta_0)\boldsymbol{X}_{n0}\\ &\Delta\boldsymbol{X}_n = [\boldsymbol{0}\quad \Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_n]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

在整个过程中,有下式成立:

$$\boldsymbol{\Phi}(\Theta,\theta_n)\{\cdots[\boldsymbol{\Phi}(\theta_1,\theta_0)\boldsymbol{X}_0 + \Delta\boldsymbol{X}_1]\cdots + \Delta\boldsymbol{X}_n\} = \boldsymbol{\Phi}(\Theta,\theta_0)\boldsymbol{X}_{d0} \tag{10}$$

特殊的,对于两脉冲队形重构,可以求得两次脉冲的表达式:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_1 &= -\varphi_{12}^{-1}(\theta_2,\theta_1)[\varphi_{11}(\theta_2,\theta_0)\delta\tilde{\boldsymbol{r}}_0 + \varphi_{12}(\theta_2,\theta_0)\delta\tilde{\boldsymbol{v}}_0]\\ \Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_2 &= -\varphi_{21}(\theta_2,\theta_0)\delta\tilde{\boldsymbol{r}}_0 - \varphi_{22}(\theta_2,\theta_0)\delta\tilde{\boldsymbol{v}}_0 - \varphi_{22}(\theta_2,\theta_1)\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_1\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

其中　　$\boldsymbol{X}_0 - \boldsymbol{X}_{d0} = [\delta\tilde{\boldsymbol{r}}_0\quad \delta\tilde{\boldsymbol{v}}_0]^{\mathrm{T}}$

在 n 个脉冲中,当每次脉冲作用的时刻 θ_i $(i=1,2,\cdots,n)$和前 $n-2$ 个脉冲的大小方向确定后,最后两次脉冲可由式(11)确定.则决定总脉冲大小的变量为每次脉冲作用的时刻及前 $n-2$ 次脉冲矢量.

在脉冲前后,$\Delta\boldsymbol{r} = 0$,则时间域脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}$ 可由公式(2)求得

$$\Delta\boldsymbol{v} = k^2\rho\cdot\Delta\tilde{\boldsymbol{v}} \tag{12}$$

这样就得到了各脉冲 $\Delta\boldsymbol{v}$,则总脉冲可表示为

$$\Delta V = |\Delta\boldsymbol{v}_1| + |\Delta\boldsymbol{v}_2| + \cdots + |\Delta\boldsymbol{v}_n| \triangleq f(\theta_1,\cdots,\theta_n,\Delta\tilde{\boldsymbol{v}},\cdots,\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{n-2},\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_{d0}) \tag{13}$$

则多脉冲燃料最优队形重构的问题可表示为数学

规划的形式：

$$\left.\begin{aligned}&\min_{\theta_1,\theta_2,\cdots}\ \Delta V \triangleq f(\theta_1,\cdots,\theta_n,\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_1,\cdots,\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_{n-2},\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_{d0})\\&\text{s.t. }\ \theta_0\leqslant\theta_1\leqslant\cdots\leqslant\theta_n\leqslant\Theta\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

2 仿真结果与分析

由于多脉冲机动问题中数学模型比较复杂，待优化变量比较多，因此本文采用全局寻优能力较强的遗传算法.

为验证机动模型的正确性，取 $\Theta=2\pi$，中心星椭圆轨道参数为 $a=10\,000$ km，$e=0.3$，$i=45°$，$\Omega=45°$，$\omega=45°$，$\theta_0=45°$. 分别给出伴飞星的初始相对状态和期望相对状态(时间 t 域)，见表 1.

表 1 卫星重构前后相对状态

状态	$\boldsymbol{r}$/m	$\boldsymbol{v}$/(m·s^{-1})
初始状态	(402.52, −750.64, 1086.86)^{T}	(2.134, −0.708, −0.350)^{T}
期望状态	(435.96, −2251.45, 2331.36)^{T}	(4.535, −2.124, −0.530)^{T}

分别计算 2 脉冲、3 脉冲、4 脉冲队形重构，求得各脉冲大小、方向和作用时间，结果如表 2、表 3、表 4 所示.

表 2 卫星重构 2 脉冲大小、方向和作用时间

t_i/s	$\Delta\boldsymbol{v}_i$/(m·s^{-1})	θ_i/rad	$\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_i$/(m·rad^{-1})
3807	(−0.20, 1.12, −0.52)^{T}	3.0	(−394, 2186, −1033)^{T}
9505	(0.09, −0.04, 0.00)^{T}	6.6	(94, −46, 3)^{T}

表 3 卫星重构 3 脉冲大小、方向和作用时间

t_i/s	$\Delta\boldsymbol{v}_i$/(m·s^{-1})	θ_i/rad	$\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_i$/(m·rad^{-1})
61	(−0.20, −0.00, −0.00)^{T}	0.8	(96, 152, −98)^{T}
3803	(−0.22, 1.13, −0.44)^{T}	3.0	(−485, 2076, −717)^{T}
9952	(−0.09, −0.02, −0.00)^{T}	7.1	(89, −37, 5)^{T}

表 4 卫星重构 4 脉冲大小、方向和作用时间

t_i/s	$\Delta\boldsymbol{v}_i$/(m·s^{-1})	θ_i/rad	$\Delta\tilde{\boldsymbol{v}}_i$/(m·rad^{-1})
392	(−0.01, 0.00, −0.00)^{T}	1.2	(18, −5, 1)^{T}
839	(−0.02, 0.01, −0.01)^{T}	1.5	(8, 2, −3)^{T}
3824	(−0.22, 1.13, −0.40)^{T}	3.0	(−422, 2212, −851)^{T}
9952	(−0.08, −0.02, 0.00)^{T}	7.1	(96, −23, 2)^{T}

可求得总脉冲分别为 1.355 m/s，1.345 m/s，1.348 m/s. 根据结果，可计算脉冲前后相对运动状态，代入式(5)即可得卫星转移轨道，如图 1 所示.

由表 2、表 3、表 4、图 1 可以看出，在本算例中，2 脉冲、3 脉冲和 4 脉冲轨道转移所需要的燃料(总脉冲)大约是相等的. 最主要脉冲的大小和施加时间也大约是相等的，分别为 3 807 s，3 803 s 和 3 824 s. 可见在本算例中，2 脉冲和其它多脉冲优化的结果是一样的，也就是说 2 脉冲即可满足绕飞队形重构燃料消耗最优要求.

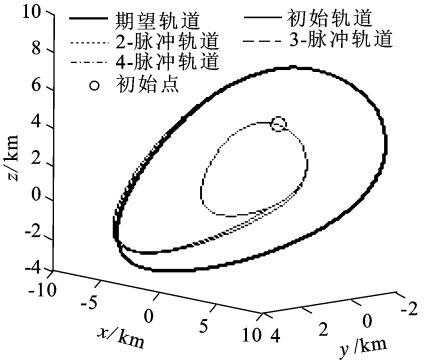

图 1 多脉冲卫星重构轨道转移

特殊情况下，当实际相对轨道和期望轨道有交点，且两卫星到达交点的时刻相同时，此时多脉冲就简化为单脉冲，且该脉冲作用在交点处. 选取算例如下，中心星各参数及环绕星初始状态同上例，期望状态为 $\Delta\boldsymbol{r}=(402.52,\ 750.64,\ 1086.86)^{\mathrm{T}}$ m，计算 2 脉冲队形重构，求得两次脉冲的作用时间为 2 270 s 和 2 667s，脉冲为 $\Delta\boldsymbol{v}_1=(-0.0004,\ -1.0408,\ -0.0003)^{\mathrm{T}}$ m/s，$\Delta\boldsymbol{v}_2=(0.0003,\ -0.0019,\ 0.0002)^{\mathrm{T}}$ m/s. 如图 2 所示.

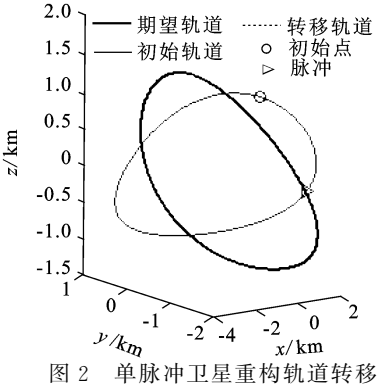

图 2 单脉冲卫星重构轨道转移

3 结束语

本文构造了基于脉冲假设的燃料消耗性能指标函数，建立了多脉冲队形重构问题的数学模型，以各脉冲的作用时间和环绕卫星的相对初始状态为优化变量，基于遗传算法，搜索函数极值，确定燃料消耗最优队形重构各脉冲的大小、方向和作用时间. 最后的仿真结果验证方法有效. 本文所提出的多脉冲轨道转移策略，不仅可以应用于编队队形重构，还可用来进行编队队形的初始化，以及交会对接等其它空间近距离的轨道转移方案的制定.

(下转第 961 页)